第27卷第5期
2010年5月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 27 No. 5
May 2010

文章编号: 1000−8152(2010)05−0653−05

模型相关时变时滞马尔可夫跳变系统低保守稳定性

赵旭东，曾庆双

(哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 本文研究了时变时滞与模型相关的随机马尔可夫跳变系统的时滞相关稳定性问题. 通过建立时变时滞与模型相关的系统模型, 构造不同的Lyapunov-Krasovskii函数, 并通过引入改进的积分等式, 以线性矩阵不等式的形式提出了具有较小保守性的时滞依赖稳定性条件. 最后用几个数值算例说明本文结论的有效性及较低的保守性.

关键词: 时滞依赖稳定性; 马尔可夫跳变系统; 模型相关; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Less conservative delay-dependent stability of Markovian jump systems with mode-dependent time-varying delays

ZHAO Xu-dong, ZENG Qing-shuang

(Space Control and Inertial Technology Institute, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: The delay-dependent stability problem for Markovian jump systems with mode-dependent time-varying delays is investigated. In terms of linear matrix inequalities, we propose a less conservative delay-dependent stability criterion for Markovian jump systems. This work includes the construction of a system model in which the jumps of the time-varying delays are model-dependent, develop a different Lyapunov-Krasovskii functional and introduce some improved integral-equalities. Numerical examples are provided to demonstrate the efficiency and the reduced conservatism of the results.

Key words: delay-dependent stability; Markovian jump systems; mode-dependent; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

近年来, 马尔可夫跳变系统的应用越来越广泛, 在生化系统、制造系统、电路系统, 甚至经济预测、车辆控制和飞行器控制等行业随处可见. 时滞现象在实际工程中是普遍存在的, 而时滞的存在往往会导致系统的不稳定和较差的系统性能. 因此对时滞马尔可夫随机切换系统$\dot{x}(t) = A(r(t))x(t-d) + B(r(t))u(t)$($r(t)$为取值于有限状态集的右连续马尔可夫链)的研究就显得极为重要. 在学术界的研究中, 针对时滞马尔可夫跳变系统的稳定性分析已经取得了一定的成果[1~3].

在文献[4]中作者通过自由权矩阵方法, 避免了此前文献中由于模型转换技术或交叉项界定技术所带来的保守性, 得到较以往文献具有更低保守性的时滞相关稳定性条件, 其采用的自由权矩阵不等式法使所得结果仍有一定的保守性, 并且其对Lyapunov-Krasovskii泛函导数的推导过程中仍有需要改进之处. 另一方面, 据作者所知包括文献[4]在内的绝大多数文献所考虑的马尔可夫跳变系统模型都假设时滞部分$d(t)$在几个子系统中是相同的, 即时滞不随系统切换而改变, 然而在实际工程应用当中时滞部分在几个子系统中是相关于系统模型的. 因此如果不考虑时滞的模型依赖问题则会给实际应用带来很高的保守性.

文献[5]中, 作者给出了时滞马尔可夫跳变系统模型时滞相关的时滞依赖稳定性条件, 文献[6~8]在文献[5]的基础上研究了时滞模型依赖马尔可夫跳变系统的若干问题. 文献[5]中时滞相关稳定性结论考虑到了时滞模型相关问题, 但由于其建立的Lyapunov-Krasovskii泛函仍有可改进之处, 使得其所得结果中并没有包含子系统中时滞上界的信息, 所以带来了非常大的保守性. 另外需要指出文献[5]等所考虑的系统模型假设时滞项导数为$\dot{d}(t) \leqslant \mu < 1$, 但是在许多实际应用中, 此限制同样显得过于苛刻.

本文从降低保守性的目的出发, 通过应用不同

收稿日期: 2008−11−19; 收修改稿日期: 2009−07−08.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60504008).

的Lyapunov-Krasovskii函数与引进改进的积分等式, 以LMI的形式给出保守性更低的模型相关时变时滞马尔可夫跳变系统的时滞相关稳定条件. 并通过一些仿真算例说明本文方法的有效性.

2 系统描述与准备(System formulation and preliminaries)

在本文中: $\mathrm{E}[\cdot]$代表数学期望. $\|\cdot\|$表示向量的Euclidean范数和矩阵的谱范数. $M>0$用来表示对称正定矩阵. 当$r(t)=i\in S=\{1,\cdots,N\}$时, 记$A_i=A(r(t))$.

考虑如下时变时滞模型相关的时滞马尔可夫跳变系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(r(t))x(t)+A_{\mathrm{d}}(r(t))x(t-d(r(t),t)),\\ x(t)=\varphi(t),t\in[-\hbar,0].\end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$是系统状态向量, $A(r(t)),A_{\mathrm{d}}(r(t))$为系统常数矩阵, $r(t)$为定义在完全概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P}\}$上取值于有限状态集$S=\{1,\cdots,N\}$的右连续Markov链, 其状态转移速率矩阵有如下形式:

$$\mathrm{P}\{r(t+\Delta)=j|r(t)=i\}=\begin{cases}\mu_{ij}\Delta+\mathrm{o}(\Delta), & j\neq i,\\ 1+\mu_{ii}\Delta+\mathrm{o}(\Delta), & j=i.\end{cases} \tag{2}$$

其中: $\mu_{ij}\geqslant 0,j\neq i,\mu_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\mu_{ij}$, 初始函数$\varphi(t)\in L^2_{\mathcal{F}_0}([-\hbar,0];\mathbb{R}^n)$, 这里$L^2_{\mathcal{F}_0}([-\hbar,0];\mathbb{R}^n)$表示取值于$\mathbb{R}^n$上随机过程$\xi(s),-\hbar\leqslant s\leqslant 0$的全体, 即$\xi(s)$为$\mathcal{F}_0-$可测, 并且$\int_{-\hbar}^{0}\mathrm{E}\,\|\xi(s)\|^2\mathrm{d}s<\infty,\hbar=\max\limits_{i\in S}\{h_i\}$. 系统(1)中$d(r(t),t)$为模型相关的时变时滞, 满足

$$0\leqslant d_i(t)\leqslant h_i,\dot{d}_i(t)\leqslant\mu_i.$$

定义 1[4] 时滞马尔可夫跳变系统(1)是随机稳定的, 如果对于$[-\hbar,0]$上的初值$\varphi(t)$和$r(0)\in S$, 以下条件满足:

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{\int_0^t x^{\mathrm{T}}(s,\varphi,r(0))x(s,\varphi,r(0))\mathrm{d}s\}<\infty.$$

3 主要结果(Main results)

在这一部分, 将在定理1中给出新的时变时滞模型相关的时滞马尔可夫跳变系统的时滞依赖稳定性条件, 一种改进的低保守性时滞相关稳定性条件将被推导出来.

定理 1 给定常数h_i. 对任意时滞$d_i(t)$, 系统(1)是随机稳定的, 如果存在$n\times n$阶矩阵$P_i>0,Q_{1i}>0,Q_{2i}>0,R_i>0,S_i>0,Z>0,Q_1>0,Q_2>0,L_{ki},M_{ki},N_{ki},k=1,\cdots,4$,使得对任意$i=1,\cdots,N$, 以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\varTheta_{1i} & \varLambda_{11} & \varLambda_{12} & \varLambda_{13} & \sqrt{h_i}L_{1i} & \sqrt{h_i}M_{1i}\\ * & \varTheta_{2i} & \varLambda_{21} & \varLambda_{22} & \sqrt{h_i}L_{2i} & \sqrt{h_i}M_{2i}\\ * & * & \varTheta_{3i} & \varLambda_{31} & \sqrt{h_i}L_{3i} & \sqrt{h_i}M_{3i}\\ * & * & * & \varTheta_{4i} & \sqrt{h_i}L_{4i} & \sqrt{h_i}M_{4i}\\ * & * & * & * & -R_i & 0\\ * & * & * & * & * & -S_i\end{bmatrix}<0, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\mu_{ij}Q_{kj}\leqslant Q_k,k=1,2, \tag{4}$$

$$R_i<Z, \tag{5}$$

$$S_i<Z, \tag{6}$$

其中:

$$\varTheta_{1i}=P_iA_i+(P_iA_i)^{\mathrm{T}}+Q_{1i}+Q_{2i}+\hbar Q_1+\hbar Q_2+L_{1i}^{\mathrm{T}}+L_{1i}-N_{1i}A_i-(N_{1i}A_i)^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{N}\mu_{ij}P_j,$$

$$\varTheta_{2i}=-(1-\mu_i)Q_{1i}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\mu_{ij}h_jQ_{1i}+M_{2i}+M_{2i}^{\mathrm{T}}-L_{2i}-L_{2i}^{\mathrm{T}}-N_{2i}A_{di}-(N_{2i}A_{di})^{\mathrm{T}},$$

$$\varTheta_{3i}=-Q_{2i}+\sum_{j=1}^{N}\mu_{ij}h_jQ_{2i}-M_{3i}-M_{3i}^{\mathrm{T}},$$

$$\varTheta_{4i}=\hbar Z+N_{4i}+N_{4i}^{\mathrm{T}},$$

$$\varLambda_{11}=P_iA_{di}+L_{2i}^{\mathrm{T}}-A_i^{\mathrm{T}}N_{2i}^{\mathrm{T}}+M_{1i}-L_{1i}-N_{1i}A_{di},$$

$$\varLambda_{12}=L_{3i}^{\mathrm{T}}-A_i^{\mathrm{T}}N_{3i}^{\mathrm{T}}-M_{1i},$$

$$\varLambda_{13}=L_{4i}^{\mathrm{T}}-A_i^{\mathrm{T}}N_{4i}^{\mathrm{T}}+N_{1i},$$

$$\varLambda_{21}=M_{3i}^{\mathrm{T}}-L_{3i}^{\mathrm{T}}-A_{di}^{\mathrm{T}}N_{3i}^{\mathrm{T}}-M_{2i},$$

$$\varLambda_{22}=M_{4i}^{\mathrm{T}}-L_{4i}^{\mathrm{T}}-A_{di}^{\mathrm{T}}N_{4i}^{\mathrm{T}}+N_{2i},$$

$$\varLambda_{31}=-M_{4i}^{\mathrm{T}}+N_{3i},$$

证 首先, 将本文的模型映射到马尔可夫过程框架中, 定义

$$x_t(s)=x(t+s),s\in[-2\hbar,0],$$

选择Lyapunov-Krasovskii函数:

$$V(x_t,t,r(t))=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t),$$

其中:

$$V_1(t)=x^{\mathrm{T}}(t)P(r(t))x(t),$$

$$V_2(t)=\int_{t-d(r(t),t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_1(r(t))x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h(r(t))}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_2(r(t))x(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_3(t)=\int_{-\hbar}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$V_4(t)=\int_{-\hbar}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_1x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+$$

$$\int_{-\hbar}^{0}\int_{t+\theta}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Q_2x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

其中: $P_i, Q_{1i}, Q_{2i}, Q_1, Q_2, Z, i=1,2,\cdots,N$, 是适当维数正定矩阵, 定义$L$ 为随机过程$x_t, t\geqslant 0$的弱无穷小微分算子. 则对任意$r(t)=i, i\in S$, 有

$$\begin{cases} LV_1(x_t,t,i)=2x^{\mathrm{T}}(t)P_i\dot{x}(t)+\sum\limits_{j=1}^{N}\mu_{ij}x^{\mathrm{T}}(t)P_jx(t),\\ LV_2(x_t,t,i)=\\ x^{\mathrm{T}}(t)Q_{1i}x(t)+\\ \sum\limits_{j=1}^{N}\mu_{ij}d_j(t)x^{\mathrm{T}}(t-d_i(t))Q_{1i}x(t-d_i(t))-\\ (1-\dot{d}_i(t))x^{\mathrm{T}}(t-d_i(t))Q_{1i}x(t-d_i(t))+\\ \int_{t-d_i(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)(\sum\limits_{j=1}^{N}\mu_{ij}Q_{1j})x(s)\mathrm{d}s+x^{\mathrm{T}}(t)Q_{2i}x(t)-\\ x^{\mathrm{T}}(t-h_i)Q_{2i}x(t-h_i)+\\ \sum\limits_{j=1}^{N}\mu_{ij}h_j(t)x^{\mathrm{T}}(t-h_i)Q_{2i}x(t-h_i)+\\ \int_{t-h_i}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)(\sum\limits_{j=1}^{N}\mu_{ij}Q_{2j})x(s)\mathrm{d}s,\\ LV_3(x_t,t,i)=\hbar\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Z\dot{x}(t)-\int_{t-\hbar}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s,\\ LV_4(x_t,t,i)=\\ \hbar x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t)+\hbar x^{\mathrm{T}}(t)Q_2x(t)-\\ \int_{t-\hbar}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_1x(s)\mathrm{d}s-\int_{t-\hbar}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_2x(s)\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{7}$$

由Newton-Leibniz公式和式(1)对任意适当维数矩阵$L_i, M_i, N_i, i=1,\cdots,N$, 有

$$\begin{cases} \Upsilon_{1i}=2\eta^{\mathrm{T}}(t)L_i(x(t)-x(t-d_i(t))-\\ \qquad\int_{t-d_i(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s)=0,\\ \Upsilon_{2i}=2\eta^{\mathrm{T}}(t)M_i(x(t-d_i(t))-x(t-h_i))-\\ \qquad\int_{t-h_i}^{t-d_i(t)}\dot{x}(s)\mathrm{d}s)=0,\\ \Upsilon_{3i}=2\eta^{\mathrm{T}}(t)N_i(-A_ix(t)-A_{di}x(t-d_i(t))+\\ \qquad\dot{x}(t))=0. \end{cases} \tag{8}$$

其中:

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\; x^{\mathrm{T}}(t-d_i(t))\; x^{\mathrm{T}}(t-h_i)\; \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)],$$

另外, 对于矩阵$Z=Z^{\mathrm{T}}, R_i=R_i^{\mathrm{T}}, S_i=S_i^{\mathrm{T}}, i=1,\cdots N$,且满足$R_i<Z, S_i<Z, i=1,\cdots,N$,以下不等式成立:

$$\begin{aligned} &\Upsilon_{4i}=\\ &d_i(t)\eta^{\mathrm{T}}(t)L_iR_i^{-1}L_i^{\mathrm{T}}\eta(t)-\\ &\int_{t-d_i(t)}^{t}\eta^{\mathrm{T}}(t)L_iZ^{-1}L_i^{\mathrm{T}}\eta(t)\mathrm{d}s>0,\\ &\Upsilon_{5i}=\\ &(h_i-d_i(t))\eta^{\mathrm{T}}(t)M_iS_i^{-1}M_i^{\mathrm{T}}\eta(t)-\\ &\int_{t-h_i}^{t-d_i(t)}\eta^{\mathrm{T}}(t)M_iZ^{-1}M_i^{\mathrm{T}}\eta(t)\mathrm{d}s>0. \end{aligned} \tag{9}$$

根据积分运算法则可以得到

$$\begin{aligned} &\int_{t-\hbar}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s\geqslant\\ &\int_{t-h_i}^{t-d_i(t)}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-d_i(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

由此式, 并联合式(4)(7)∼(9), 得到:

$$\begin{aligned} &LV(x_t,t,i)<\\ &LV_1(x_t,t,i)+LV_2(x_t,t,i)+LV_3(x_t,t,i)+\\ &LV_4(x_t,t,i)+\Upsilon_{1i}+\Upsilon_{2i}+\Upsilon_{3i}+\Upsilon_{4i}+\Upsilon_{5i}\leqslant\\ &2x^{\mathrm{T}}(t)P_i(A_ix(t)+A_{di}x(t-d_i(t)))+\\ &\sum_{j=1}^{N}\mu_{ij}x^{\mathrm{T}}(t)P_jx(t)+x^{\mathrm{T}}(t)Q_{1i}x(t)-\\ &(1-\mu_i)x^{\mathrm{T}}(t-d_i(t))Q_ix(t-d_i(t))+\\ &\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\mu_{ij}h_jx^{\mathrm{T}}(t-d_i(t))Q_{1i}x(t-d_i(t))+\\ &x^{\mathrm{T}}(t)Q_{2i}x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-h_i)Q_{2i}x(t-h_i)+\\ &\sum_{j=1}^{N}\mu_{ij}h_jx^{\mathrm{T}}(t-h_i)Q_{2i}x(t-h_i)+\\ &\hbar\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Z\dot{x}(t)+\hbar x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t)+\hbar x^{\mathrm{T}}(t)Q_2x(t)+\\ &2\eta^{\mathrm{T}}(t)M_i(x(t-d_i(t)-x(t-h_i))+\\ &2\eta^{\mathrm{T}}(t)L_i(x(t)-x(t-d_i(t)))+\\ &2\eta^{\mathrm{T}}(t)N_i(-A_ix(t)-A_{di}x(t-d_i(t))+\dot{x}(t))+\\ &\hbar\eta^{\mathrm{T}}(t)L_iR_i^{-1}L_i^{\mathrm{T}}\eta(t)+\hbar\eta^{\mathrm{T}}(t)M_iS_i^{-1}M_i^{\mathrm{T}}\eta(t)-\\ &\int_{t-d_i(t)}^{t}[\eta^{\mathrm{T}}(t)L_i+\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z]Z^{-1}[L_i^{\mathrm{T}}\eta(t)+Z\dot{x}(s)]\mathrm{d}s-\\ &\int_{t-h_i}^{t-d_i(t)}[\eta^{\mathrm{T}}(t)M_i+\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z]Z^{-1}[M_i^{\mathrm{T}}\eta(t)+\\ &Z\dot{x}(s)]\mathrm{d}s=\\ &\eta^{\mathrm{T}}(t)\Pi_i\eta(t)+\\ &2\eta^{\mathrm{T}}(t)N_i(-A_ix(t)-A_{di}x(t-d_i(t))+\dot{x}(t))+\\ &2\eta^{\mathrm{T}}(t)L_i(x(t)-x(t-d_i(t)))+\\ &2\eta(t)^{\mathrm{T}}M_i(x(t-d_i(t)-x(t-h_i))+\\ &\hbar\eta^{\mathrm{T}}(t)L_iR_i^{-1}L_i^{\mathrm{T}}\eta(t)+\hbar\eta^{\mathrm{T}}(t)M_iS_i^{-1}M_i^{\mathrm{T}}\eta(t)-\\ &\int_{t-d_i(t)}^{t}[\eta^{\mathrm{T}}(t)L_i+\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z]Z^{-1}[L_i^{\mathrm{T}}\eta(t)+Z\dot{x}(s)]\mathrm{d}s-\\ &\int_{t-h_i}^{t-d_i(t)}[\eta^{\mathrm{T}}(t)M_i+\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z]Z^{-1}[M_i^{\mathrm{T}}\eta(t)+\\ &Z\dot{x}(s)]\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{10}$$

其中:

$$\varPi_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{1i} & P_iA_{di} & 0 & 0\\ * & \boldsymbol{H}_{2i} & 0 & 0\\ * & * & \boldsymbol{H}_{3i} & 0\\ * & * & * & \hbar Z\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_i=P_iA_i+(P_iA_i)^{\mathrm T}+Q_{1i}+Q_{2i}+\hbar Q_1+\hbar Q_2+\sum_{j=1}^{N}\mu_{ij}P_j,$$

$$\boldsymbol{H}_{2i}=-(1-\mu_i)Q_{1i}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\mu_{ij}h_jQ_{1i},$$

$$\boldsymbol{H}_{2i}=-Q_{2i}+\sum_{j=1}^{N}\mu_{ij}h_jQ_{2i}.$$

由$Z>0$,得式(10)最后两项全部小于零, 同时令:

$$L_i=\begin{bmatrix}L_{1i}\\ \vdots\\ L_{4i}\end{bmatrix},M_i=\begin{bmatrix}M_{1i}\\ \vdots\\ M_{4i}\end{bmatrix},N_i=\begin{bmatrix}N_{1i}\\ \vdots\\ N_{4i}\end{bmatrix},$$

$$i\in S=\{1,\cdots,N\},\tag{11}$$

则由式(10)(11)和Schur补定理, 可以得到当式(3)~(6)成立时, $LV(x_t,t,i)<0$, 因此存在足够小的常数$\varepsilon>0$使得$LV(x_t,t,i)\leqslant-\varepsilon\|x(t)\|^2$, 再由Dynkin公式[4], 对$t\geqslant\hbar$,

$$\mathrm{E}V(x_t,t,i)-\mathrm{E}V(x_t,\hbar,i)\leqslant-\varepsilon\mathrm{E}\int_{\hbar}^{t}x^{\mathrm T}(s)x(s)\mathrm{d}s,$$

因此

$$\mathrm{E}\int_{\hbar}^{t}x^{\mathrm T}(s)x(s)\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon^{-1}\mathrm{E}V(x,\hbar,i).\tag{12}$$

由式(1)知到存在常数$\delta>0$使得对任意 $t\geqslant0$:

$$\|x(t)\|\leqslant\|x(0)\|+2\delta\int_0^t\sup_{s-\hbar\leqslant r\leqslant s}\|x(r)\|\,\mathrm{d}s,$$

则对 $0\leqslant t_1\leqslant\hbar$:

$$\sup_{0\leqslant t_1\leqslant t}\|x(t)\|\leqslant\|x(0)\|+2\delta\int_0^{t_1}\sup_{-\hbar\leqslant r\leqslant s}\|x(r)\|\,\mathrm{d}s,$$

因此

$$\sup_{-\hbar\leqslant t\leqslant t_1}\|x(t)\|\leqslant 2\sup_{-\hbar\leqslant t\leqslant0}\|\varphi(t)\|+2\delta\int_0^{t_1}\sup_{-\hbar\leqslant r\leqslant s}\|x(r)\|\,\mathrm{d}s.$$

由Gronwall-Bellman引理, 对任意 $0\leqslant t_1\leqslant\hbar$:

$$\sup_{-\hbar\leqslant t\leqslant t_1}\|x(t)\|\leqslant2\sup_{-\hbar\leqslant t\leqslant0}\|\varphi(t)\|\exp(2\delta t_1),$$

所以

$$\sup_{-\hbar\leqslant t\leqslant t_1}\|x(t)\|^2\leqslant4\sup_{-\hbar\leqslant t\leqslant0}\|\varphi(t)\|\exp(4\delta\hbar).\tag{13}$$

由式(1)和$V(x_t,t,i)$的定义, 可以证明存在常数$\alpha>0$, 使得: $V(x_t,t,r(t))\leqslant\alpha\sup_{t\geqslant-\hbar}\|x(t)\|^2$, 则由此式和式(13)得到

$$\mathrm{E}\{V(x_t,t,r(t))\}\leqslant4\alpha\exp(4\delta\hbar)\mathrm{E}\{\sup_{-\hbar\leqslant t\leqslant0}\|\varphi(t)\|^2\},$$

由此式和式(12)有

$$\mathrm{E}\{\int_0^t x^{\mathrm T}(s)x(s)\mathrm{d}s\}\leqslant 4(\hbar+\alpha\varepsilon^{-1})\exp(4\delta\hbar)\mathrm{E}\{\sup_{-\hbar\leqslant t\leqslant0}\|\varphi(t)\|^2\},$$

由此, 根据定义1, 系统(1)是随机稳定的.

证毕.

注 1 对于时变时滞依赖于系统模态的马尔可夫跳变系统, 文献[5~8]在估计Lyapunov-Krasovskii泛函导数的过程中将“$-\mu_{ii}\int_{t-\hbar}^{t}x^{\mathrm T}(s)Qx(s)\mathrm{d}s$”扩大为“$-\eta\int_{t-\hbar}^{t}x^{\mathrm T}(s)Qx(s)\mathrm{d}s$”, 其中$\eta=\max\{|\mu_{ii}|,i\in S\}$. 另一方面, 可以看到, 在文献[5~8]得到的相应结果中只包含系统最大时滞上界$\hbar$的信息, 而不包含子系统时滞上界h_i的信息, 因此当子系统之间时滞上界存在较大差异的时候, 其相应结果就会存在明显的保守性. 相比于这些文献, 定理1的创新之处在于根据时变时滞依赖于系统模型的实际情况, 建立了不同的Lyapunov-Krasovskii泛函, 并引入相应的积分等式, 一方面得到了较小的Lyapunov-Krasovskii泛函导数上界, 另一方面使所得结果包含了子系统时滞上界和时滞导数的信息, 因而所得结果具有较低的保守性.

4 数值算例(Numerical examples)

4.1 例 1 (Example 1)

考虑模型相关时变时滞马尔可夫跳变系统(1), 系统参数如下:

$$A_1=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0.3 & -2.5 & 1\\ -0.1 & 0.3 & -3.8\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-2.5 & 0.5 & -0.1\\ 0.1 & -3.5 & 0.3\\ -0.1 & 1 & -2\end{bmatrix},$$

$$A_{d1}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.1 & 0.6\\ 0.5 & -1 & -0.8\\ 0 & 1 & -2.5\end{bmatrix},$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0 \\ -0.6 & 1 & -0.8 \end{bmatrix},$$

首先给定$h_2 = 0.5, \mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.3, \mu_{22} = -0.3$, 对于不同的$\mu_{11}$, 将系统最大允许时滞$\hbar$与文献[5]中引理1方法所得结果进行比较, 比较结果于表1给出. 通过表1的比较可以看出定理1具有很小的保守性.

表 1　对于给定μ_{11}, 允许的最大$\hbar$比较

Table 1　Comparisons of allowed $\hbar$ for given μ_{11}

μ_{11}	-0.1	-0.5	-1
$\hbar$由文献[5]中引理1	2.5	1.4	0.7
$\hbar$由定理1	3.0	2.5	1

注 2　有必要指出, 相比于文献[5], 定理1可以处理时变时滞的导数界大于1的情况. 另外, 由表1可以看出系统允许的最大时滞随系统跳变概率的增加而减小.

4.2　例 2 (Example 2)

下面, 应用算例2来说明由于建模不准确所带来的保守性问题. 考虑系统(1), 参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.4888 & 0.8057 \\ -0.6451 & -3.2684 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} -0.8620 & -1.2919 \\ -0.6841 & -2.0729 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.4898 & 0.2895 \\ 1.3396 & -0.0211 \end{bmatrix},$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} -2.8306 & 0.4978 \\ -0.8436 & -1.0115 \end{bmatrix},$$

$$\mu_{11} = -0.1, \mu_{22} = -0.8, \mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.1,$$

由于文献[4]分析时变时滞马尔可夫跳变系统稳定性时, 没有考虑时滞相关于子系统的切换, 所以应用文献[4]中方法分析算例1的稳定性时, 需令时变时滞导数界$\mu = 0.7$, 由文献[4]中定理1得到其最大允许时滞为0.4549, 那么令$h_1 = 0.4550$, 应用本文定理1中方法可以得到$\hbar = 0.6247$, 由此可以看出本文方法更有利于应用到工程实际中, 具有更小的保守性.

注 3　有必要进一步强调: 当时变时滞导数界取相同值时, 即$\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1.2$ 时, 由文献[4]得到其最大允许时滞为0.3860, 此时令$h_1 = h_2$应用定理1得到$\hbar = h_1 = h_2 = 0.4652$, 这说明本文方法相比于文献[4]的优越性不仅是考虑了时滞模型相关问题, 其所选用的Lyapunov-Krasovskii泛函及其推导过程都使其结论具有很低的保守性.

5　结论(Conclusion)

本文通过建立不同的Lyapunov-Krasovskii函数, 并引入改进的积分等式, 给出了时变时滞随机马尔可夫跳跃系统时滞模型相关的稳定性条件, 由仿真算例可以看出本文方法具有更低的保守性.

参考文献(References):

[1] CAO Y, LAM J. Robust H_∞ control of uncertain Markovian jump systems with time-delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(1): 77 – 83.

[2] MAO X. Exponential stability of stochastic delay interval systems with Markovian switching[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1604 – 1612.

[3] 邓飞其, 陈金堂, 刘永清. 多模态Itô随机系统的均方稳定性与鲁棒镇定[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 569 – 572.
(DENG Feiqi, CHEN Jintang, LIU Yongqing. Mean-squre stability and robust stabilization of multiple-mode Ito stochastic systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(4): 569 – 572.)

[4] XU S, LAM J. Delay-dependent H_∞ control and filtering for uncertain Markovian jump systems with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and System*, 2007, 54(9): 2070 – 2077.

[5] XU S, CHEN T, LAM J. Robust H_∞ filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 900 – 907.

[6] CHEN W H, CU J X, GUAN Z H. Guaranteed cost control for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2270 – 2275.

[7] WANG G L. Design of reduced-order H_∞ filtering for Markovian jump systems with mode-dependent time delays[J]. *Signal Processing*, 2009, 89(2): 187 – 196.

[8] SHAO H Y. Delay-rang-dependent robust H_∞ filtering for uncertain stochastic systems with mode-dependent time delays and Markovian jump parameters[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 342(2): 1084 – 1095.

作者简介:

赵旭东　(1982—), 男, 博士研究生, 研究方向为切换系统、马尔可夫跳变系统、时滞系统, E-mail: zxd7777777@126.com;

曾庆双　(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 长期从事惯性技术、控制理论与控制工程、切换系统的研究, E-mail: zqshuang2000@yahoo.com.