

不确定非线性系统的高阶滑模控制器设计

陈 杰^{1,2}, 李志平¹, 张国柱¹

(1. 北京理工大学 自动化学院, 北京 100081;

2. 北京理工大学 复杂系统智能控制与决策教育部重点实验室, 北京 100081)

摘要: 针对一类不确定非线性SISO系统, 结合系统有限时间稳定理论与积分滑模控制理论, 提出了一种新的高阶滑模控制器设计方法, 改善了现有高阶滑模控制中存在的缺陷. 积分滑模保证了系统初始时刻就具有抗扰能力, 同时采用有限时间稳定观测器实现了高阶滑模的输出反馈控制. 仿真结果表明该控制器可使系统在有限时间内收敛, 并有效地减小了系统抖振.

关键词: 高阶滑模控制; 有限时间稳定; 积分滑模控制; 有限时间收敛观测器

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Higher-order sliding-mode controller for a class of uncertain nonlinear systems

CHEN Jie^{1,2}, LI Zhi-ping¹, ZHANG Guo-zhu¹

(1. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China,

2. Education Ministry Key Laboratory of Complex Systems Intelligent Control and Decision,
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: A novel design method of higher-order sliding-mode controller is proposed for a class of uncertain nonlinear SISO systems, which is based on the finite-time stability theory and integral sliding-mode control theory and avoids some shortcomings of existing higher-order sliding-mode controllers. The integral sliding-mode guarantees the disturbance-rejection ability for the system at the initial time. Meanwhile, the output-feedback control is realized by employing a finite-time stable observer. Simulation results show that this controller drives the system to converge in finite time and alleviates the chattering phenomena effectively.

Key words: higher-order sliding-mode control; finite-time stability; integral sliding-mode control; finite-time convergent observer

1 引言(Introduction)

滑模控制在解决不确定高阶非线性动态系统时是一种非常有效的方法^[1~3], 表现在对系统不确定非线性—系统建模误差与外部干扰的强鲁棒性和算法设计简单. 然而, 滑模控制存在的“抖振”现象^[4]一直为人所诟病. 近几十年来, 研究者们也一直在寻求如何减小抖振的办法, 如最早采用的“边界层”法^[5,6]; 后来Utkin等人提出的基于观测器方法^[2], 以及近年来提出的高阶滑模控制方法^[7~10]等. 与边界层法不一样的是: 高阶滑模控制使得控制量在时间上是本质连续的, 这样能有效地减小系统抖振, 又不以牺牲控制器的鲁棒性为代价. Levant在

文献[7,8]中通过设计一个高阶鲁棒微分器, 实现了高阶滑模的输出反馈控制. 但是该微分器需要预先知道微分信号的一个Lipschitz上界, 在一定程度上限制了输入信号的范围. Salah Laghrouche等人在文献[9,10]中结合最优控制理论与积分滑模控制, 给出了两种不同的高阶滑模控制器设计方法, 但是这些方法对滑模变量及其高阶导数的初始值敏感, 这在实际应用中很难满足.

本文针对上述问题, 结合有限时间稳定理论和积分滑模控制, 提出了一种新的高阶滑模控制器设计方法. 采用一个有限时间收敛观测器, 实现了高阶滑模的输出反馈控制. 理论证明与仿真结果表明, 该方

法能够有效地减小系统抖振, 保证系统快速收敛.

2 问题描述及预备知识(Problem formulation and preliminaries)

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u, \\ y = \sigma(x, t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量; $u \in \mathbb{R}$ 为控制输入; $\sigma(x, t)$ 为可测光滑输出函数(滑动变量); $f(x, t)$, $g(x, t)$ 为不确定光滑函数.

本文的控制目的是: 使得 $\sigma(x, t) = 0$ 在反馈控制作用下有限时间内成立. 如果 $\sigma(x, t)$ 选择为系统跟踪误差函数, 控制目的即为有限时间跟踪.

定义 1 假设系统(1)可以在非连续动态反馈控制下能构成闭环, 同时假设 $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ 为连续函数, 则集合 $S^r = \{x | \sigma(x, t) = \dots = \sigma^{(r-1)}(x, t) = 0\}$ 为“ r 阶滑模集”, 该集合满足非空、在Filippov意义下局部可积等条件, 那么系统在 S^r 上的运动称为关于滑动变量 σ 的“ r 阶滑动模”^[8].

假设 1 系统(1)关于滑动变量 $\sigma(x, t)$ 的相对阶 ρ 为一已知常数, 且与其相关的零动态是稳定的, 设计的高阶滑模阶数 $r \geq \rho$.

引入辅助变量

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= u, \\ &\vdots \\ x_{n+r-\rho+1} &= u^{(r-\rho+1)}, \\ x_{n+1+r-\rho} &= t, \\ v &= u^{(r-\rho)}, \end{aligned}$$

对系统(1)进行扩展. 令

$$\begin{aligned} x_e &= [x^T x_{n+1} \cdots x_{n+1+r-\rho}]^T, \\ F_0(x, x_{n+1}) &= f(x) + g(x)x_{n+1}, \end{aligned}$$

则系统扩展后有如下表示:

$$\dot{x}_e = f_e(x_e) + g_e(x_e)v, \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} f_e(x_e) &= [F_0^T(x, x_{n+1}) x_{n+2} \cdots x_{n+r-\rho} 0 1]^T, \\ g_e(x_e) &= [0 0 \cdots 0 1 0]^T \in \mathbb{R}^{n+1+r-\rho}. \end{aligned}$$

输出 σ 满足如下方程:

$$\sigma^{(r)} = \varphi(\cdot) + \gamma(\cdot)v, \quad (3)$$

其中: $\varphi(\cdot) = L_{f_e}^r \sigma(x, t)$, $\gamma(\cdot) = L_{g_e} L_{f_e}^{r-1} \sigma(x, t)$.

假设 2 假设存在正常数 K_m, K_M, C 使得

$$0 < K_m \leq \gamma(\cdot) \leq K_M, |\varphi(\cdot)| \leq C \quad (4)$$

至少局部成立.

系统(1)的 r 阶滑模控制器设计任务可以转化为设计一个控制器使得系统

$$\dot{z} = Az + b\varphi(\cdot) + b\gamma(\cdot)v \quad (5)$$

在有限时间内稳定. 其中:

$$\begin{aligned} z &= [z_1 z_2 \cdots z_r]^T = [\sigma \dot{\sigma} \cdots \sigma^{(r-1)}]^T, \\ b &= [\underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}_r \ 1]^T, \\ A &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(r-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(r-1) \times (r-1)} \\ \hline 0 & \mathbf{0}_{1 \times (r-1)} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

以下给出齐次系统有限时间稳定几个基本概念及有用的引理^[12~14].

定义 2 (有限时间稳定)考虑系统

$$\dot{x} = F(x), F(0) = 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

其中 $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在原点的一个开邻域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 内连续. 如果存在一个原点开邻域 $N \subseteq D$, 和时间调节函数 $T_F: N \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ 使得如下条件成立, 则系统(6)原点是有限时间稳定的.

1) 有限时间收敛: 对任意 $x \in N \setminus \{0\}$, 在区间 $[0, T_F(x))$ 定义 $S^x(t) \in N \setminus \{0\}$, 对于所有 $t \in [0, T_F(x))$ 有 $\lim_{t \rightarrow T_F(x)} S^x(t) = 0$.

2) Lyapunov 稳定: 对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\mathcal{B}_\delta(0) \subset N$, $x \in \mathcal{B}_\delta(0) \setminus \{0\}$ 时, $S^x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$, $t \in [0, T_F(x))$.

定义 3 假设函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 给定权系数 $(\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 如果 $V(\lambda^{\kappa_1} x_1, \dots, \lambda^{\kappa_n} x_n) = \lambda^d V(x_1, \dots, x_n)$, $\forall \lambda > 0$, 则称函数 V 关于权系数 $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ 是 d 阶齐次.

定义 4 给定一个向量场 l , 和权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 如果向量场的第 i 个分量 l_i ($1 \leq i \leq n$) 是 $\kappa_i + d$ 阶齐次, 即

$$\begin{aligned} l_i(\lambda^{\kappa_1} x_1, \lambda^{\kappa_2} x_2, \dots, \lambda^{\kappa_n} x_n) &= \\ \lambda^{\kappa_i + d} l_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall \lambda > 0, \end{aligned}$$

那么称 l 关于权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ 是 d 阶齐次.

引理 1 假设系统(6)中 $F(x)$ 关于权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{R}_+^n$ 是 d 阶齐次, 系统(6)的原点是有限时间稳定的平衡点, 当且仅当原点是渐近稳定平衡点且 $d < 0$.

引理 2 (Tube 引理) 考虑乘积空间 $X \times Y$, 其

中 Y 是一个紧集, 如果 N 是一个开集, 包含 $X \times Y$ 的一个切片 $\{x_0\} \times Y$, 那么 N 也包含关于切片 $\{x_0\} \times Y$ 的一个管道 $W \times Y$, 其中 W 是 x_0 在 X 中的一个邻域.

3 高阶滑模控制器设计(Design of the higher-order sliding mode controller)

令 $\chi(\cdot) = \varphi(\cdot) + (\gamma(\cdot) - 1)v$, 系统(5)改写为

$$\dot{z} = Az + b(\chi(\cdot) + v). \quad (7)$$

将 $\chi(\cdot)$ 视为扰动, 对控制量 v 进行分解:

$$v = v_{\text{ideal}} + v_{\text{ism}}. \quad (8)$$

理想控制项 v_{ideal} , 满足几乎处处连续, 其作用是在扰动 $\chi(\cdot) = 0$ 时, 保证系统有限时间稳定; 第2部分 v_{ism} 为积分滑模控制项, 是一个不连续的控制量, 用来抵消系统中的扰动 $\chi(\cdot)$.

首先设计理想控制项 v_{ideal} , 设 $\chi(\cdot) = 0$, 系统(7)变为

$$\dot{z} = Az + bv_{\text{ideal}}. \quad (9)$$

这是一个线性积分串联系统, 可以设计一个有限时间收敛控制器

$$v_{\text{ideal}} = \psi_{\alpha}(z_1, z_2, \dots, z_r), \quad (10)$$

其中 $\psi_{\alpha}(z_1, z_2, \dots, z_r)$ 将在后文进行确定.

然后采用积分滑模控制, 使系统 $t = 0$ 时刻就进入滑动模态^[15]. 考虑系统(7), 为了引入积分滑模控制, 选取新的滑模变量

$$s = s_0(z) + \xi, \quad s, s_0(z), \xi \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

其中 $s_0(z)$ 可设计为系统(7)状态 z 的线性组合, 而代表积分形式的第2项 ξ 将随后进行定义.

考虑 $s_0(z) = z_r$ 这一特殊情况, 对滑模变量 s 求导得

$$\dot{s} = \dot{z}_r + \dot{\xi} = \chi(\cdot) + v_{\text{ideal}} + v_{\text{ism}} + \dot{\xi}. \quad (12)$$

如果取 $\dot{\xi} = -v_{\text{ideal}}$, $\xi(0) = -z_r(0)$, 则 v_{ism} 的等效控制量为 $v_{\text{ism}}^{\text{eq}} = -\chi(\cdot)$. $\xi(0)$ 的值是由 $s(0) = 0$ 确定的. 这样就可以保证在 $t = 0$ 时, 系统运动进入滑动模态式(9). 而这滑动模态在理想控制项作用下是有限时间稳定的. 下面的定理将说明如何设计积分控制项 v_{ism} , 使其满足新的滑模面到达条件.

定理 1 选定滑动变量 $s = s_0(z) + \xi$, 如果积分控制项选取为

$$v_{\text{ism}} = -\beta \text{sgn } s. \quad (13)$$

当增益 β 满足

$$\beta > \frac{C + (K_M + 1)V_{\text{ideal}}^M + \eta}{K_m} \quad (14)$$

时, 在扰动 $\chi(\cdot) \neq 0$ 的情况下, 能够保证系统在 $t \geq 0$ 进入滑动模态. 其中 $\beta, \eta > 0$, v_{ideal}^M 为理想控制项的最大值.

证 选取Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2}s^2. \quad (15)$$

则 $\dot{V} = s\dot{s}$, 因为

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{z}_r + \dot{\xi} = \chi(\cdot) + v_{\text{ideal}} + v_{\text{ism}} + \dot{\xi} = \\ &= \varphi(\cdot) + (\gamma(\cdot) - 1)v_{\text{ideal}} + \gamma(\cdot)v_{\text{ism}}, \end{aligned} \quad (16)$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{V} = s\dot{s} &= [\varphi(\cdot) + (\gamma(\cdot) - 1)v_{\text{ideal}}]s - \gamma(\cdot)\beta|s| \leq \\ &= [\varphi(\cdot) + (\gamma(\cdot) - 1)v_{\text{ideal}}]s - \\ &= [C + (K_M + 1)v_{\text{ideal}}^M]|s| - \eta|s|. \end{aligned} \quad (17)$$

根据式(4), 有

$$\dot{V} = s\dot{s} \leq -\eta|s|. \quad (18)$$

满足滑模控制的到达条件. 这表明系统(7)在初始时刻就可以进入滑动模态, 其动态特性由式(9)描述.

因此, 可以得到扩展系统(2)的状态反馈控制律, 即

$$v = v_{\text{ideal}} + v_{\text{ism}} = \psi_{\alpha}(z_1, z_2, \dots, z_r) - \beta \text{sgn } s. \quad (19)$$

式(19)中包含了 $z_1, z_2, \dots, z_r$, 其中只有 $z_1 = \sigma(x, t)$ 是可测的, 因此需要设计一个状态估计器来实时观测出 $z_1, z_2, \dots, z_r$ 的值, 实现系统(7)的输出反馈控制.

为了保证系统有限时间收敛, 本文采用的观测器形式如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 - h_1|\hat{z}_1 - z_1|^{\mu_1} \text{sgn}(\hat{z}_1 - z_1), \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 - h_2|\hat{z}_1 - z_1|^{\mu_2} \text{sgn}(\hat{z}_1 - z_1), \\ \vdots \\ \dot{\hat{z}}_r = \psi_{\alpha} - h_r|\hat{z}_1 - z_1|^{\mu_r} \text{sgn}(\hat{z}_1 - z_1). \end{cases} \quad (20)$$

其中 $\hat{z}_i, h_i, \mu_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 分别为 z_i 的观测值和观测器设计参数. 令 $e_i = \hat{z}_i - z_i$, 选择滑模变量 $s = \hat{z}_r + \xi$, 其中 $\dot{\xi} = -\psi_{\alpha}(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r)$, $\xi(0) = -\hat{z}_r(0)$ 则在初始时刻就有

$$\begin{cases} \dot{e}_j = e_{j+1} - h_j|e_1|^{\mu_j} \text{sgn } e_1, \quad j = 1, \dots, r-1. \\ \dot{e}_r = -h_r|e_1|^{\mu_r} \text{sgn } e_1, \end{cases} \quad (21)$$

同时可保证在初始状态系统进入新的滑动模式

$$\begin{cases} \dot{z}_j = z_{j+1}, \\ \dot{z}_r = \psi_\alpha(z_1 + e_1, \dots, z_r + e_r), \end{cases} j=1, \dots, r-1. \quad (22)$$

考虑坐标系统 $(z_1, z_2, \dots, z_r, e_1, e_2, \dots, e_r)$, 则系统闭环方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{z}_j = z_{j+1}, \\ \dot{z}_r = \psi_\alpha(z_1 + e_1, \dots, z_r + e_r), \\ \dot{e}_j = e_{j+1} - h_j |e_1|^{\mu_j} \operatorname{sgn} e_1, \\ \dot{e}_r = -h_r |e_1|^{\mu_r} \operatorname{sgn} e_1, \end{cases} j=1, \dots, r-1. \quad (23)$$

如果误差动态方程(21)的零解是有限时间 T_1 稳定的, 那么就有

$$\psi_\alpha(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r) = \psi_\alpha(z_1, \dots, z_r), t \geq T_1. \quad (24)$$

下面进行理想控制项 $\psi_\alpha(z_1, z_2, \dots, z_r)$ 的设计, 并证明系统的稳定性.

选取权系数 $(\kappa_1, \dots, \kappa_r) \in \mathbb{R}_+^r$, 其中 $\mathbb{R}_+^r$ 表示 r 维正实数空间, $\kappa_i = (i-1)\mu - i + 2, 1 \leq i \leq r, 0 < \mu < 1$. 如果选取

$$\psi_\alpha = -k_1 \operatorname{sgn} z_1 |z_1|^{\alpha_1} - \dots - k_r \operatorname{sgn} z_r |z_r|^{\alpha_r}, \quad (25)$$

其中 $\alpha_i = \frac{\kappa_i + \mu - 1}{\kappa_i}, k_1, k_2, \dots, k_r > 0$, 使得多项式 $s^r + k_r s^{r-1} + \dots + k_2 s + k_1$ 是Hurwitz的, 那么系统(9)在反馈控制 $\psi_\alpha(z_1, z_2, \dots, z_r)$ 下关于权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \in \mathbb{R}_+^r$ 是 $\mu - 1$ 阶齐次的. 如果系统(20)中 $\mu_i = i\mu - i + 1, 1 \leq i \leq r$, 那么系统(21)关于权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \in \mathbb{R}_+^r$ 也是 $\mu - 1$ 阶齐次的.

定理 2 选取 $h_1, h_2, \dots, h_r$, 使矩阵

$$A_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(r-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(r-1) \times (r-1)} \\ \hline -h_1 & \mathbf{H} \end{array} \right]_{r \times r}$$

是Hurwitz的, 其中 $\mathbf{H} = [-h_2, \dots, -h_r]^T \in \mathbb{R}^{r-1}$. 理想控制项 v_{ideal} 满足式(25), 那么存在 $\tau \in [1 - 1/(r-1), 1)$ 有 $\mu \in (1 - \tau, 1)$, 使得:

- A) 系统(9)是全局有限时间稳定的;
- B) 观测器误差状态方程(21)全局有限时间稳定;
- C) 闭环系统(23)全局有限时间稳定.

证 首先证明A) 部分: 将式(9)简写为

$$\dot{z} = \phi(\mu, z). \quad (26)$$

构造Lyapunov函数 $V_1(z)$, 使得 $V_1(z)$ 关于权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \in \mathbb{R}_+^r$ 也是齐次的. 令

$$V_1(z) = \pi(z)^T P_1 \pi(z), \quad (27)$$

其中

$$\pi(z) = [|z_1|^{1/\kappa_1} \operatorname{sgn} z_1 \dots |z_r|^{1/\kappa_r} \operatorname{sgn} z_r]^T. \quad (28)$$

P_1 满足如下Lyapunov方程

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I, \quad (29)$$

其中

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(r-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(r-1) \times (r-1)} \\ \hline -k_1 & \mathbf{K} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{K} = [-k_2 \dots -k_r]^T \in \mathbb{R}^{r-1}.$$

$V_1(z)$ 满足 $\forall e \neq 0, V_1(z) > 0, z = 0, V_1(z) = 0$.

事实上

$$\pi(\lambda^{\kappa_1} z_1, \lambda^{\kappa_2} z_2, \dots, \lambda^{\kappa_r} z_r) = \lambda \pi(z_1, z_2, \dots, z_r),$$

则

$$V_1(\lambda^{\kappa_1} z_1, \lambda^{\kappa_2} z_2, \dots, \lambda^{\kappa_r} z_r) = \lambda^2 V_1(z_1, z_2, \dots, z_r). \quad (30)$$

这说明 $V_1(z)$ 关于权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \in \mathbb{R}_+^r$ 是2阶齐次的. 对式(30)两边关于每一个元素 z_i 求导, 有

$$\lambda^{\kappa_i} \frac{\partial V_1}{\partial z_i}(\lambda^{\kappa_1} z_1, \dots, \lambda^{\kappa_r} z_r) = \lambda^2 \frac{\partial V_1}{\partial z_i}(z_1, z_2, \dots, z_r),$$

$$\forall z \neq 0, \forall \lambda > 0. \quad (31)$$

同时由于向量场 $\phi(\mu, z)$ 在权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \in \mathbb{R}_+^r$ 下是 $\mu - 1$ 阶齐次的, 即

$$\phi_i(\lambda^{\kappa_1} z_1, \dots, \lambda^{\kappa_r} z_r) = \lambda^{\mu-1+\kappa_i} \phi_i(z_1, z_2, \dots, z_r),$$

$$\forall z \neq 0, \forall \lambda > 0. \quad (32)$$

很容易得到

$$\nabla V_1(\lambda^{\kappa_1} z_1, \lambda^{\kappa_2} z_2, \dots, \lambda^{\kappa_r} z_r) \cdot \phi(\mu, \lambda^{\kappa_1} z_1, \lambda^{\kappa_2} z_2, \dots, \lambda^{\kappa_r} z_r) = \lambda^{\mu+1} \nabla V_1(z) \phi(\mu, z). \quad (33)$$

说明 $\nabla V_1(z) \phi(\mu, z)$ 是 $\mu + 1$ 阶齐次的. 考虑一个极值条件 $\mu = 1, S_1 = \{z : |z^T P_1 z| = 1\}$. 此时系统(9)变为

$$\dot{z} = A_1 z. \quad (34)$$

由于 A_1 是渐近稳定的, 则 $\nabla V_1(z) \phi(\mu, z) < 0$ 在紧集 S_1 上成立. 进一步, 由文献[16]引理1可知, 如果 $\nabla V_1(z) \phi(\mu, z)$ 是齐次的, 且在一个紧集 S_1 上, $\nabla V_1(z) \phi(\mu, z) < 0$ 成立, 那么在 $\mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ 上该不等式仍然成立. 应用Tube引理, 不等式 $\nabla V_1(z) \phi(\mu, z) < 0$ 在 $(1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_2) \times S$ 上成立, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. 因此, $\nabla V_1(z) \phi(\mu, z) < 0$ 在 $(1 - \varepsilon, 1) \times \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ 上也成立, 又由于 $\mu \in (1 - \tau, 1)$, 所以系统(9)零解在理想控制项 v_{ideal} 下是全局有限时间稳定的.

然后证明B) 部分: 将系统(21)简写为

$$\dot{e} = \Phi(\mu, e). \quad (35)$$

同样选取Lyapunov函数 $V_2(e) = \pi(e)^T P_2 \pi(e)$,

其中 P_2 满足如下Lyapunov方程:

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -I. \quad (36)$$

与A)部分证明思路一样, 首先证明 $\nabla V_2(e)\Phi(1, e) < 0$ 在紧集 $S_2 = \{e : |e^T P_2 e| = 1\}$ 上成立, 进而得到 $\nabla V_2(e)\Phi(\mu, e) < 0$ 在 $(1 - \varepsilon, 1) \times \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ 上也成立, 由于系统(21)也是 $\mu - 1$ 阶齐次, 因此系统(21)的原点也是全局有限时间稳定的.

最后证明C)部分: 系统(9)与(21)的全局有限时间稳定并不能直接说明闭环系统(23)的全局有限时间稳定, 然而显然在权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r)$ 下系统(23)是 $\mu - 1$ 阶齐次的, 因此如果能够证明整个闭环系统(23)是全局渐近稳定的, 那么就可由引理1推出结论C).

选择Lyapunov函数

$$V_3(z, e) = V_1(z) + K_0 V_2(e), \quad (37)$$

其中 K_0 为一足够大正实数. 显然, $V_3(z, e)$ 在权系数 $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r)$ 下是2阶齐次的.

闭环系统(23)的 z -子系统可以表示为

$$\dot{z} = A_1 z + b\omega(z, e), \quad (38)$$

其中:

$$\begin{aligned} b &= [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T, \\ \omega(z, e) &= \psi_\alpha(z_1 + e_1, \dots, z_r + e_r) + \\ &\quad k_1 z_1 + \dots + k_r z_r, \end{aligned}$$

当 $\mu = 1$ 时, 满足 $\omega(z, 0) = 0$, $V_3(z, e)$ 退化为

$$V_3(z, e) = z^T P_1 z + K_0 e^T P_2 e. \quad (39)$$

对 $V_3(z, e)$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z, e) &= \\ &\dot{z}^T P_1 z + z^T P_1 \dot{z} + K_0 (\dot{e}^T P_2 e + e^T P_2 \dot{e}) = \\ &(A_1 z + b\omega(z, e))^T P_1 z + z^T P_1 (A_1 z + b\omega(z, e)) + \\ &K_0 ((A_2 e)^T P_2 e + e^T P_2 A_2 e) = \\ &-z^T z - K_0 e^T e + (b^T P_1 z + z^T P_1 b)\omega(z, e). \end{aligned} \quad (40)$$

考虑紧集

$$S = S_1 \cup S_2,$$

$(b^T P_1 z + z^T P_1 b)\omega(z, e)$ 在 S 上连续, 因此具有最大值 $M_0 > 0$, 而 $e^T e$ 在紧集 S_2 上可以取的最小值 $M_1 > 0$, 因此当 $K_0 > \frac{M_0}{M_1}$ 时, 可得 $\dot{V}_3(z, e) < 0$. 由文献[15]引理1和Tube引理可以得到 $\dot{V}_3(z, e) < 0$ 在 $\mu \in (1 - \tau, 1)$ 时在 $\mathbb{R}^{2r}$ 上也成立, 由此可知, 闭环系统(23)是全局渐近稳定的, 因此闭环系统(23)也

是全局有限时间稳定的.

4 仿真结果分析(Analysis of simulation results)

例1 文献[7, 9]都用同一个运动小车模型来验证他们设计的高阶滑模控制算法, 本文实例1也采用同样的小车模型, 如此便可以将本文提出的控制算法和文献[7, 9]的算法进行对比.

小车的数学模型如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \cos x_3 \\ \omega \sin x_3 \\ \omega/L \tan x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (41)$$

模型中各参数与变量的意义见参考文献[7, 9].

对小车的控制目的是使小车能够在有限的时间按照固定的轨迹 $x_{2\text{ref}} = 10 \sin(0.05x_1) + 5$ 运动. 选取系统输出函数(滑动变量)为 $\sigma(x) = x_2 - x_{2\text{ref}}$, 因此, 系统关于 σ 的相对阶为3. 滑模变量 σ 的3阶导数为 $\sigma^{(3)} = \phi(\cdot) + \gamma(\cdot)u$, 由文献[9]可知

$$|\phi| \leq 49.62, 6.38 \leq \gamma \leq 46.77,$$

即式(4)中 $C = 49.62$, $K_m = 6.38$, $K_M = 46.77$.

设系统的初始状态为 $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 控制器设计参数选为: $k_1 = 1$, $k_2 = 1.5$, $k_3 = 1.5$, $\beta = 10$. 有限时间收敛观测器参数 $\mu = 0.7$, $h_1 = 30$, $h_2 = 300$, $h_3 = 1000$. 则观测器误差动态方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - 30|e_1|^{0.7} \text{sgn } e_1, \\ \dot{e}_2 = e_3 - 300|e_1|^{0.4} \text{sgn } e_1, \\ \dot{e}_3 = -1000|e_1|^{0.1} \text{sgn } e_1. \end{cases} \quad (42)$$

误差 $e_1(t)$ 在有限时间 T_1 后收敛到原点(见图1).

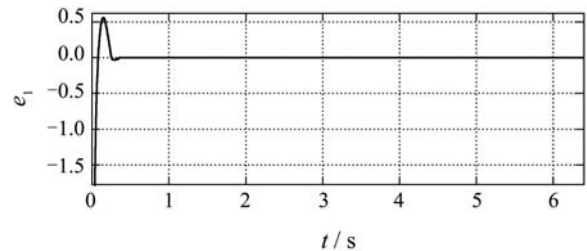


图1 z_1 观测值误差

Fig. 1 The observer error of z_1

图1表明, 采用有限时间收敛的观测器, 可以保证观测值误差在很短时间($T_1 \leq 0.5$ s)内趋向于零, 实现了高阶滑模的输出反馈控制, 与文献[7]中的微分器比, 算法更为简单. 图2,3显示, 本文提出的高阶滑模控制设计与文献[7, 9]中一样, 能够保证很好的跟踪效果, 且也是有限时间收敛的, 速度在15 s左右.

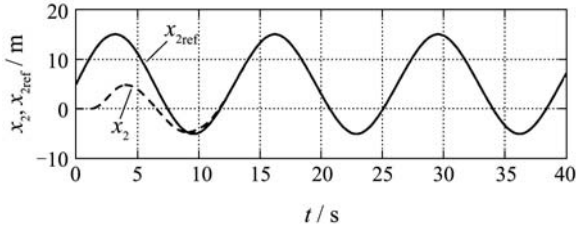


图2 轨迹跟踪曲线

Fig. 2 The trajectory of tracking

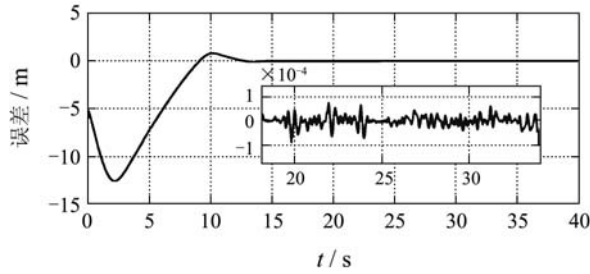


图3 跟踪误差曲线

Fig. 3 The trajectory of tracking error

另外,图4显示控制量输出切换频率仍然很高,这是因为本文为了与文献[7, 9]进行对比,对一个相对阶为三的系统只设计了一个三阶滑模控制器,不连续控制量仍然直接出现在控制量上.如果设计一个四阶或更高阶的滑模控制器,按照本文的设计方法,不连续控制量将会出现在最终控制输出量的导数或高阶导数上,最终的控制量将会很平滑,这也是高阶滑模控制减小系统抖振的核心思想.实例2将说明这一问题.

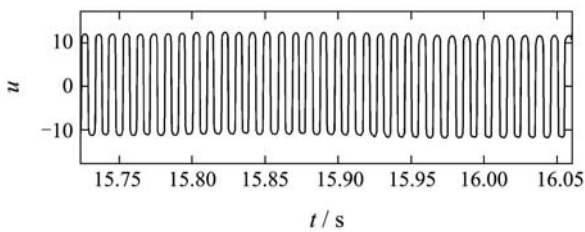


图4 控制输入

Fig. 4 Control input

例2 考虑一个二阶倒立摆模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u. \end{cases} \quad (43)$$

其中:

$$f(x) = \frac{g \sin x_1 - m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1 / (m_c + m)}{l[4/3 - m \cos^2 x_1 / (m_c + m)]},$$

$$g(x) = \frac{\cos x_1 / (m_c + m)}{l[4/3 - m \cos^2 x_1 / (m_c + m)]},$$

x_1 和 x_2 分别为摆角和摆速; $g = 9.8 \text{ m/s}^2$; $m_c = 1 \text{ kg}$ 为小车质量; $m = 0.1 \text{ kg}$ 为摆杆质量; $l = 0.5 \text{ m}$ 为

摆长的一半; u 为控制输入. 对该系统设计三阶滑模控制器,令 $x_3 = u$,新的控制量 $v = \dot{u}$. 选取滑模变量 $\sigma = x_1 - x_d$,其中参考输入 $x_d = \sin t$. 倒立摆系统的跟踪控制转化为系统 $\sigma^{(3)} = \phi(\cdot) + \gamma(\cdot)v$ 的有限时间稳定问题. 设系统的初始状态为 $x(0) = [0 \ 0]^T$,控制器设计参数选为: $k_1 = 1, k_2 = 1.5, k_3 = 1.5, \beta = 30$,有限时间观测器同式(37). 仿真结果如图5, 6所示.

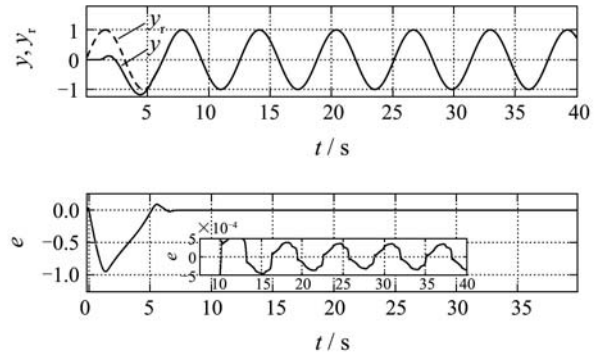


图5 跟踪及跟踪误差曲线

Fig. 5 Trajectory of tracking and tracking error

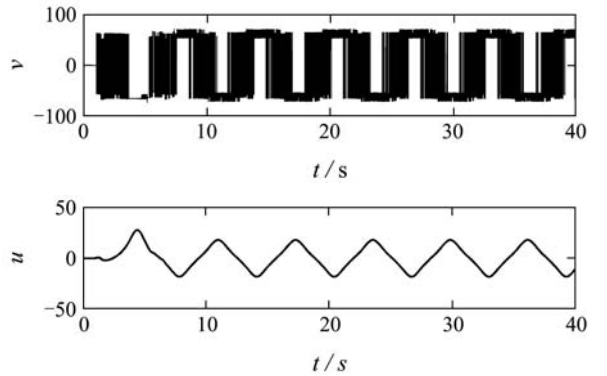
图6 虚拟控制 v 与真实控制量 u Fig. 6 Virtual control v and real control u

图5说明系统在有限时间内稳定到零点,系统的抖振也明显减小. 图6中的虚拟控制 v 与真实控制量 u 曲线表明, 对一个相对阶为二的系统采用三阶滑模控制后,不连续量出现在虚拟控制上,而系统的真实控制量在时间上本质连续,非常有效地减小了系统的抖振.

5 结论(Conclusion)

本文提出了一种新的针对不确定非线性SISO系统的高阶滑模控制器设计方法. 该方法将对一个一般形式的非线性系统的控制问题,转化为一个具有积分串联结构的非线性仿射系统的有限时间稳定问题;利用有限时间收敛观测器实现了系统的输出反

馈控制. 积分滑模控制的引入, 使得系统在初始状态就具备很强的鲁棒性.

参考文献(References):

- [1] UTKIN V I. Variable structure systems with sliding modes[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(2): 212 – 222.
- [2] UTKIN V I, GULDNER J, SHI J. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*[M]. London: Taylor & Francis, 1999.
- [3] XIA Y Q, CHEN J, LIU G P, et al. Robust adaptive sliding mode control for uncertain time-delay systems[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009, 23(9): 863 – 881.
- [4] UTKIN V I, LEE H. The chattering analysis[C] // *The 12th International Power Electronics and Motion Control Conference*. Portoroz: IEEE, 2006: 2014 – 2019.
- [5] SLOTINE J J. Sliding controller design for non-linear systems[J]. *International Journal of Control*, 1984, 40(2): 421 – 434.
- [6] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究进展[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(3): 407 – 418.
(LIU Jinkun, SUN Fuchun, Research and development on theory and algorithms of sliding mode control[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 407 – 418.)
- [7] ARIE L. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1812 – 1816.
- [8] ARIE L. Universal single-input-single-output(SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1447 – 1451.
- [9] SALAH L, FRANK P, ALAIN G. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode[J]. *Automatica*, 2007, 43(3): 531 – 537.
- [10] FRANK P, SALAH L, ALAIN G. Robust control of uncertain non-linear systems: a new higher order sliding mode based solution[C] // *American Control Conference*. Minneapolis: IEEE, 2006.
- [11] 晁红敏, 胡跃明, 吴忻生. 高阶滑模控制在非完整移动机器人鲁棒输出跟踪中的应用[J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(2): 253 – 257.
(CHAO Hongmin, HU Yueming, WU Xinsheng. Robust output tracking of nonholonomic mobile robots[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 253 – 257.)
- [12] WILFRID P, THIERRY F, EMMANUEL M. Finite-time observer: application to secure communication[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(1): 356 – 360.
- [13] BHAT, BERNSTEIN D. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [14] SANJAY P, BHAT, DENNIS S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2005, 17(2): 101 – 127.
- [15] UTKIN V I, SHI J. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty[C] // *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control CDC'96*. Kobe, Japan: IEEE, 1996, 4: 4591 – 4596.
- [16] ROSIER L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field[J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(4): 467 – 473.

作者简介:

陈杰 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统鲁棒自适应控制、智能控制、复杂系统、多目标优化与决策等, E-mail: chenjie@bit.edu.cn;

李志平 (1984—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为不确定非线性系统自适应鲁棒控制、神经网络自适应控制、伺服系统控制等, E-mail: dynebit@yahoo.com.cn;

张国柱 (1984—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为自适应鲁棒控制、伺服系统控制、多模型控制等, E-mail: zhangguozhu@bit.edu.cn.