文章编号:1000-8152(2010)01-0107-04

基于自适应同步的二部图复杂动力网络的权值识别

贾贞,汪贺,王俊,李勇

(桂林理工大学理学院,广西桂林 541004)

摘要:本文给出了二部图复杂动力网络的数学模型及其权值识别方法.运用自适应反馈控制技术,通过构造驱动一响应结构的同步网络,设计了网络权值识别控制器.应用Lyapunov稳定性理论及LaSalle不变集原理从理论上证明了结论,并通过数值仿真算例验证了所给方法的有效性.

关键词: 二部图; 复杂动力网络; 权值识别 中图分类号: O231 文献标识码: A

The weighted identification of a bipartite-graph complex dynamical network based on adaptive synchronization

JIA Zhen, WANG He, WANG Jun, LI Yong

(College of Science, Guilin University of Technology, Guilin Guangxi 541004, China)

Abstract: This article provides a bipartite-graph complex dynamical network model and its weighted identification method. Based on the adaptive feedback technology, we design controllers to identify the weights of the network by constructing synchronous networks in the drive-response framework. The conclusion is proved by Lyapunov stability and LaSalle's invariance principle. Numerical simulations are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method. **Key words:** bipartite-graph; complex dynamical network; weighted identification

1 引言(Introduction)

1998 年Watts 和Strogatz 在Nature 上首先提出了 小世界网络模型^[1]. 1999 年Barabasi和Albert在Science上提出了复杂网络的无标度特性^[2],这两项目 开创性研究成果为复杂网络的研究打开了新的局 面,并掀起了复杂网络的研究热潮.近年来,复杂动 力网络也受到不同学科的广泛关注,已有许多文献 针对复杂动力网络的控制和同步问题展开了广泛 而深入的研究^[3~9], 但多数文献都是针对一些具有 典型拓扑结构的网络模型如SW网络模型、BA 网络 模型、环状或链状网络模型等展开研究的[6~9]. 然 而许多现实网络的拓扑结构是不确定的甚至是未知 的,而网络的拓朴结构直接影响网络的同步能力,因 此网络的拓扑结构的研究对于网络的控制和同步研 究具有十分重要意义. 文献[10]探讨了一般复杂动 力网络的拓朴结构的识别方法,但是,对于某些具有 特殊结构的网络,如本文提出的二部图网络,如何利 用网络自身的结构特点设计出更适当和有效控制方 法,是一个非常值得深入探讨的问题.

所谓二部图是由两组不同节点和连接两组不同 节点的边构成的图(每组节点内部没有相互的连接). 很多现实网络可以归结为二部图,当考虑两个团体 之间的外部作用而不考虑各团体的内部联系时,这 种关系就可以用二部图表示. 例如在人类致病基因 的研究中,如果把人类的各种疾病看作一组节点,把 各种致病基因看作另一组节点,那么人类疾病与致 病基因通过已知的致病基因联系成的网络就是一个 二部图网络[11].因此,二部图网络的研究具有广泛 现实意义和应用价值.本文建立了一类含权的二部 图复杂动力网络的数学模型,并对这种网络的拓扑 结构的识别问题展开研究.应用自适应反馈技术,通 过构造驱动--响应结构的同步网络,设计出网络的权 值跟踪器,通过对网络状态变量时间序列的监测来 识别网络的边权值. 文章不仅给出了严格的理论证 明,数值仿真结果也验证了方法的有效性.

2 数学模型(Mathematical model)

考虑由两组不同节点构成的二部图复杂动力网络. 假设一组节点具有混沌动力学方程*x* = *Ax*+

收稿日期: 2008-12-27; 收修改稿日期: 2009-05-29.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70771084);广西自然科学基金资助项目(桂科基0991244);广西教育厅科研基金资助项目 (200807MS043).

f(x), 含s个节点; 另一组节点具有混沌动力学方程 $\dot{y} = By + g(y)$, 含t个节点. 其中 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 是系统的 状态变量, $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是光滑的非线性函数. 整 个网络共由s+t个节点构成,两组节点间通过双向 线性耦合连接,网络的数学模型为

$$\dot{x}_i = Ax_i + f(x_i) + \sum_{j=1}^t p_{ij} \Gamma(y_j - x_i), i = 1, \cdots, s, (1a)$$

$$\dot{y}_j = By_j + g(y_j) + \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \Gamma(x_i - y_j), j = 1, \cdots, t.$$
 (1b)

 $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是常值矩阵,为网络的内部耦合矩阵. 令 $P = (p_{ii})_{s \times t}$ 为两组节点间的耦合权值矩阵,通常 是不确定的或未知的.由式(1a)和(1b)构成的网络的 外部耦合矩阵为:

$$C = \begin{bmatrix} D_1 & P \\ P^{\mathrm{T}} & D_2 \end{bmatrix} = (c_{ij})_{(s+t)\times(s+t)}.$$

其中:

$$D_{1} = \text{diag}\{-\sum_{j=1}^{t} p_{1j}, \cdots, -\sum_{j=1}^{t} p_{sj}\} \in \mathbb{R}^{s \times s}, \\ D_{2} = \text{diag}\{-\sum_{i=1}^{s} p_{i1}, \cdots, -\sum_{i=1}^{s} p_{it}\} \in \mathbb{R}^{t \times t}.$$

上式表明,网络的外部耦合矩阵C为对称阵且其 行和为零,即

$$c_{ii} = -\sum_{j=1}^{t} p_{ij}, i \in N_1^s,$$

$$c_{s+j,s+j} = -\sum_{i=1}^{s} p_{ij}, j \in N_1^t.$$

这里记 $N_1^s = \{1, 2, \cdots, s\}.$

本文的目标是设计适当的跟踪器, 识别网络的权 值矩阵 $P = (p_{ij})_{s \times t}$ 的各元素 p_{ij} 的值.为了设计跟 踪器需要,给出如下假设:

假设1 设对于任意时变向量z₁, z₂, 分别存在 非负常数 δ_{f}, δ_{g} ,使得下式成立:

$$\|f(z_1) - f(z_2)\| \leq \delta_f \|z_1 - z_2\|,$$

$$\|g(z_1) - g(z_2)\| \leq \delta_g \|z_1 - z_2\|.$$

本文中, || · ||为向量或矩阵的2范数, 并记||A|| = $\delta_{\mathrm{A}}, \|B\| = \delta_{\mathrm{B}}.$

3 权值识别(Weight identification)

以网络(1)为驱动系统,构造响应系统网络:

$$\begin{split} \dot{\hat{x}}_{i} &= A\hat{x}_{i} + f(\hat{x}_{i}) + \sum_{j=1}^{t} \hat{p}_{ij} \Gamma(\hat{y}_{j} - \hat{x}_{i}) + u_{i}, \quad \text{(2a)} \\ \dot{\hat{y}}_{j} &= B\hat{y}_{j} + g(\hat{y}_{j}) + \sum_{i=1}^{s} \hat{p}_{ij} \Gamma(\hat{x}_{i} - \hat{y}_{j}) + u_{s+j}, \\ &i \in N_{1}^{s}, \ j \in N_{1}^{t}. \end{split}$$

其中: $\hat{x}_i, \hat{y}_i \in \mathbb{R}^n$ 为响应系统的状态变量, $u_i (i \in \mathbb{R}^n)$ N_1^{s+t})为待设计的控制输入, \hat{p}_{ij} 为 p_{ij} 的估计. 响应系 统(2)与驱动系统(1)的同步误差定义为

$$e_i = \hat{x}_i - x_i, i \in N_1^s, e_{s+j} = \hat{y}_j - y_j, j \in N_1^t,$$

并且记

$$e = (e_1^{\mathrm{T}}, \cdots, e_s^{\mathrm{T}}, e_{s+1}^{\mathrm{T}}, \cdots, e_{s+t}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$
$$\tilde{p}_{ij} = \hat{p}_{ij} - p_{ij}, \tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})_{s \times t}.$$

由网络的动力方程(1)和(2),可得误差系统的动 力方程为:

$$\dot{e_i} = Ae_i + f(\hat{x}_i) - f(x_i) + \sum_{j=1}^{t} \tilde{p}_{ij} \Gamma(\hat{y}_j - \hat{x}_i) + \sum_{j=1}^{t} p_{ij} \Gamma(e_{s+j} - e_i) + u_i,$$
(3a)

$$\begin{split} \dot{e}_{s+j} = & Be_{s+j} + g(\hat{y}_j) - g(y_j) + \sum_{i=1}^{s} \tilde{p}_{ij} \Gamma(\hat{x}_i - \hat{y}_j) + \\ & \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \Gamma(e_i - e_{s+j}) + u_{s+j}, \\ & i \in N_1^s, j \in N_1^t. \end{split}$$
(3b)

定理1 设对于网络(1)和(2)假设1成立. 分别 取控制器和自适应律如下:

$$u_i = -k_i e_i, \dot{k}_i = e_i^{\mathrm{T}} e_i, i \in N_1^{s+t}, \tag{4}$$

$$\hat{p}_{ij} = (e_{s+j} - e_i)^{\mathrm{T}} \Gamma(\hat{y}_j - \hat{x}_i), i \in N_1^s, j \in N_1^t.$$
(5)

则当 $t \to \infty$ 时,有: $e \to 0$,即网络(1)与(2)同步.若向 量组 $y_1 - x_i, y_2 - x_i, \cdots, y_t - x_i$ ($i = 1, 2, \cdots, s$)均 线性无关,则有 $\tilde{p}_{ij} \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$,即 $\hat{p}_{ij} \rightarrow p_{ij}$.

证 取Lyapunov 函数
$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s+t} e_i^{\mathrm{T}} e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \tilde{p}_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s+t} (k_i - k)^2,$$

其中k为充分大的正数.则有

$$\begin{split} \dot{V}|_{(3)\sim(5)} &= \\ \sum_{i=1}^{s} e_{i}^{\mathrm{T}} \dot{e}_{i} + \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} \dot{e}_{s+j} + \\ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \tilde{p}_{ij} \dot{\hat{p}}_{ij} + \sum_{i=1}^{s+t} (k_{i} - k) \dot{k}_{i} = \\ \sum_{i=1}^{s} e_{i}^{\mathrm{T}} A e_{i} + \sum_{i=1}^{s} e_{i}^{\mathrm{T}} [f(\hat{x}_{i}) - f(x_{i})] + \\ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} e_{i}^{\mathrm{T}} \tilde{p}_{ij} \Gamma(\hat{y}_{j} - \hat{x}_{i}) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} e_{i}^{\mathrm{T}} p_{ij} \Gamma(e_{s+j} - e_{i}) + \\ \sum_{i=1}^{s} e_{i}^{\mathrm{T}} u_{i} + \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} B e_{s+j} + \\ \\ \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} [g(\hat{y}_{j}) - g(y_{j})] + \\ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} \tilde{p}_{ij} \Gamma(\hat{x}_{i} - e_{s+j}) \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{split} \hat{y}_{j}) + &\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} p_{ij} \Gamma(e_{i} - e_{s+j}) + \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} u_{s+j} + \\ &\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \tilde{p}_{ij} \dot{\hat{p}}_{ij} + \sum_{i=1}^{s+t} (k_{i} - k) e_{i}^{\mathrm{T}} e_{i} \leqslant \\ & (\delta_{\mathrm{A}} + \delta_{\mathrm{f}}) \sum_{i=1}^{s} \|e_{i}\|^{2} + (\delta_{\mathrm{B}} + \delta_{\mathrm{g}}) \sum_{j=1}^{t} \|e_{s+j}\|^{2} + \\ &\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \tilde{p}_{ij} [e_{i}^{\mathrm{T}} \Gamma(\hat{y}_{j} - \hat{x}_{i}) + e_{s+j}^{\mathrm{T}} \Gamma(\hat{x}_{i} - \hat{y}_{j}) + \dot{\hat{p}}_{ij}] + \\ &\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} p_{ij} [e_{i}^{\mathrm{T}} \Gamma(e_{s+j} - e_{i}) + e_{s+j}^{\mathrm{T}} \Gamma(e_{i} - \\ & e_{s+j})] - \sum_{i=1}^{s+t} e_{i}^{\mathrm{T}} k_{i} e_{i} + \sum_{i=1}^{s+t} (k_{i} - k) e_{i}^{\mathrm{T}} e_{i} = \\ & (\delta_{\mathrm{A}} + \delta_{\mathrm{f}}) \sum_{i=1}^{s} e_{i}^{\mathrm{T}} e_{i} + (\delta_{\mathrm{B}} + \delta_{\mathrm{g}}) \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} e_{s+j} + \\ &\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} p_{ij} [e_{i}^{\mathrm{T}} \Gamma(e_{s+j} - e_{i}) + \\ & e_{s+j}^{\mathrm{T}} \Gamma(e_{i} - e_{s+j})] - k \sum_{i=1}^{s+t} e_{i}^{\mathrm{T}} e_{i}. \end{split}$$

 $\sum_{i=1}^{n}$

所以

$$\begin{split} &\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} p_{ij} [e_{i}^{\mathrm{T}} \Gamma(e_{s+j} - e_{i}) + e_{s+j}^{\mathrm{T}} \Gamma(e_{i} - e_{s+j})] = \\ &\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} e_{i}^{\mathrm{T}} p_{ij} \Gamma e_{s+j} + \sum_{i=1}^{s} e_{i}^{\mathrm{T}} c_{ii} \Gamma e_{i} + \\ &\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} p_{ij} \Gamma e_{i} + \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} c_{s+j,s+j} \Gamma e_{s+j} = \\ &e^{\mathrm{T}} G e = e^{\mathrm{T}} \frac{G^{\mathrm{T}} + G}{2} e. \end{split}$$

这里 $G = C \otimes \Gamma$ 为矩阵 $C \subseteq \Gamma$ 的Kronecker 积. 从

$$\begin{split} \dot{V}|_{(3)\sim(5)} \leqslant \\ (\delta_{\mathrm{A}} + \delta_{\mathrm{f}}) \sum_{i=1}^{s} e_{i}^{\mathrm{T}} e_{i} + (\delta_{\mathrm{B}} + \delta_{\mathrm{g}}) \cdot \\ \sum_{j=1}^{t} e_{s+j}^{\mathrm{T}} e_{s+j} + e^{\mathrm{T}} \frac{G^{\mathrm{T}} + G}{2} e - k \sum_{i=1}^{s+t} e_{i}^{\mathrm{T}} e_{i} \leqslant \\ (\lambda_{\max}(Q + \frac{G^{\mathrm{T}} + G}{2}) - k) e^{\mathrm{T}} e. \end{split}$$

其中

$$Q = \operatorname{diag}\{(\delta_{\mathrm{A}} + \delta_{\mathrm{f}})I_{sn}, (\delta_{\mathrm{B}} + \delta_{\mathrm{g}})I_{tn}\}.$$

取 $k \ge \lambda_{\max}(Q + \frac{G^{T} + G}{2}) + 1$,则有 $\dot{V} \le -e^{T}e$. 显然, $\dot{V} = 0$ 当且仅当e = 0. 令 $E = \{\dot{V} = 0\} = \{e = 0\}$,由动力方程(3),

$$M = \{e = 0, \dot{k} = 0, \dot{\hat{p}} = 0, \sum_{j=1}^{i} \tilde{p}_{ij} \Gamma(y_j - x_i) = 0\}$$

是包含于*E*的一个最大不变集.于是,由LaSalle不 变集原理^[12],方程(3)的从任意初始点出发的轨 道都渐近地收敛到集合*M*,从而当 $t \to \infty$ 时,有: $e \to 0.$ 由 $\sum_{j=1}^{t} \tilde{p}_{ij}\Gamma(y_j - x_i) = 0$ 及线性无关条件,可 得 $\tilde{p}_{ij} = 0.$ 从而当 $t \to \infty$ 时, $\tilde{p}_{ij} \to 0$,即 $\hat{p}_{ij} \to p_{ij}$ 成 立. 证毕.

注 1 定理1表明, 网络(1)与(2)在实现同步的同时 实现了参数的跟踪, 即 $\hat{p}_{ij} \rightarrow p_{ij}$. 自适应控制器 $\hat{p}_{ij} = (e_{s+j} - e_i)^T A(\hat{y}_j - \hat{x}_i)$ 即为权值 p_{ij} 的跟踪器, 于是我们可 以通过对同步网络(1)和(2)的状态变量演化过程的监测, 获 得权值 p_{ij} 的识别.

注2 与文献[10]的方法相比,本文方法只需用很少的跟踪器就可以实现网络权值的识别.本文所需跟踪器为*st*个,而文献[10]方法需要的跟踪器为(*s* + *t*)²个.例如, 当*s* = 5,*t* = 5, 网络的总节点数为10时,文献[10]设计的跟踪器个数为100个,而本文方法所设计的跟踪器只需25个. 由于本文方法充分考虑了网络自身的结构特点,减少了对 无权边和对称权值的跟踪,从而大大减少了跟踪器的个数, 因而能以更低的物理代价实现,大大降低了应用成本.

4 数值算例(Numerical example)

以下对一个具体的二部图网络进行数值仿真. 设网络的两组节点动力系统分别为混沌Lorenz系统 和Lü混沌系统.

混沌Lorenz系统^[13]描述为

$$\dot{x_i} = \begin{bmatrix} -10 \ 10 \ 0 \\ 28 \ -1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix}.$$

$$\dot{y_j} = \begin{bmatrix} -36\,36 & 0 \\ 0\,20 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} y_j + \begin{bmatrix} 0 \\ -y_{i1}y_{i3} \\ y_{i1}y_{i2} \end{bmatrix}.$$

这里取s = 2, t = 4,即整个网络共由6个节点构成. 取网络的内部耦合矩阵 $\Gamma = \text{diag}\{1,0,0\}$,这表明网络的两组不同节点间通过各节点动力方程的第1个状态变量线性耦合连接.

在驱动网络(1)中,网络的外部耦合矩阵为:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ 为两组节点间的耦合 权值矩阵,即网络的各边权值分别为:

> $p_{11} = 1, p_{12} = 2, p_{13} = -2, p_{14} = 0,$ $p_{21} = -3, p_{22} = 3, p_{23} = 4, p_{24} = -1.$

在响应系统(2)中, 按照定理1 的式(4)(5)取控制器. 图1是用MATLAB(R-K45)进行数值仿真的结果, 图像清楚展示了 $\hat{p}_{ij} \rightarrow p_{ij}(i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4)$, 即实现了跟踪器 \hat{p}_{ij} 对权值 p_{ij} 的跟踪.



Fig. 1 The evolution diagram of the weight-trackers \hat{p}_{ij}

5 结论(Conclusion)

本文给出了一类含权二部图复杂动力网络的权 识别方法.应用自适应反馈技术,设计了网络的边权 值跟踪器,通过对驱动-响应结构的同步网络状态变 量演化的监测来识别原网络边权值的大小.在设计 方法上,由于利用了网络自身的结构特点,与以往同 类方法相比,大大减少了跟踪器的个数,使得物理代价更小,更易于实现.本文的研究结果对于现实世界的许多二部图网络的研究具有重要的参考和应用价值.

参考文献(References):

- WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynameics of smallworld[J]. *Nature*, 1998, 393(4): 440 – 442.
- [2] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(15): 509 – 512.
- [3] LÜ J H, CHEN G R. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criterion[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 841 – 846.
- [4] 王磊, 戴华平, 孙优贤. 时变复杂动力学网络的同步控制[J]. 控制 理论与应用, 2008, 25(4): 603 – 607.
 (WANG Lei, DAI Huaping, SUN Youxian. Synchronization control of a time-varying complex dynamical network[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(4): 603 – 607.)
- [5] LÜ J H, YU X H, CHEN G R. Chaos synchronization of general complex dynamical networks[J]. *Physica A*, 2004, 334(1/2): 281 – 302.
- [6] WANF X F, CHEN G R. Synchronization in small-world dynamical networks[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(1): 187 – 192.
- [7] WANF X F, CHEN G R. Pinning control of scale-free dynamial networks[J]. *Physica A*, 2002, 310(3/4): 521 – 531.
- [8] ZHOU J, LU J A, LÜ J H. Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical network[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(4): 652 – 656.
- [9] HAN X P, LU J A. The changes on synchronizing ability of coupled networks from ring networks to chain networks[J]. Acta Science in China Series F: Information Sciences, 2007, 50(4): 615 – 624.
- [10] ZHOU J, LU J A. Topology identification of weighted complex dynamical networks[J]. *Physica A*, 2007, 386(1): 481–491.
- [11] GOH K L, MICHAEL E, VALLE D, et al. The human disease network[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2007, 104(21): 8685 – 8690.
- [12] KHALIL H K. Nonlinear Systems[M]. 3rd. New Jewsey: Prentice Hall, 2002.
- [13] LORENZ E N. Deterministic non-periodic flows[J]. Journal of Atmospheric Science, 1963, 20(2): 130 – 141.
- [14] LÜ J H, CHEN G R. A new chaotic attractor coined[J]. International Journal Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659 – 661.

作者简介:

贾 贞 (1965—), 女, 教授, 目前研究方向为混沌控制与复杂 网络, E-mail: jjjzzz0@163.com;

汪 贺 (1985—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为混沌控制 与复杂网络;

王 俊 (1984—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为混沌控制与 复杂网络;

李 勇 (1985—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为混沌控制与 复杂网络.