

# 学习增强型PID控制系统的收敛性分析

晏静文, 侯忠生

(北京交通大学 电子信息工程学院 先进控制系统研究所, 北京 100044)

**摘要:** 针对具有可重复性的一般离散时间非线性系统, 在已存在的PID控制系统的基础上, 利用重复性的特点, 给出了一种学习增强型PID控制方法, 严格证明了收敛性, 并通过快速路交通系统的仿真验证了该方法的有效性和优越性. 该方法的主要特点是, 不需要对已有的PID控制装置和系统做任何改动, 只需在PID控制器的外环加上迭代学习控制器即可, 是一种模块化的设计. 该方法实现了PID与迭代学习控制的优势互补.

**关键词:** 迭代学习控制; PID控制; 非线性离散系统; 收敛性

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

## Convergence analysis of learning-enhanced PID control system

YAN Jing-wen, HOU Zhong-sheng

(Advanced Control Systems Laboratory, School of Electronics and Information Engineering,  
Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** Using the repeatability of controlled systems, a learning-enhanced PID control method is presented for a general discrete-time nonlinear system and a rigorous convergence is proved. The effectiveness and advantage of the proposed learning-enhanced PID method is demonstrated through simulations of freeway traffic system. Since this method is of modularize design, in its implementation we need only add a complementary iterative-learning-controller(ILC) to the existing PID feedback control loop, without the need of any system reconfiguration or system redesign.

**Key words:** iterative learning control; PID control; discrete-time nonlinear system; convergence

### 1 引言(Introduction)

PID控制器是目前应用最为广泛的一种控制器, 它只需利用受控系统的输入输出数据来设计, 结构简单, 使用方便, 参数易于整定. 但在执行重复任务时, 如装配线上的机械臂、批量生产过程、化工注模等, PID控制效果则不甚理想, PID控制不能从以往的控制过程中吸取经验, 而只能根据当前的输出误差反馈决定控制输入, 控制效果不会因为重复次数的增加而改善, 不具有学习功能. 众所周知, PID控制, 理论上讲, 只能控制线性时不变的系统. 然而, 实际系统都是非线性时变系统, 有些还是结构时变的系统, 因此, 应用PID控制技术对非线性系统、时变系统、结构变化系统进行控制时控制效果就不甚理想. 针对具有重复性控制任务的系统, 为了提高其控制效果, 本文给出了一种针对离散时间系统的学习增强型PID控制方法. 该方法由前馈和反馈两部分组成, 前馈采用迭代学习控制, 反馈是已存在的PID控制. 该种控制方法不需要对已有的PID控制装置和系统做任何改动, 只需在已存在PID控制器的

外环加上迭代学习控制器即可, 充分利用已有的投资, 而且不需要工厂长时间停工就可以实现.

迭代学习控制(iterative learning control, ILC)最初由Arimoto(1984)提出, 是专门针对在有限时间内可重复的系统的一种控制方法. 迭代学习控制最新的进展可以参见文献[1~5]. 迭代学习控制又分为开环迭代学习控制和闭环迭代学习控制<sup>[4,5]</sup>. 开环迭代学习控制是用前一次迭代同时刻的控制输入和前一次迭代不同时刻的输出误差来构造本次迭代的控制输入. 闭环迭代学习控制则是基于前一次迭代同时刻的控制输入和上次及本次迭代的输出误差来构造本次迭代的控制输入. 对于开环迭代学习控制, 虽然保证收敛的充分条件已经给出, 但学习过程误差可能很大, 收敛速度一般较慢<sup>[5]</sup>, 这些现象的产生是由于该控制器的结构实质上是开环的. 闭环迭代学习控制在作用于离散时间系统时, 则往往需要高增益反馈, 对于一些含饱和执行器的系统, 高增益反馈会产生过大的控制信号, 由于饱和执行器的限幅作用, 学习控制系统的收敛速度会受到影响, 高增

益反馈从而失去意义<sup>[5]</sup>. 另外, 闭环迭代学习控制虽然能克服开环学习控制的缺点, 然而, 在工业过程实践中, 许多的实际受控对象, 已经有了基于传统反馈控制理论的实际系统和装置, 如PID等, 欲对其进行技术改造提高系统的控制品质, 势必要对原来的已经存在的系统和装置进行更换和替代, 这样就会造成不必要的浪费, 同时更为关键的是, 对实际受控过程来说, 工程师已经习惯于传统的PID控制, 他们认为PID控制的效果还可以接受, 在这种情况下, 能否进行模块化的设计, 也即能否设计出前馈和反馈模块化的“拔插式(add-on)”前馈-反馈迭代学习控制系统, 使得PID与迭代学习控制模块能优势互补地工作. PID反馈控制器主要用于实现系统镇定任务, ILC前馈控制器负责提高控制系统的品质并实现完全跟踪任务.

事实上, 关于ILC与PID反馈相结合的研究已有部分结果. 但目前大多是针对某些具体的非线性系统, 将ILC与P、PI、PD控制相结合, 并且理论上证明了收敛性<sup>[6~10]</sup>, 在实际系统也得到了应用<sup>[11~14]</sup>. 将ILC与PID的控制相结合的方法也已经存在<sup>[15]</sup>, 并将该方法用于控制永磁直线电机, 通过仿真验证了该方法的控制效果明显优于单独的PID控制, 但并没有给出严格的理论分析结果. 本文的贡献在于针对一般的离散非线性系统, 而不是某些特殊的非线性系统, 控制器采用ILC+PID的连接结构, 给出了基于时间加权模意义下的严格的收敛性证明.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下 $m$ 维输入 $m$ 维输出的离散非线性系统:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n(k+1) &= f(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \boldsymbol{\xi}(k)) + \boldsymbol{\varsigma}_n(k), \\ \mathbf{y}_n(k+1) &= g(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \boldsymbol{\omega}(k)). \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $k \in \{0, 1, \dots, K\}$ , 记为 $k \in [0, K]$ 是时间指标.  $n$ 为迭代次数.  $f(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)g(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 是适当维数的函数.  $\mathbf{x}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \mathbf{u}_n(k)$ 分别是第 $n$ 次迭代 $k$ 时刻的系统状态、输出和控制输入向量.  $\boldsymbol{\xi}(k)$ 和 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 为重复的有界外部干扰,  $\boldsymbol{\varsigma}_n(k)$ 为非重复的有界随机外部扰动, 定义 $\|\boldsymbol{\varsigma}_n(k)\| \leq b_{\varsigma}, \forall n, k \in [0, K]$ .

**假设1**  $f(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \boldsymbol{\xi}(k))$ 和 $g(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \boldsymbol{\omega}(k))$ 对 $\mathbf{x}_n(k) \in \mathbf{X}, \mathbf{u}_n(k) \in \mathbf{U}, \mathbf{y}_n(k) \in \mathbf{Y} (\forall n, k \in [0, K])$ 可导且导数连续,  $\mathbf{X}, \mathbf{U}$ 和 $\mathbf{Y}$ 为有界闭集.

**假设2** 给定期望轨迹 $\mathbf{y}_d(k) (k \in [0, K])$ , 存在一个有界的控制输入 $\mathbf{u}_d(k) (k \in [0, K])$ 使得

$$\mathbf{x}_d(k+1) = f(\mathbf{x}_d(k), \mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\xi}(k)), \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_d(k+1) = g(\mathbf{x}_d(k), \mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k)). \quad (4)$$

其中 $\mathbf{x}_d(k), k \in [0, K]$ 为与 $\mathbf{y}_d(k)$ 相对应的期望状态轨迹.

**假设3** 每次迭代的初始值满足如下条件:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_d(j) - \mathbf{x}_n(j)\| &\leq b_{x_0}, \|\mathbf{y}_d(j) - \mathbf{y}_n(j)\| \leq b_{y_0}, \\ \mathbf{u}_n^b(j) &= 0, j \leq 0, \forall n. \end{aligned}$$

针对受控系统(1)(2), 已存在的PID反馈控制律为如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^b(k) &= \mathbf{u}_n^b(k-1) + q_0 \mathbf{e}_n(k) + q_1 \mathbf{e}_n(k-1) + \\ &\quad q_2 \mathbf{e}_n(k-2), \end{aligned} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{u}_n^b$ 表示反馈部分的输入,  $q_0, q_1, q_2$ 与PID控制器的比例系数 $k_p$ 、积分时间 $T_i$ 、微分时间 $T_d$ 的关系如下:

$$\begin{aligned} q_0 &= k_p \left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s}\right), \\ q_1 &= -k_p \left(1 + 2\frac{T_d}{T_s}\right), q_2 = k_p \frac{T_d}{T_s}. \end{aligned}$$

其中 $T_s$ 是采样周期.

所设计的学习增强型PID控制系统由(1)(2), 以及如下的控制律组成:

$$\mathbf{u}_n(k) = \mathbf{u}_n^f(k) + \mathbf{u}_n^b(k), \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_n^f(k) = \mathbf{u}_{n-1}^f(k) + \beta \mathbf{e}_{n-1}(k+1), \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_n^b(k) = \mathbf{u}_n^b(k-1) + q_0 \mathbf{e}_n(k) + q_1 \mathbf{e}_n(k-1) + q_2 \mathbf{e}_n(k-2). \quad (8)$$

其中:  $\mathbf{u}_n^f$ 表示前馈部分的输入,  $\mathbf{e}_n(k) = \mathbf{y}_d(k) - \mathbf{y}_n(k)$ 表示第 $n$ 次迭代的跟踪误差,  $\beta$ 为学习增益.

学习增强型PID控制器的结构如图1所示.

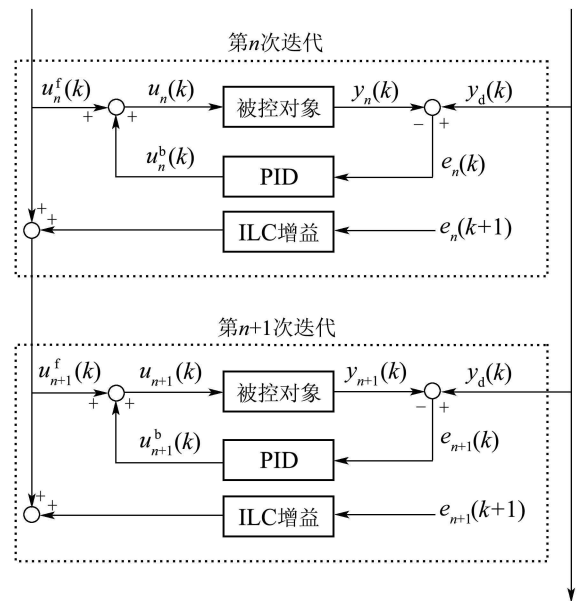


图1 学习增强型PID控制器的结构框图  
Fig. 1 Block diagram of learning enhanced PID control system

### 3 学习增强型PID控制系统的收敛性(Convergence analysis of learning enhanced PID control system)

**定理 1** 由式(1)(2)描述的系统满足假设1~3, 在控制算法(6)~(8)的作用下, 若 $\|I - \beta g_u(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| < 1$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_n(k) - \mathbf{y}_d(k)\|_\lambda = \varepsilon$ ,  $k \in [0, K]$ ,  $\varepsilon$  是一个与  $b_{x_0}$ ,  $b_{y_0}$  和  $b_\zeta$  有关的有界实数,  $\mathbf{u}_n^*(k) \in [\min\{\mathbf{u}_n(k), \mathbf{u}_d(k)\}, \max\{\mathbf{u}_n(k), \mathbf{u}_d(k)\}]$ , 当  $b_{x_0}$ ,  $b_{y_0}$  和  $b_\zeta$  均为零时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_n(k) - \mathbf{y}_d(k)\|_\lambda = 0$ .

**证** 本文中的  $\|\cdot\|$  表示无穷模, 即, 对于  $s \times t$  的矩阵  $M$ ,  $m_{i,j}$  表示其中的元素, 则

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq s} \sum_{j=1}^t |m_{i,j}|.$$

由式(2)和(4)及假设1, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n(k+1) &= \\ \mathbf{y}_d(k+1) - \mathbf{y}_n(k+1) &= \\ g(\mathbf{x}_d(k), \mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k)) - \\ g(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \boldsymbol{\omega}(k)) &= \\ g_x(\mathbf{x}_n^*(k), \mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\delta\mathbf{x}_n(k) + \\ g_u(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\delta\mathbf{u}_n(k) + \\ g_y(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n^*(k), \boldsymbol{\omega}(k))\mathbf{e}_n(k) &= \\ g_x(\mathbf{x}_n^*(k), \mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\delta\mathbf{x}_n(k) + \\ g_u(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\delta\mathbf{u}_n^f(k) - \\ g_u(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\mathbf{u}_n^b(k) + \\ g_y(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n^*(k), \boldsymbol{\omega}(k))\mathbf{e}_n(k), \end{aligned} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n^*(k) &\in [\min\{\mathbf{x}_n(k), \mathbf{x}_d(k)\}, \max\{\mathbf{x}_n(k), \mathbf{x}_d(k)\}], \\ \mathbf{y}_n^*(k) &\in [\min\{\mathbf{y}_n(k), \mathbf{y}_d(k)\}, \max\{\mathbf{y}_n(k), \mathbf{y}_d(k)\}], \\ \delta\mathbf{x}_n(k) &= \mathbf{x}_d(k) - \mathbf{x}_n(k), \delta\mathbf{u}_n(k) = \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n(k), \\ \delta\mathbf{u}_n^f(k) &= \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n^f(k), \quad k \in [0, K]. \end{aligned}$$

由式(7)(9)得

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}_n^f(k) &= \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n^f(k) = \\ \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_{n-1}^f(k) - \beta\mathbf{e}_{n-1}(k+1) &= \\ [I - \beta g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))] \times \\ \delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k) - \\ \beta[g_x(\mathbf{x}_{n-1}^*(k), \mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\delta\mathbf{x}_{n-1}(k) - \\ g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\mathbf{u}_{n-1}^b(k) + \\ g_y(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}(k), \mathbf{y}_{n-1}^*(k), \boldsymbol{\omega}(k))\mathbf{e}_{n-1}(k)]. \end{aligned}$$

(10)

在式(10)两边取模有

$$\begin{aligned} \|\delta\mathbf{u}_n^f(k)\| &\leq \\ \|I - \beta g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| \times \\ \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + |\beta|G_x\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k)\| + \\ |\beta|G_u\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| + |\beta|G_y\|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| &\leq \\ \|I - \beta g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| \times \\ \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + \varepsilon_1(\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k)\| + \\ \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\|), \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} G_x &= \\ \sup_{k \in [0, K], n \in [1, +\infty)} \|g_x(\mathbf{x}_n^*(k), \mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\|, \\ G_u &= \\ \sup_{k \in [0, K], n \in [1, +\infty)} \|g_u(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\|, \\ G_y &= \\ \sup_{k \in [0, K], n \in [1, +\infty)} \|g_y(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n^*(k), \boldsymbol{\omega}(k))\|, \\ \varepsilon_1 &= \max\{|\beta|G_x, |\beta|G_u, |\beta|G_y\}. \end{aligned}$$

利用式(1), 以及假设2, 有

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_{n-1}(k) &= \\ \mathbf{x}_d(k) - \mathbf{x}_{n-1}(k) &= \\ f(\mathbf{x}_d(k-1), \mathbf{u}_d(k-1), \mathbf{y}_d(k-1), \boldsymbol{\xi}(k-1)) - \\ f(\mathbf{x}_{n-1}(k-1), \mathbf{u}_{n-1}(k-1), \mathbf{y}_{n-1}(k-1), \\ \boldsymbol{\xi}(k-1)) - \boldsymbol{\varsigma}_n(k) &= \\ f_x(\mathbf{x}_{n-1}^*(k-1), \mathbf{u}_d(k-1), \mathbf{y}_d(k-1), \\ \boldsymbol{\xi}(k-1)) \times \delta\mathbf{x}_{n-1}(k-1) + \\ f_u(\mathbf{x}_{n-1}(k-1), \mathbf{u}_{n-1}^*(k-1), \mathbf{y}_d(k-1), \\ \boldsymbol{\xi}(k-1)) \times \delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-1) - \\ f_u(\mathbf{x}_{n-1}(k-1), \mathbf{u}_{n-1}^*(k-1), \mathbf{y}_d(k-1), \\ \boldsymbol{\xi}(k-1)) \times \mathbf{u}_{n-1}^b(k-1) + \\ f_y(\mathbf{x}_{n-1}(k-1), \mathbf{u}_{n-1}(k-1), \mathbf{y}_{n-1}^*(k-1), \\ \boldsymbol{\xi}(k-1)) \times \mathbf{e}_{n-1}(k-1) - \boldsymbol{\varsigma}_n(k), \end{aligned} \quad (12)$$

在式(12)两边取模, 有

$$\begin{aligned} \|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k)\| &\leq \\ F_x\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-1)\| + F_u\|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + \\ F_u\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + F_y\|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\| + b_\zeta, \end{aligned} \quad (13)$$

其中:

$$\begin{aligned}
F_x &= \sup_{k \in [0, K], n \in [1, +\infty)} \|f_x(\mathbf{x}_n^*(k-1), \mathbf{u}_d(k-1), \\
&\quad \mathbf{y}_d(k-1), \boldsymbol{\xi}(k-1))\|, \\
F_u &= \sup_{k \in [0, K], n \in [1, +\infty)} \|f_u(\mathbf{x}_n(k-1), \mathbf{u}_n^*(k-1), \\
&\quad \mathbf{y}_d(k-1), \boldsymbol{\xi}(k-1))\|, \\
F_y &= \sup_{k \in [0, K], n \in [1, +\infty)} \|f_y(\mathbf{x}_n(k-1), \mathbf{u}_n(k-1), \\
&\quad \mathbf{y}_n^*(k-1), \boldsymbol{\xi}(k-1))\|.
\end{aligned}$$

由式(8)和(9)分别可以得到

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| \leq \\
&\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + |q_0|\|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| + \\
&|q_1|\|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\| + |q_2|\|\mathbf{e}_{n-1}(k-2)\|, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| \leq \\
&G_x\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-1)\| + G_u\|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + \\
&G_u\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + G_y\|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\|. \quad (15)
\end{aligned}$$

将式(13)~(15)相加, 有

$$\begin{aligned}
&\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k)\| + \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| \leq \\
&F_x\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-1)\| + F_u\|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + \\
&F_u\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + F_y\|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\| + \\
&\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + |q_0|[G_x\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-1)\| + \\
&G_u\|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + G_u\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + \\
&G_y\|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\|] + |q_1|[G_x\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-2)\| + \\
&G_u\|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-2)\| + G_u\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-2)\| + \\
&G_y\|\mathbf{e}_{n-1}(k-2)\|] + |q_2|\|\mathbf{e}_{n-1}(k-2)\| + \\
&G_x\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-1)\| + G_u\|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + \\
&G_u\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + G_y\|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\| + b_\varsigma \leq \\
&M_1(\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-1)\| + \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + \\
&\|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\| + \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + \\
&\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-2)\| + \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-2)\| + \\
&\|\mathbf{e}_{n-1}(k-2)\| + \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-2)\| + b_\varsigma), \quad (16)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
M_1 &= \max_{k \in [0, K]} \{(F_x + |q_0|G_x + G_x), \\
&(F_u + 1 + |q_0|G_u + G_u), \\
&(F_y + |q_0|G_y + G_y), \\
&(F_u + |q_0|G_u + G_u), \\
&|q_1|G_x, |q_1|G_u, (|q_1|G_y + |q_2|), 1\}.
\end{aligned}$$

显然有  $M_1 > 1$ .

由式(16)及假设3可以推导出

$$\begin{aligned}
&\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k)\| + \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| \leq \\
&M_1[\sum_{j=1}^2 (\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-j)\| + \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-j)\| + \\
&\|\mathbf{e}_{n-1}(k-j)\|) + \sum_{j=1}^2 \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-j)\| + b_\varsigma] \leq \\
&M_2[\sum_{j=2}^4 (\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-j)\| + \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-j)\| + \\
&\|\mathbf{e}_{n-1}(k-j)\|) + \sum_{j=1}^4 \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-j)\| + b_\varsigma] \leq \\
&\vdots \\
&M_k[\sum_{j=k}^{2k} (\|\delta\mathbf{x}_{n-1}(k-j)\| + \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-j)\| + \\
&\|\mathbf{e}_{n-1}(k-j)\|) + \sum_{j=1}^{2k} \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-j)\| + b_\varsigma] \leq \\
&M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + \\
&M_k \sum_{j=1}^{2k} \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-j)\| + M_k b_\varsigma, \quad (17)
\end{aligned}$$

其中  $M_j$  为第  $j$  次放大后各项系数的最大值.

将式(17)代入式(11), 得

$$\begin{aligned}
&\|\delta\mathbf{u}_n^f(k)\| \leq \\
&\|I - \beta g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| \times \\
&\|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + \varepsilon_1[M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + \\
&M_k \sum_{j=1}^{2k} \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-j)\| + M_k b_\varsigma]. \quad (18)
\end{aligned}$$

在式(18)两边同乘以  $M_1^{-\lambda k}$ , 并取上确界, 则

$$\begin{aligned}
&\sup_{k \in [0, K]} M_1^{-\lambda k} \|\delta\mathbf{u}_n^f(k)\| \leq \\
&\|I - \beta g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| \times \\
&\sup_{k \in [0, K]} M_1^{-\lambda k} \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + \\
&\sup_{k \in [0, K]} M_1^{-\lambda k} \varepsilon_1 M_k \sum_{j=1}^{2k} \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-j)\| + \\
&\varepsilon_1 M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + \varepsilon_1 M_k b_\varsigma. \quad (19)
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\sup_{k \in [0, K]} \varepsilon_1 M_k M_1^{-\lambda k} \sum_{j=1}^{2k} \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-j)\| = \\
&\varepsilon_1 M_k \sup_{k \in [0, K]} \sum_{j=1}^{2k} M_1^{-\lambda(k-j)} \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k-j)\| M_1^{-\lambda j} \leq \\
&\varepsilon_1 M_k \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda \sup_{k \in [0, K]} (\sum_{j=1}^{2k} M_1^{-\lambda j}) \leq \\
&\varepsilon_1 M_k \frac{1 - M_1^{-2K\lambda}}{M_1^\lambda - 1} \|\delta\mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda. \quad (20)
\end{aligned}$$

将式(20)代入式(19), 有

$$\begin{aligned} & \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda \leq \\ & \|I - \beta g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| \times \\ & \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda + \varepsilon_1 M_k \frac{1 - M_1^{-2K\lambda}}{M_1^\lambda - 1} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda + \\ & \varepsilon_1 M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + \varepsilon_1 M_k b_\zeta = \\ & (\|I - \beta g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| + \\ & \varepsilon_1 M_k \frac{1 - M_1^{-2K\lambda}}{M_1^\lambda - 1}) \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda + \\ & \varepsilon_1 M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + \varepsilon_1 M_k b_\zeta. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(21)可知, 可以找到足够大的 $\lambda$ , 使得

$$\|I - \beta g_u(\mathbf{x}_{n-1}(k), \mathbf{u}_{n-1}^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| + \varepsilon_1 M_k \frac{1 - M_1^{-2K\lambda}}{M_1^\lambda - 1} = \rho < 1. \quad (22)$$

从而有

$$\begin{aligned} & \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda \leq \\ & \rho \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda + \varepsilon_1 M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + \\ & \varepsilon_1 M_k b_\zeta \leq \\ & \rho^n \|\delta \mathbf{u}_0^f(k)\|_\lambda + \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \times \\ & [\varepsilon_1 M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + \varepsilon_1 M_k b_\zeta], \end{aligned} \quad (23)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 式(23)可得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda \leq \\ & \frac{1}{1 - \rho} [\varepsilon_1 M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + \\ & \varepsilon_1 M_k b_\zeta] = \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (24)$$

对式(17)两边取 $\lambda$ 模, 有

$$\begin{aligned} & \|\delta \mathbf{x}_{n-1}(k)\|_\lambda + \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\|_\lambda + \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\|_\lambda \leq \\ & M_k \frac{1 - M_1^{-2K\lambda}}{M_1^\lambda - 1} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda + \\ & M_k \times (k+1) \times (b_{x_0} + b_{y_0}) + M_k b_\zeta. \end{aligned} \quad (25)$$

由式(24)(25)可以推出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_n(k)\|_\lambda = \varepsilon$ ,  $\varepsilon$ 是个大小与 $b_{x_0}, b_{y_0}, b_\zeta$ 有关的有界实数.

当 $b_{x_0}, b_{y_0}$ 和 $b_\zeta$ 均为零时, 则由式(24)可以推出

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda = 0, \text{ 从而由式 (25) 可以推出} \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_n(k)\|_\lambda = 0. \end{aligned}$$

#### 4 仿真研究(Simulation studies)

为了验证学习增强型PID控制系统的有效性, 本文将学习增强型PID控制方法应用到快速路入口匝道控制中.

快速路入口匝道控制的方法很多, 但目前应用最

广的就是PID型的入口匝道控制方法<sup>[16]</sup>. 值得指出的是, 宏观交通流模式是具有重复性的, 每天的拥堵往往发生在相同的时间相同的地点. 不同天的交通流具有非常强的重复性, 至少是每周的同一天, 如两个星期的周一. 然而, PID控制不能利用交通流的这种明显的特点, 不能从这种重复中得到经验和使控制效果得到改进. 所以, 将迭代学习控制方法引入快速路入口匝道控制中, 与现有的PID控制器结合, 形成学习增强型PID入口匝道控制器, 是很有必要的.

#### 4.1 交通流模型(Traffic flow model)

本文仿真用到的快速路交通流模型是Papageorgiou于1989年提出的<sup>[17]</sup>. 该时空离散模型将所描述的一条快速路分为多个路段, 每个路段最多有一个入口匝道和一个出口匝道. 交通流模型如下:

$$\begin{aligned} & \rho_i(k+1) = \\ & \rho_i(k) + \frac{T}{L_i} [q_{i-1}(k) - q_i(k) + r_i(k) - s_i(k)], \end{aligned} \quad (26)$$

$$q_i(k) = \rho_i(k) v_i(k), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & v_i(k+1) = \\ & v_i(k) + \frac{T}{\tau} [V(\rho_i(k)) - v_i(k)] + \\ & \frac{T}{L_i} v_i(k) [v_{i-1}(k) - v_i(k)] - \\ & \frac{\nu T}{\tau L_i} \frac{[\rho_{i+1}(k) - \rho_i(k)]}{[\rho_i(k) + \kappa]}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$V(\rho_i(k)) = v_{\text{free}} (1 - [\frac{\rho_i(k)}{\rho_{\text{jam}}}]^l)^m, \quad (29)$$

式中:  $T$ 是采样周期(h),  $k = \{0, 1, \dots, K\}$ 表示第 $k$ 个采样间隔,  $i = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示第 $i$ 个快速路路段,  $N$ 表示路段的总数. 模型变量的含义如下:  $\rho_i(k)$ 表示路段 $i$ 在第 $k$ 时段的平均密度(veh/(lane·km<sup>-1</sup>));  $v_i(k)$ 表示路段 $i$ 在第 $k$ 时段的平均速度(km/h);  $q_i(k)$ 表示第 $k$ 时段从 $i$ 到 $i+1$ 路段的流量(veh/h);  $r_i(k)$ 表示第 $k$ 时段从入口匝道进入路段 $i$ 的流量(veh/h);  $s_i(k)$ 表示第 $k$ 时段从出口匝道流出路段 $i$ 的流量(veh/h), 视为重复性的外部干扰;  $L_i$ 表示路段 $i$ 的长度(km);  $v_{\text{free}}$ 和 $\rho_{\text{jam}}$ 分别是自由流速度和单个车道的最大可能密度;  $\tau, \nu, \kappa, l, m$ 是常参数, 反映特定交通系统的道路几何特点、车辆特征、驾驶员行为等.

模型的边界条件为

$$\begin{aligned} & \rho_0(k) = q_0(k)/v_1(k), \quad v_0(k) = v_1(k), \\ & \rho_{N+1}(k) = \rho_N(k), \quad v_{N+1}(k) = v_N(k), \quad \forall k. \end{aligned}$$

定义

$$\mathbf{y}(k) = [\rho_1(k), \rho_2(k), \dots, \rho_N(k)]^T,$$

$$\mathbf{x}(k) = [v_1(k), v_2(k), \dots, v_N(k)]^T,$$

$$\mathbf{u}(k) = [r_1(k), r_2(k), \dots, r_N(k)]^T,$$

$$\boldsymbol{\omega}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_N(k)]^T.$$

交通流模型(26)~(29)可以写成如下的状态空间形式:

$$\mathbf{x}_n(k+1) = f(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{y}_n(k)), \quad (30)$$

$$\mathbf{y}_n(k+1) = g(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \boldsymbol{\omega}(k)). \quad (31)$$

其中 $f(\cdot, \cdot)$ 和 $g(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 是相应的向量值函数. 下标 $n$ 表示迭代次数, 在这里可以理解为天, 或者为不同周的同一天, 如不同周的星期一.

显然式(30)(31)描述的交通系统是包含在式(1)(2)描述的一般离散非线性系统内的, 且满足假设1~3. 对于系统(30)(31),

$$g_u(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k)) = B = \text{diag}\{T/L_1, \dots, T/L_N\},$$

所以定理1中的收敛条件

$$\|I - \beta g_u(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{u}_n^*(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\omega}(k))\| < 1$$

就可以写成 $\|I - \beta B\| < 1$ , 由于 $T$ 和 $L_i$ 都是已知常量, 所以 $B$ 也是已知常量, 可以直接求出 $\beta$ 的范围.

**注1** 因为交通流模型对于所有变量都是连续可微的, 且变量都是有界的, 所以满足假设1; 假设2要求控制任务是可达的, 是个合理的假设; 交通流的状态(速度和密度)一定是有界的, 故满足假设3.

## 4.2 控制目标(Control objective)

快速路入口匝道控制的目标是寻找合适的控制输入即入口匝道流量, 使得入口匝道所在路段的密度收敛于期望密度.

## 4.3 仿真分析(Simulation analysis)

考虑一段单车道快速路, 长度为6 km, 分为12节路段, 每段长度为0.5 km, 期望密度定为 $y_d = 30 \text{ veh}/(\text{lane} \cdot \text{km}^{-1})$  (临界密度理论值为 $36.75 \text{ veh}/(\text{lane} \cdot \text{km}^{-1})$ ). 假设进入第1路段的流量为 $1500 \text{ veh/h}$ . 各段的初始密度和平均速度见表1. 模型中的参数如下:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{jam}} &= 80 \text{ veh}/(\text{lane} \cdot \text{km}^{-1}), v_{\text{free}} = 80 \text{ km/h}, \\ l &= 1.8, m = 1.7, \kappa = 13 \text{ veh/km}, \\ \tau &= 0.01 \text{ h}, T = 0.00417 \text{ h}, \nu = 35 \text{ km}^2/\text{h}^{[12]}. \end{aligned}$$

表1 交通流模型相关初始值

Table 1 Initial values associated with the traffic model

| 路段          | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|-------------|----|----|----|----|----|----|
| $\rho_i(0)$ | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| $v_i(0)$    | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| 路段          | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| $\rho_i(0)$ | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| $v_i(0)$    | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |

仿真的路段仅在第3和第9节路段上各有一个入口匝道, 第8节路段有一个出口匝道, 交通需求和出口流量如图2所示. 入口匝道处的交通需求实际上对控制输入量起到了约束作用, 因为当前时段入口匝道的流入量不可能超过当前时段的交通需求量和已存在的排队车辆的总和, 即

$$r_i(k) \leq d_i(k) + \frac{l_i(k)}{T}, \quad i \in I_{\text{on}},$$

其中:  $l_i(k)$ 表示第 $k$ 时段在第 $i$ 路段入口匝道处存在的排队车辆数,  $d_i(k)$ 表示第 $k$ 时段在第 $i$ 路段入口匝道处的交通需求(veh/h),  $I_{\text{on}} = \{3, 9\}$ 表示存在入口匝道的路段集合. 排队车辆数是交通需求与入口匝道流量的差值的累积, 即 $l_i(k+1) = l_i(k) + T[d_i(k) - r_i(k)]$ ,  $i \in I_{\text{on}}$ . 图2中: 曲线1为路段3的入口匝道需求量, 曲线2为路段9的入口匝道需求量, 曲线3为路段8的出口匝道流量.

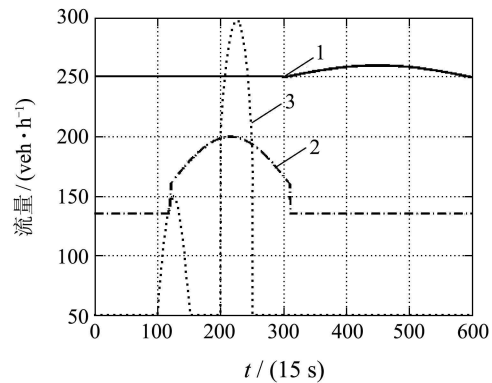


图2 第3和第9入口匝道交通需求及第8出口匝道流量  
Fig. 2 Traffic demands of on-ramps 3 and 9, and exiting flow of off-ramp 8

仿真如下3种情况: 情况1: 无入口匝道控制的情况; 情况2: PID入口匝道控制; 情况3: 学习增强型PID入口匝道控制.

### 情况1 无入口匝道控制.

在无入口匝道控制的情况下的仿真结果见图3. 从图3的仿真结果可以看出, 第9路段之后的密度越来越高, 已经大大超过了临界密度, 相应的速度也

很慢, 显然已经发生了拥堵, 并且有向上游蔓延的趋势.

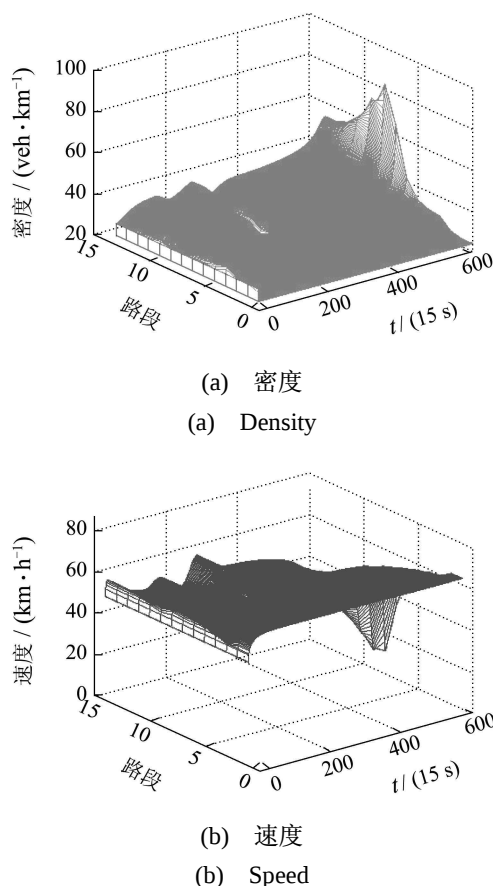


图3 无入口匝道控制的情况

Fig. 3 Simulation results without control

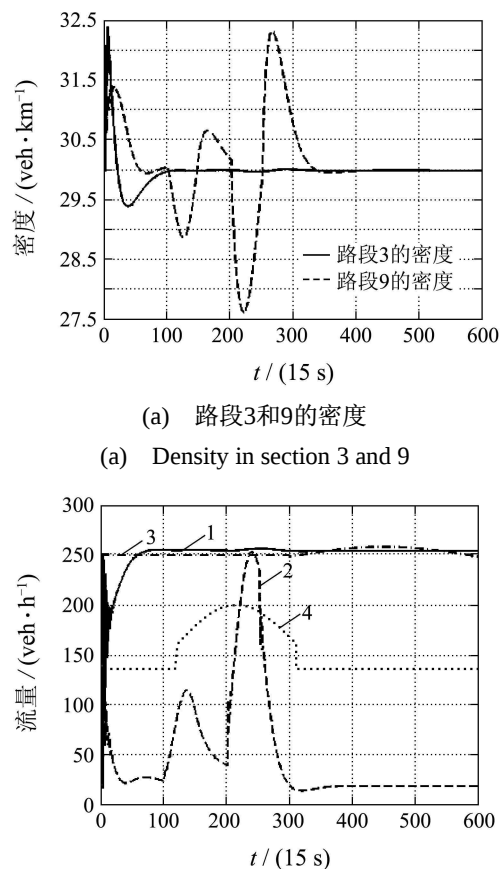
### 情况2 PID入口匝道控制.

仅用PID控制器(5)进行入口匝道控制, 参数取为  $k_p = 30$ ,  $T_i = 0.05$ ,  $T_d = 0.01$ . 控制效果如图4所示. 从图4(a)可以看到, 交通拥堵已经得到明显的缓解, 跟踪效果可以接受. 但是密度的波动较明显, 且最大密度接近  $\rho = 33 \text{ veh}/(\text{lane} \cdot \text{km}^{-1})$ , 已经明显高出期望密度. 图4(b)中: 曲线1为路段3的入口匝道流量, 曲线2为路段9的入口匝道流量, 曲线3为路段3的入口匝道需求量, 曲线4为路段9的入口匝道需求量.

### 情况3 学习增强型PID入口匝道控制.

在第1次迭代时采用原有的PID控制器, 从第2次迭代开始, 不改变PID控制器的任何参数, 直接加上ILC控制器, 迭代学习增益  $\beta = 50$ , 反馈PID控制器与前馈ILC控制器共同工作. 图5所示为迭代40次之后的效果. 图5(a)显示, 在迭代了40次后, 路段3和9的密度几乎都实现了完全跟踪. 图5(c)是每次迭代的误差均方差, 可以看到, 由于第2次迭代时加入了ILC控制器, 误差明显比第1次迭代要

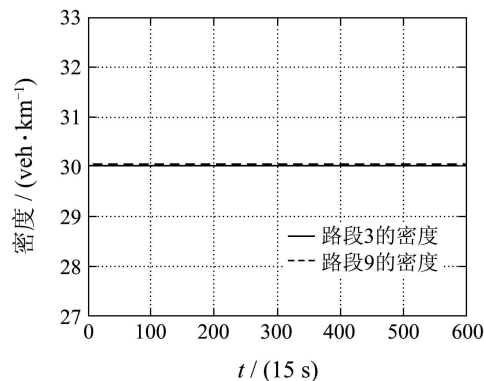
小, 并且, 在ILC控制器的作用下, 随着迭代次数的增加, 误差逐次减小, 在第35次迭代后减小到几乎为零. 这里误差均方差的定义为  $MSE_n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (y_d(k) - y_n(k))^2$ . 图5(b)中: 曲线1为路段3的入口匝道流量, 曲线2为路段9的入口匝道流量, 曲线3为路段3的入口匝道需求量, 曲线4为路段9的入口匝道需求量.



(b) 路段3和9的入口匝道需求量及流入量  
(b) Traffic demands and entering flows of on-ramps 3 and 9

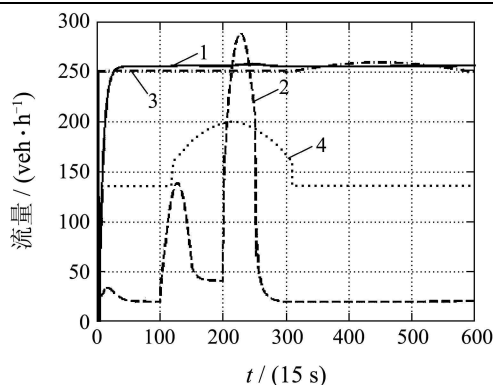
图4 PID入口匝道控制的情况

Fig. 4 Simulation results with PID ramp metering

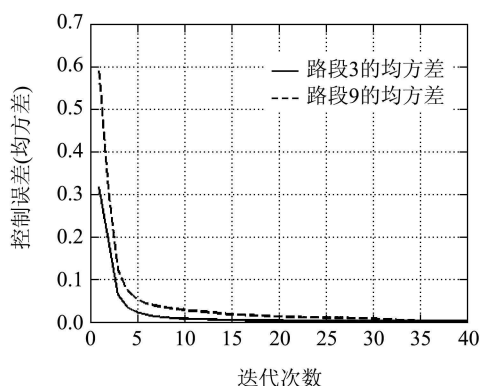


(a) 第40次迭代时路段3和9的密度

(a) Density in section 3 and 9 in the 40th iteration



(b) 第40次迭代时路段3和9的入口匝道需求量及流入量  
(b) Traffic demands and entering flows of on-ramps 3 and 9 in the 40th iteration



(c) 每次迭代的误差均方差  
(c) Mean square error vs. iterations

图5 学习增强型PID入口匝道控制仿真结果

Fig. 5 Simulation results with learning enhanced PID ramp metering

## 5 结论(Conclusion)

本文针对一般的离散非线性系统,提出了学习增强型PID控制方法,将ILC控制与PID控制进行模块化设计形成前馈-反馈控制器,并给出了严格的收敛性分析.该控制方法综合了ILC和PID的优点,并且前馈和反馈可独立工作,优势互补.主要优点是ILC的加入能够提高已存在的PID控制系统的控制品质,且不需要对原有的控制器做任何改动.通过在快速路入口匝道控制中的应用,验证了该方法的有效性和优越性,说明了该方法有较大的实际应用价值.

## 参考文献(References):

- [1] 许建新, 侯忠生. 学习控制的现状与展望[J]. 自动化学报, 2005, 31(6): 943–955.  
(XU Jianxin, HOU Zhongsheng. On learning control: the state of the art and perspective[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(6): 943–955.)
- [2] XU J X. Recent advances in iterative learning control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(1): 132–142.
- [3] BRISTOW D A, THARAYIL M, ALLEYNE A G. A survey of iterative learning control[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, 26(3): 96–114.
- [4] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.  
(SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999.)
- [5] XU J X, TAN Y. *Linear and Nonlinear Iterative Learning Control*[M]. Berlin: Springer, 2003.
- [6] 虞忠伟, 陈辉堂, 王月娟. 基于反馈控制的迭代学习控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(5): 785–791.  
(YU Zhongwei, CHEN Huitang, WANG Yuejuan. Iterative learning controller design based on feedback control[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(5): 785–791.)
- [7] 皮道映, 孙优贤. 离散非线性时变系统开闭环PI型迭代学习控制律及其收敛性[J]. 自动化学报, 1998, 124(15): 636–639.  
(PI Daoying, SUN Youxian. An open-closed-loop PI-type iterative learning control scheme for discrete nonlinear time-varying systems and its convergence[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 124(15): 636–639.)
- [8] 皮道映, 孙优贤. 非线性时变系统开闭环P型迭代学习控制的收敛性[J]. 自动化学报, 1999, 125(13): 351–354.  
(PI Daoying, SUN Youxian. The convergence of iterative learning control with open-closed-loop P-type scheme for nonlinear time-varying systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 125(13): 351–354.)
- [9] FENG Z J, ZHANG Z J, PI D Y. Open-closed-loop PD-type iterative learning controller for nonlinear systems and its convergence[C] // *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Hangzhou, China: IEEE, 2004: 1241–1245.
- [10] HOU Z S, XU J X. A new feedback-feedforward configuration for the iterative learning control of a class of discrete-time systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(3): 323–326.
- [11] TAN K K, TANG J C. Learning-enhanced PI control of ram velocity in injection molding machines[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2002, 15(1): 65–72.
- [12] HOU Z S, XU J X, YAN J W. An iterative learning approach for density control of freeway traffic flow via ramp metering[J]. *Transportation Research Part C*, 2008, 16(1): 71–97.
- [13] XU J X, PANDA S K, PAN Y J, et al. A modular control scheme for PMSM speed control with pulsating torque minimization[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2004, 51(3): 526–536.
- [14] XU J X, LEE T H, TAN Y. Enhancing trajectory tracking for a class of process control problems using iterative learning[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2002, 15(1): 53–64.
- [15] LEE T H, TAN K K, LIM S Y, et al. Iterative learning control of permanent magnet linear motor with relay automatic tuning[J]. *Mechatronics*, 2000, 10(1/2): 169–190.
- [16] PAPAGEORGIOU M, HADJ-SALEM H, BLOSSEVILLE J M. ALINEA: a local feedback control law for on-ramp metering[J]. *Transportation Research Record*, 1991, 1320(1): 58–64.
- [17] PAPAGEORGIOU M, BLOSSEVILLE J M, HADJ-SALEM H. Macroscopic modeling of traffic flow on the Boulevard Peripherique in Paris[J]. *Transportation Research Part B*, 1989, 23(1): 29–47.

## 作者简介:

晏静文 (1981—), 女, 博士研究生, 研究方向为学习控制、交通系统, E-mail: yanjingwen@gmail.com;

侯忠生 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 长期从事非线性系统控制、学习控制、无模型自适应控制、数据驱动控制、交通系统、数据挖掘等方面的研究, E-mail: zhshhou@bjtu.edu.cn.