

一类不确定系统的神经网络 L_2 -增益鲁棒控制

陈 维^{1,2}, 王耀南¹, 许海霞^{1,2},

(1. 湖南大学 电气与信息工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 湘潭大学 信息工程学院, 湖南 湘潭 411105)

摘要: 对于一类具有三角结构的单输入单输出的不确定非线性系统, 用反步法(backstepping)和动态面控制方法(dynamic surface control technique)设计了一种使用神经网络补偿未知非线性的 L_2 -增益鲁棒控制器. 控制器设计中没有直接解HJI(Hamilton-Jacobi-Isaac)不等式. 合理的选择了 L_2 -增益性能指标, 将被控系统各个状态变量的跟踪误差和神经网络各权值的跟踪误差看作整个控制系统的各个状态变量, 并用Lyapunov定理和HJI不等式证明了使用提出的控制器后, 这些状态变量具有小于等于事先规定的正实数 γ 的 L_2 -增益. 当系统的扰动信号为零向量时, 提出的控制器在原点是大范围渐近稳定的. 仿真研究结果表明所提出的控制器具有很好的跟踪性能和很强的鲁棒性.

关键词: L_2 -增益鲁棒控制; 非线性系统; 反步法; 动态面控制方法; 神经网络

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

The neural network L-two-gain robust control for a class of uncertain systems

CHEN Wei^{1,2}, WANG Yao-nan¹, XU Hai-xia^{1,2}

(1. Electrical and information engineering college, Hunan University, Changsha Hunan 410082, China;

2. Information engineering college, Xiangtan University, Xiangtan Hunan 411105, China)

Abstract: For a class of uncertain SISO(single-input-single-output) nonlinear systems with triangle structure, the neural network L-two-gain robust controllers are designed using backstepping and dynamic surface control technique, instead of solving the HJI(Hamilton-Jacobi-Isaac) inequality directly. A reasonable performance indicator of L-two-gain is chosen. The tracking errors of the states of the controlled system and the weights of the neural network are taken as the state variables of the whole control system. The Lyapunov theory and HJI inequality are adopted to prove that the control system has the L-two-gain which is less than or equal to the prescribed positive number γ . When the disturbance signal is a zero vector, the proposed controllers are proved to be large-scale asymptotically stable at the origin. The simulation results indicate that the proposed approach has desirable tracking performance and strong robustness.

Key words: L-two-gain robust control; nonlinear systems; backstepping; dynamic surface control technique; neural networks

1 引言(Introduction)

对非线性系统的神经网络鲁棒控制, 近年来已经提出了一些方法: 对双关节机械手提出了用多层BP神经网络来抵消不确定性的方法^[1]. 对移动机器人提出了基于反步法的神经网络控制方法^[2]. 提出了基于投影算法的神经网络控制方法和模糊神经网络控制方法^[3~5]. 提出了能将状态变量的跟踪误差限制在事先规定的范围内的方法^[6]. 这些方法都对非线性系统的控制有一定的借鉴作用, 但是对于一类如式(1)所示的具有三角结构的不确定仿射非线性系统的控制问题, 这些方法还有待改进. 现在这方面也已经提出了一些方法: 针对一类控制量系数

为常数的三角结构不确定仿射非线性系统提出的自适应 L_2 -增益鲁棒控制方法^[7]很有效. 提出的基于反步法的神经网络鲁棒自适应控制^[8~10]有很强的鲁棒性和很好的跟踪性能.

上述方法有这样一些问题: 1) 有些文献^[1]用的神经网络是普通的多层BP神经网络, 收敛速度比RBF(radial basis function)神经网络慢, 学习算法也更复杂; 2) 有些文献^[3,4]用的神经网络学习算法为投影算法, 在权值范数达到上限后不能跟踪理想权值; 3) 有些方法^[7]用的是普通的鲁棒自适应方法, 没有用神经网络, 需要线性形式的不确定参数, 限制了它的使用范围; 4) 有些文献对式(1)中各控制量的系数

函数 $\hat{g}_i = 0$ 时没有处理方法^[1~4,7](见式(1)); 5) 有些文献中的神经网络方法对 g_i 和 $|\dot{g}_i|$ 都要求有确定的上下界限^[9]. 这些问题在本文中得到了改善. 本文应用RBF神经网络逼近不确定函数, 这样就将被控对象中任意形式的不确定连续函数转化为线性形式的不确定连续函数. 在神经网络算法方面: 提出了一种改进的 δ -修正算法, 确保各个状态变量和神经网络各权值都有界; 用神经网络权值的放大因子, 减少了状态变量的跟踪误差范数. 用一种特殊形式的控制律避免了 $\hat{g}_i = 0$ 时造成的奇异情况. 本文提出的控制器只需要对 g_i 设定上下限, 不需要对 $|\dot{g}_i|$ 设定上限或下限. 另外, 应用反步法和 L_2 -增益理论设计了控制器; 应用动态面控制法可避免项的爆炸(terms explosion); 恰当的应用Lyapunov定理证明了控制系统的稳定性并且避免了直接解HJI不等式.

本文针对的系统为SISO的三角结构不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_i) + g_i(x_1, \dots, x_i)x_{i+1}, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u. \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ 为式(1)的状态变量, $u \in \mathbb{R}$ 为式(1)的输入变量, $y \in \mathbb{R}$ 为式(1)的输出变量, $f_i(x_1, \dots, x_i)$ (后面用 f_i 表示)和 $g_i(x_1, \dots, x_i)$ (后面用 g_i 表示)为连续的未知非线性函数, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. n 为式(1)所示系统的阶次.

2 控制器的设计和稳定性分析(Design of the controllers and analysis of the stability)

对于一个非线性系统, 要设计的神经网络 L_2 -增益鲁棒控制器应满足条件^[8]: 1) 包含能在线学习的神经网络; 2) 当系统的扰动信号不为零向量时, 使以被控对象状态变量跟踪误差及神经网络权值与其理想值的差为状态变量的整个控制系统具有小于等于 γ 的 L_2 -增益; 3) 当系统的扰动信号为零向量时, 使整个控制系统在原点大范围渐近稳定.

本文应用反步法设计控制器. 这种方法实际上是一种多闭环控制系统设计方法, 从最外面的闭环设计起, 后面每一步设计里面的一个闭环, 直到设计好最内部的一个闭环为止. 每一步设计都基于一个选定的Lyapunov函数进行.

本文的控制器设计思路是: 用反步法设计各个

闭环的控制器. 首先, 每个未知非线性函数 f_i 和 g_i 都分别用一个在线学习的RBF神经网络逼近, 并在每一步所选取的Lyapunov函数中抵消实际存在的 f_i 和 g_i 函数, 用 $k_i e_i$ 项使系统稳定. 其次, 用鲁棒项 $\bar{v}_i$ (其中 $\bar{v}_1 = 0$)抵消 $g_{i-1}e_{i-1}e_i$ 项的干扰作用, 并将其与 $k_i e_i$ 项、神经网络逼近函数相加与该步对应的状态空间变量参考量的导数相减做控制器的主要部分. 再次, 用 $\frac{\hat{g}_i}{\hat{g}_i^2 + \delta_i}$ 做为控制器主要部分的系数函数, 而不用常用的 $\frac{1}{\hat{g}_i}$ 来抵消 g_i 的作用, 其中 δ_i 为小的正的常数. 这样, $\hat{g}_i$ 为零时就不会出现分母为零的奇异情况^[6]. 最后, 每一步设计中用单独的鲁棒项 v_i 抵消系统的第 i 个Lyapunov函数分析中的冗余项造成的干扰作用, 每个闭环中的控制器为 v_i 与前面3点所组成的控制函数相加得到, 其中 $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

2.1 控制器的设计(Design of the controllers)

假设 1 $0 < a_i \leq g_i \leq b_i, \forall [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, 其中: $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

假设 2 RBF神经网络的逼近误差是未知且有界的连续函数.

假设 3 RBF神经网络的理想权值是未知且有界的常数向量.

本文用“ $\hat{\cdot}$ ”表示函数的估计值, 用上标“ $*$ ”表示神经网络的理想权值.

Step 1 由式(1)可得第1个子系统:

$$\dot{x}_1 = f_1 + g_1 x_2. \quad (2)$$

式(2)等号两边同时减去 x_1 的参考信号的导数 $\dot{x}_{1d}$ 可得

$$\dot{e}_1 = f_1 - \dot{x}_{1d} + g_1 x_2, \quad (3)$$

其中: $e_1 = x_1 - x_{1d}$, x_{1d} 为 x_1 的参考信号.

由式(3)可得

$$\dot{e}_1 = f_1 - \dot{x}_{1d} + g_1 e_2 + g_1 u_1, \quad (4)$$

其中: $e_2 = x_2 - x_{2d}$, $u_1 = x_{2d}$, x_{2d} 为 x_2 的参考信号.

选取Lyapunov函数:

$$V_1 = \frac{1}{2}(e_1^2 + \tilde{w}_{f_1}^T \Gamma_{f_1}^{-1} \tilde{w}_{f_1} + \tilde{w}_{g_1}^T \Gamma_{g_1}^{-1} \tilde{w}_{g_1}). \quad (5)$$

将上式两边对时间求导数可得:

$$\dot{V}_1 = \dot{e}_1 e_1 + \dot{\tilde{w}}_{f_1}^T \Gamma_{f_1}^{-1} \tilde{w}_{f_1} + \dot{\tilde{w}}_{g_1}^T \Gamma_{g_1}^{-1} \tilde{w}_{g_1}. \quad (6)$$

将式(4)代入式(6)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & f_1 e_1 - \dot{x}_{1d} e_1 + g_1 e_1 e_2 + g_1 u_1 e_1 + \\ & \dot{\tilde{w}}_{f_1}^T \Gamma_{f_1}^{-1} \tilde{w}_{f_1} + \dot{\tilde{w}}_{g_1}^T \Gamma_{g_1}^{-1} \tilde{w}_{g_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

设计控制律为

$$u_1 = \frac{\hat{g}_1}{\hat{g}_1^2 + \delta_1} (-k_1 e_1 + \dot{x}_{1d} - k_{\delta f_1} \hat{w}_{f_1}^T \zeta_{f_1}) + v_1, \quad (8)$$

其中:

$$v_1 = -\frac{1}{a_1} \left(\frac{a_{a_1}^2 \bar{u}_1 e_1}{a_{a_1} |\bar{u}_1 e_1| + \delta_{a_1}} \right),$$

$$a_{a_1} = \frac{\Delta_{g_1}}{2\sqrt{\delta_1}} + 1,$$

δ_{a_1} 为小的非负常数, $0 < a_1 \leq g_1 \leq b_1$, $\bar{u}_1 = -k_1 e_1 + \dot{x}_{1d} - k_{\delta f_1} \hat{w}_{f_1}^T \zeta_{f_1}$.

设

$$f_i = k_{\delta f_i} w_{f_i}^{*T} \zeta_{f_i} + \varepsilon_{f_i}, |\varepsilon_{f_i}| \leq \Delta_{f_i}, \quad (9a)$$

$$\hat{f}_i = k_{\delta f_i} \hat{w}_{f_i}^T \zeta_{f_i}, \quad (9b)$$

$$g_i = k_{\delta g_i} w_{g_i}^{*T} \zeta_{g_i} + \varepsilon_{g_i}, |\varepsilon_{g_i}| \leq \Delta_{g_i}, \quad (10a)$$

$$\hat{g}_i = k_{\delta g_i} \hat{w}_{g_i}^T \zeta_{g_i}, \quad (10b)$$

$$\tilde{w}_{f_i} = \hat{w}_{f_i} - w_{f_i}^*, \quad (11)$$

$$\tilde{w}_{g_i} = \hat{w}_{g_i} - w_{g_i}^*. \quad (12)$$

设定各个神经网络的学习律为

$$\dot{\hat{w}}_{f_i} = -\Gamma_{f_i} k_{\delta f_i} (d_{w_{f_i}} \hat{w}_{f_i} - \zeta_{f_i} e_i). \quad (13)$$

$$\dot{\hat{w}}_{g_i} = -\Gamma_{g_i} k_{\delta g_i} (d_{w_{g_i}} \hat{w}_{g_i} - \zeta_{g_i} (u_i - v_i) e_i). \quad (14)$$

这是一种改进的 δ -修正学习律. 其中: Γ_{f_i} , Γ_{g_i} , $k_{\delta f_i}$, $k_{\delta g_i}$, $d_{w_{f_i}}$, $d_{w_{g_i}}$ 为正的常数, $k_{\delta f_i}$, $k_{\delta g_i}$ 为对应的神经网络的放大因子, $\hat{w}_{f_i}$ 和 $\hat{w}_{g_i}$ 为RBF神经网络权值向量的估计值, $w_{f_i}^*$ 和 $w_{g_i}^*$ 为RBF神经网络权值向量的理想值, ζ_{f_i} 和 ζ_{g_i} 为RBF神经网络的基函数向量, ε_{f_i} 和 ε_{g_i} 为RBF神经网络分别对 f_i 和 g_i 的逼近误差, ε_{f_i} 和 ε_{g_i} 的绝对值的上限分别为 Δ_{f_i} 和 Δ_{g_i} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

由式(7)~(14)和条件: $\tilde{g}_1 = k_{\delta g_1} \tilde{w}_{g_1}^T \zeta_{g_1} - \varepsilon_{g_1}$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -k_1 e_1^2 + \varepsilon_{f_1} e_1 + g_1 e_1 e_2 - k_{\delta g_1} \tilde{w}_{g_1}^T \zeta_{g_1} (u_1 - \\ & v_1) e_1 + \frac{\hat{g}_1 \varepsilon_{g_1} \bar{u}_1 e_1}{\hat{g}_1^2 + \delta_1} - \frac{\delta_1 \bar{u}_1 e_1}{\hat{g}_1^2 + \delta_1} + g_1 v_1 e_1 - \\ & k_{\delta f_1} d_{w_{f_1}} \tilde{w}_{f_1}^T \tilde{w}_{f_1} - k_{\delta f_1} d_{w_{f_1}} \tilde{w}_{f_1}^T w_{f_1}^* - \\ & k_{\delta g_1} d_{w_{g_1}} \tilde{w}_{g_1}^T \tilde{w}_{g_1} - k_{\delta g_1} d_{w_{g_1}} \tilde{w}_{g_1}^T w_{g_1}^* + \\ & k_{\delta g_1} \tilde{w}_{g_1}^T \zeta_{g_1} (u_1 - v_1) e_1. \end{aligned} \quad (15)$$

因为

$$\frac{\hat{g}_1 \varepsilon_{g_1} - \delta_1}{\hat{g}_1^2 + \delta_1} < \frac{\hat{g}_1 \Delta_{g_1}}{\hat{g}_1^2 + \delta_1} + \frac{\delta_1}{\hat{g}_1^2 + \delta_1}, \quad (16)$$

上式小于号右边第1项由 $\frac{d}{d\hat{g}_1} \frac{\hat{g}_1 \varepsilon_{g_1}}{\hat{g}_1^2 + \delta_1} = 0$ 可得该项

在 $\hat{g}_1 = \sqrt{\delta_1}$ 取最大值.

式(16)小于号右边第2项的绝对值一定小于等于1.

所以可证明

$$\frac{\hat{g}_1 \varepsilon_{g_1} - \delta_1}{\hat{g}_1^2 + \delta_1} < \frac{\Delta_{g_1}}{2\sqrt{\delta_1}} + 1, \quad (17a)$$

$$\frac{(\hat{g}_1 \varepsilon_{g_1} - \delta_1) \bar{u}_1 e_1}{\hat{g}_1^2 + \delta_1} \leq \left(\frac{\Delta_{g_1}}{2\sqrt{\delta_1}} + 1 \right) \bar{u}_1 e_1. \quad (17b)$$

后面几步可依次类推.

所以

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -k_1 e_1^2 + \varepsilon_{f_1} e_1 + g_1 e_1 e_2 + a_{a_1} |\bar{u}_1 e_1| + \\ & g_1 v_1 e_1 - k_{\delta f_1} d_{w_{f_1}} \tilde{w}_{f_1}^T \tilde{w}_{f_1} - \\ & k_{\delta f_1} d_{w_{f_1}} \tilde{w}_{f_1}^T w_{f_1}^* - k_{\delta g_1} d_{w_{g_1}} \tilde{w}_{g_1}^T \tilde{w}_{g_1} - \\ & k_{\delta g_1} d_{w_{g_1}} \tilde{w}_{g_1}^T w_{g_1}^*. \end{aligned} \quad (18)$$

因为

$$\begin{aligned} g_1 v_1 e_1 + a_{a_1} |\bar{u}_1 e_1| \leq \\ -\frac{v_1}{a_1} a_{a_1}^2 \bar{u}_1^2 e_1^2 + a_{a_1}^2 \bar{u}_1^2 e_1^2 + \delta_{a_1} a_{a_1} |\bar{u}_1 e_1| \\ \frac{a_{a_1} |\bar{u}_1 e_1| + \delta_{a_1}}{a_{a_1} |\bar{u}_1 e_1| + \delta_{a_1}} \leq \delta_{a_1}, \end{aligned}$$

后面可依次类推. 将 v_1 的表达式代入式(18)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -k_1 e_1^2 + \varepsilon_{f_1} e_1 + g_1 e_1 e_2 + \delta_{a_1} - \\ & k_{\delta f_1} d_{w_{f_1}} \tilde{w}_{f_1}^T \tilde{w}_{f_1} - k_{\delta f_1} d_{w_{f_1}} \tilde{w}_{f_1}^T w_{f_1}^* - \\ & k_{\delta g_1} d_{w_{g_1}} \tilde{w}_{g_1}^T \tilde{w}_{g_1} - k_{\delta g_1} d_{w_{g_1}} \tilde{w}_{g_1}^T w_{g_1}^*. \end{aligned} \quad (19)$$

Step 2 应用动态面控制法, 设

$$\dot{x}_{id} = -k_{id} (\bar{x}_{id} - x_{id}), \quad (20)$$

其中 $i = 1, 2, 3, \dots, n$. 由于式(20)是一个惯性环节, 在时间常数 k_{id} 足够大且 x_{id} 变化足够缓慢时, 可以近似认为 $\bar{x}_{id} = x_{id}$.

由式(1)可得第2个子系统:

$$\dot{x}_2 = f_2 + g_2 x_3. \quad (21)$$

式(21)等号两边同时减去 x_2 的参考信号的导数 $\dot{x}_{2d}$ 可近似得到

$$\dot{e}_2 = f_2 - \dot{x}_{2d} + g_2 x_3. \quad (22)$$

由式(22)可得

$$\dot{e}_2 = f_2 - \dot{x}_{2d} + g_2 e_3 + g_2 u_2, \quad (23)$$

其中: $e_3 = x_3 - x_{3d}$, $u_2 = x_{3d}$, x_{3d} 为 x_3 的参考信号.

选取Lyapunov函数:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} (e_2^2 + \tilde{w}_{f_2}^T \Gamma_{f_2}^{-1} \tilde{w}_{f_2} + \tilde{w}_{g_2}^T \Gamma_{g_2}^{-1} \tilde{w}_{g_2}). \quad (24)$$

将上式两边对时间求导数, 然后由式(23)可得

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + f_2 e_2 - \dot{\hat{x}}_{2d} e_2 + g_2 e_2 e_3 + g_2 u_2 e_2 + \tilde{w}_{f_2}^T \Gamma_{f_2}^{-1} \dot{\hat{w}}_{f_2} + \tilde{w}_{g_2}^T \Gamma_{g_2}^{-1} \dot{\hat{w}}_{g_2}. \quad (25)$$

设计控制律为

$$u_2 = \frac{\hat{g}_2}{\hat{g}_2^2 + \delta_2} (-k_2 e_2 + \dot{\hat{x}}_{2d} - k_{\delta f_2} \hat{w}_{f_2}^T \zeta_{f_2} + \bar{v}_2) + v_2, \quad (26)$$

其中:

$$v_2 = -\frac{1}{a_2} \left(\frac{a_{a_2}^2 \bar{u}_2^2 e_2}{a_{a_2} |\bar{u}_2 e_2| + \delta_{a_2}} \right),$$

$$a_{a_2} = \frac{\Delta_{g_2}}{2\sqrt{\delta_2}} + 1,$$

$$\bar{v}_2 = -b_1 |e_1| \operatorname{sgn} e_2,$$

δ_{a_2} 为小的非负常数, $0 < a_2 \leq g_2 \leq b_2$, $\bar{u}_2 = -k_2 e_2 + \dot{\hat{x}}_{2d} - k_{\delta f_2} \hat{w}_{f_2}^T \zeta_{f_2} + \bar{v}_2$.

由式(19)(25)和(26)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\sum_{i=1}^2 k_i e_i^2 + \sum_{i=1}^2 \varepsilon_{f_i} e_i + g_2 e_2 e_3 + \sum_{i=1}^2 \delta_{a_i} - \\ & \sum_{i=1}^2 k_{\delta f_i} d_{w f_i} \tilde{w}_{f_i}^T \tilde{w}_{f_i} - \sum_{i=1}^2 k_{\delta f_i} d_{w f_i} \tilde{w}_{f_i}^T w_{f_i}^* - \\ & \sum_{i=1}^2 k_{\delta g_i} d_{w g_i} \tilde{w}_{g_i}^T \tilde{w}_{g_i} - \sum_{i=1}^2 k_{\delta g_i} d_{w g_i} \tilde{w}_{g_i}^T w_{g_i}^*. \end{aligned} \quad (27)$$

Step i ($3 \leq i \leq n-1$) 由式(1)可得第 i 个子系统:

$$\dot{x}_i = f_i + g_i x_{i+1}. \quad (28)$$

式(28)等号两边同时减去 x_i 的参考信号的导数 $\dot{\hat{x}}_{id}$ 可近似得到

$$\dot{e}_i = f_i - \dot{\hat{x}}_{id} + g_i x_{i+1}, \quad (29)$$

其中: $e_i = x_i - x_{id}$, x_{id} 为 x_i 的参考信号.

由式(29)可得

$$\dot{e}_i = f_i - \dot{\hat{x}}_{id} + g_i e_{i+1} + g_i u_i, \quad (30)$$

其中: $e_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, $u_i = x_{(i+1)d}$, $x_{(i+1)d}$ 为 x_{i+1} 的参考信号.

选取Lyapunov函数:

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} (e_i^2 + \tilde{w}_{f_i}^T \Gamma_{f_i}^{-1} \tilde{w}_{f_i} + \tilde{w}_{g_i}^T \Gamma_{g_i}^{-1} \tilde{w}_{g_i}). \quad (31)$$

将上式两边对时间求导数, 然后由式(30)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + f_i e_i - \dot{\hat{x}}_{id} e_i + g_i e_i e_{i+1} + g_i u_i e_i + \\ \tilde{w}_{f_i}^T \Gamma_{f_i}^{-1} \dot{\hat{w}}_{f_i} + \tilde{w}_{g_i}^T \Gamma_{g_i}^{-1} \dot{\hat{w}}_{g_i}. \end{aligned} \quad (32)$$

设计控制律为

$$u_i = \frac{\hat{g}_i}{\hat{g}_i^2 + \delta_i} (-k_i e_i + \dot{\hat{x}}_{id} - k_{\delta f_i} \hat{w}_{f_i}^T \zeta_{f_i} + \bar{v}_i) + v_i. \quad (33)$$

其中:

$$v_i = -\frac{1}{a_i} \left(\frac{a_{a_i}^2 \bar{u}_i^2 e_i}{a_{a_i} |\bar{u}_i e_i| + \delta_{a_i}} \right),$$

$$a_{a_i} = \frac{\Delta_{g_i}}{2\sqrt{\delta_i}} + 1,$$

$$\bar{v}_i = -b_{i-1} |e_{i-1}| \operatorname{sgn} e_i,$$

δ_{a_i} 为小的非负常数, $0 < a_i \leq g_i \leq b_i$, $\bar{u}_i = -k_i e_i + \dot{\hat{x}}_{id} - k_{\delta f_i} \hat{w}_{f_i}^T \zeta_{f_i} + \bar{v}_i$.

由式(32)~(33)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -\sum_{j=1}^i k_j e_j^2 + \sum_{j=1}^i \varepsilon_{f_j} e_j + g_j e_j e_{j+1} + \sum_{j=1}^i \delta_{a_j} - \\ & \sum_{j=1}^i k_{\delta f_j} d_{w f_j} \tilde{w}_{f_j}^T \tilde{w}_{f_j} - \sum_{j=1}^i k_{\delta f_j} d_{w f_j} \tilde{w}_{f_j}^T w_{f_j}^* - \\ & \sum_{j=1}^i k_{\delta g_j} d_{w g_j} \tilde{w}_{g_j}^T \tilde{w}_{g_j} - \sum_{j=1}^i k_{\delta g_j} d_{w g_j} \tilde{w}_{g_j}^T w_{g_j}^*. \end{aligned} \quad (34)$$

Step n 由式(1)可得第 n 个子系统:

$$\dot{x}_n = f_n + g_n u. \quad (35)$$

式(35)等号两边同时减去 x_n 的参考信号的导数 $\dot{\hat{x}}_{nd}$ 可近似得到

$$\dot{e}_n = f_n - \dot{\hat{x}}_{nd} + g_n u. \quad (36)$$

选取Lyapunov函数:

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} (e_n^2 + \tilde{w}_{f_n}^T \Gamma_{f_n}^{-1} \tilde{w}_{f_n} + \tilde{w}_{g_n}^T \Gamma_{g_n}^{-1} \tilde{w}_{g_n}). \quad (37)$$

将上式两边对时间求导数, 然后由式(36)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + f_n e_n - \dot{\hat{x}}_{nd} e_n + g_n u_n e_n + \\ \tilde{w}_{f_n}^T \Gamma_{f_n}^{-1} \dot{\hat{w}}_{f_n} + \tilde{w}_{g_n}^T \Gamma_{g_n}^{-1} \dot{\hat{w}}_{g_n}. \end{aligned} \quad (38)$$

设计控制律为

$$u_n = \frac{\hat{g}_n}{\hat{g}_n^2 + \delta_n} (-k_n e_n + \dot{\hat{x}}_{nd} - k_{\delta f_n} \hat{w}_{f_n}^T \zeta_{f_n} + \bar{v}_n) + v_n, \quad (39)$$

其中:

$$v_n = -\frac{1}{a_n} \left(\frac{a_{a_n}^2 \bar{u}_n^2 e_n}{a_{a_n} |\bar{u}_n e_n| + \delta_{a_n}} \right),$$

$$a_{a_n} = \frac{\Delta_{g_n}}{2\sqrt{\delta_n}} + 1, \quad \bar{v}_n = -b_{n-1} |e_{n-1}| \operatorname{sgn} e_n,$$

δ_{a_n} 为小的非负常数, $0 < a_n \leq g_n \leq b_n$, $\bar{u}_n = -k_n e_n + \dot{\hat{x}}_{nd} - k_{\delta f_n} \hat{w}_{f_n}^T \zeta_{f_n} + \bar{v}_n$.

$$\dot{\hat{x}}_{nd} - k_{\delta f_n} \hat{w}_{f_n}^T \zeta_{f_n} + \bar{v}_n.$$

由式(34)(38)和(39)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\sum_{i=1}^n k_i e_i^2 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{f_i} e_i + \sum_{i=1}^n \delta_{a_i} - \\ & \sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{w f_i} \tilde{w}_{f_i}^T \tilde{w}_{f_i} - \sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{w f_i} \tilde{w}_{f_i}^T w_{f_i}^* - \\ & \sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{w g_i} \tilde{w}_{g_i}^T \tilde{w}_{g_i} - \sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{w g_i} \tilde{w}_{g_i}^T w_{g_i}^*. \quad (40) \end{aligned}$$

2.2 控制系统的稳定性分析(Analysis of the stability of the control systems)

定理 1 设 x_{id} 连续且有界, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. 在假设1~3的条件下, 如式(42)所示的不确定非线性系统在如式(8)(26)(33)和(39)所示的控制器控制下, 采用如式(13)和(14)所示的神经网络学习律, 设

$$\alpha = \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{w f_i} w_{f_i}^{*T} w_{f_i}^* + \sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{w g_i} w_{g_i}^{*T} w_{g_i}^* \right) + \sum_{i=1}^n \delta_{a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_{f_i}^2}{4k_{\varepsilon i}} \right]. \quad (41)$$

选取干扰信号的范数为: $\|d\| = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2\alpha}$, 评价信

号的范数为

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (2k_{i1} e_i^2 + k_{\delta f_i} d_{\delta f_i} \tilde{w}_{f_i}^T \tilde{w}_{f_i} + k_{\delta g_i} d_{\delta g_i} \tilde{w}_{g_i}^T \tilde{w}_{g_i})},$$

其中 $k_{i1} > 0$ 是个常数. 在适当的选择控制器参数后, 如式(8)(26)(33)和(39)所示的控制器是系统式(42)的神经网络L₂-增益鲁棒控制器.

设

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} F_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & F_n \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} G_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & G_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中: $F_i = \text{diag}\{-\Gamma_{f_i} k_{\delta f_i} d_{w f_i} \cdots - \Gamma_{f_i} k_{\delta f_i} d_{w f_i}\}$, 阶次与 $\tilde{w}_{f_i}$ 的元素个数相同; $G_i = \text{diag}\{-\Gamma_{g_i} k_{\delta g_i} d_{w g_i} \cdots - \Gamma_{g_i} k_{\delta g_i} d_{w g_i}\}$, 阶次与 $\tilde{w}_{g_i}$ 的元素个数相同, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \\ \dot{\tilde{w}}_{f_1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{w}}_{f_n} \\ \dot{\tilde{w}}_{g_1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{w}}_{g_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \tilde{w}_{f_1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_{f_n} \\ \tilde{w}_{g_1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_{g_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 - \dot{\hat{x}}_{1d} \\ \vdots \\ f_n - \dot{\hat{x}}_{nd} \\ -\Gamma_{f_1} k_{\delta f_1} (d_{w f_1} w_{f_1}^* - \zeta_{f_1} e_1) \\ \vdots \\ -\Gamma_{f_n} k_{\delta f_n} (d_{w f_n} w_{f_n}^* - \zeta_{f_n} e_n) \\ -\Gamma_{g_1} k_{\delta g_1} [d_{w g_1} w_{g_1}^* - \zeta_{g_1} (u_1 - v_1) e_1] \\ \vdots \\ -\Gamma_{g_n} k_{\delta g_n} [d_{w g_n} w_{g_n}^* - \zeta_{g_n} (u_n - v_n) e_n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}. \quad (42)$$

证 选取: $k_i = k_{i1} + k_{\varepsilon i}$, 其中 $k_{\varepsilon i} > 0$ 是个常数.

可以证明

$$-k_{\varepsilon i} e_i^2 + \varepsilon_{f_i} e_i \leq \frac{\varepsilon_{f_i}^2}{4k_{\varepsilon i}}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{w f_i} \tilde{w}_{f_i}^T \tilde{w}_{f_i} + \right. \\ & \left. 2 \sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{w f_i} \tilde{w}_{f_i}^T w_{f_i}^* \right) \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{w f_i} w_{f_i}^{*T} w_{f_i}^*, \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{w g_i} \tilde{w}_{g_i}^T \tilde{w}_{g_i} + \right. \\ & \left. 2 \sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{w g_i} \tilde{w}_{g_i}^T w_{g_i}^* \right) \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{w g_i} w_{g_i}^{*T} w_{g_i}^*. \quad (45) \end{aligned}$$

所以可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\sum_{i=1}^n k_{i1} e_i^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{w f_i} \tilde{w}_{f_i}^T \tilde{w}_{f_i} + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{w g_i} \tilde{w}_{g_i}^T \tilde{w}_{g_i} \right) + \alpha. \quad (46) \end{aligned}$$

设Hamilton函数为

$$H = \dot{V}_n - \frac{1}{2}(\gamma^2 \|d\|^2 - \|z\|^2).$$

由式(39)可得

$$\begin{aligned} H \leq & -\sum_{i=1}^n k_{i1} e_i^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{wf_i} \tilde{w}_{f_i}^T \tilde{w}_{f_i} + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{wg_i} \tilde{w}_{g_i}^T \tilde{w}_{g_i} \right) + \alpha - \\ & \frac{1}{2}(\gamma^2 \|d\|^2 - \|z\|^2) \leq 0. \end{aligned} \quad (47)$$

由此可见, 式(42)在如式(8)(26)(33)和(39)所示的控制器作用下, 具有小于等于 γ 的 L_2 -增益指标, 即^[11]

$$J = \sup_{\|d\| \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|d\|_2} \leq \gamma.$$

当 $\|d\| = 0$ 时,

$$\begin{aligned} V_n \leq & -\sum_{i=1}^n k_{i1} e_i^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n k_{\delta f_i} d_{wf_i} \tilde{w}_{f_i}^T \tilde{w}_{f_i} + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^n k_{\delta g_i} d_{wg_i} \tilde{w}_{g_i}^T \tilde{w}_{g_i} \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

又因为: $\|z\| \rightarrow \infty$ 时, $V_n \rightarrow \infty$, 所以由LaSalle不变集定理^[11]可知, 系统式(42)在零点大范围渐近稳定, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{w}_{f_i} = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{w}_{g_i} = 0$. 根据假设1~3可知, 系统(1)的各个状态变量的跟踪误差和神经网络的各个权值总是有界的.

根据以上的证明, 可以知道, 控制器式(8)(26)(33)和(39)是式(42)所示系统的神经网络 L_2 -增益鲁棒控制器. 证毕.

由以上证明可以看出, $\|z\|$ 的大小与 γ 的取值无关, 其情况一律相当于 $\gamma = 1$ 的情况. 状态变量的跟踪误差只与 α 的大小成正比例关系. 根据式(47)可知, k_i 在 $k_{\varepsilon i}$ 固定时, 值越大则系统状态变量的跟踪误差越小. 从式(9a)和(10a)可以知道, $k_{\delta f_i}$ 和 $k_{\delta g_i}$ 越大则 $w_{f_i}^{*T} w_{f_i}^*$ 和 $w_{g_i}^{*T} w_{g_i}^*$ 越小, α 也越小, 从而 $\|z\|$ 也越小, 反之亦然. 增加 Γ_{f_i} 和 Γ_{g_i} 可以增加权值的学习速率. d_{wf_i} 和 d_{wg_i} 取远小于1的正的常数, 从而可使得相同的权值时其相应的跟踪误差比不用此参数时更小. $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

3 仿真结果(Simulation results)

以式(49)所示的系统为具体对象进行了仿真研究:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.5x_1 + [1 + 0.5 \cos(x_1^2 + 1)]x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 + [2 + \cos x_2]u. \end{cases} \quad (49)$$

选取 $x_{1d} = \sin(t + \frac{\pi}{2})$. 选取RBF神经网络的基函数为

$$\zeta_i(\bar{x}) = \exp\left(-\frac{\|\bar{x} - \theta_i\|^2}{d_i^2}\right).$$

其中: $\bar{x}$ 为第 i 个神经元 $\zeta_i(\bar{x})$ 的输入向量, θ_i 为基函数的中心值, d_i 为基函数的宽度参数. 对式(49)所示系统, 用了4个RBF神经网络NN1, NN2, NN3和NN4, 分别逼近 $0.5x_1$, $1 + 0.5 \cos(x_1^2 + 1)$, x_1x_2 和 $2 + \cos x_2$ 4个假设是未知的非线性函数. 根据式(46)和(47), 这里的神经网络逼近误差经过处理后, 可看作是扰动信号, 能影响控制系统的跟踪误差范数大小. 要补偿这个影响, 只有通过选择适当多的隐层神经元个数, 减少逼近误差, 同时还要注意不能选得太多, 以减少计算量. 本文为每个RBF神经网络隐层选取6个神经元. 基函数的中心点均匀的分布在 $[0.5, 0.5]$ 的区间上, ζ_{f1} 和 ζ_{g1} 的输入向量为: $[x_1x_2 \ e_1]$, ζ_{f2} 和 ζ_{g2} 的输入向量为 $[x_1 \ x_2 \ e_1 \ e_2]$. 当然, 这些输入向量还要经过归一化处理.

$$k_1 = k_2 = 6, \Delta_{g_i} = 0.1, \delta_i = 0.02,$$

$$\delta_{a_i} = 0.0001, \Gamma_{f_i} = \Gamma_{g_i} = 1.$$

在 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 30$, $k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 30$ 时, $d_{wf_i} = d_{wg_i} = 0.03333$, 在 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 65$, $k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 65$ 时, $d_{wf_i} = d_{wg_i} = 0.01538$. 系统(1)的各个状态变量的初始值均设置为零, 神经网络权值 $\hat{w}_{f_i}$ 的初始值均为零向量, 权值 $\hat{w}_{g_i}$ 的初始值均为: $10^{-18}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. $i = 1, 2$.

从图1~3可见, 系统使用了本文提出的控制器和学习律后, 对状态变量有很好的跟踪性能, 而且不需要有太多被控对象的先验知识, 只要知道被控对象是一个具有三角结构的非线性SISO系统即可. 根据2.2节中定理的分析, e_1 , e_2 和各个权值向量的跟踪误差具有事先规定的 L_2 -增益性能指标, 并不一定收敛到零, 只有当 $\|d\| = 0$ 时才一定收敛到零. 图1中: 曲线1为 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 65$, $k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 65$ 时的 e_1 , 曲线2为 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 30$, $k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 30$ 时的 e_1 . 图2为 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 30$, $k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 30$ 时的 e_2 . 图3为 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 65$, $k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 65$ 时的 e_2 .

从图4,5可见, 控制器中的RBF神经网络的权值均在有限的范围内, 而且 $k_{\delta f_i}$ 和 $k_{\delta g_i}$ 越大则 $\|z\|$ 越小, 反之亦然. 仿真结果表明, 本文提出的控制器对不确定的三角结构仿射非线性系统具有很好的跟踪性能和很强的鲁棒性. 图4中: 当 $k_{\delta f_1} =$

$k_{\delta g_1} = 65, k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 65$ 时, 曲线1为 $\|\hat{w}_{f1}\|$, 曲线2为 $\|\hat{w}_{g1}\|$; 当 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 30, k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 30$ 时, 曲线3为 $\|\hat{w}_{f1}\|$, 曲线4为 $\|\hat{w}_{g1}\|$. 图5中: 当 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 65, k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 65$ 时, 曲线1为 $\|\hat{w}_{f2}\|$, 曲线2为 $\|\hat{w}_{g2}\|$; 当 $k_{\delta f_1} = k_{\delta g_1} = 30, k_{\delta f_2} = k_{\delta g_2} = 30$ 时, 曲线3为 $\|\hat{w}_{f2}\|$, 曲线4为 $\|\hat{w}_{g2}\|$.

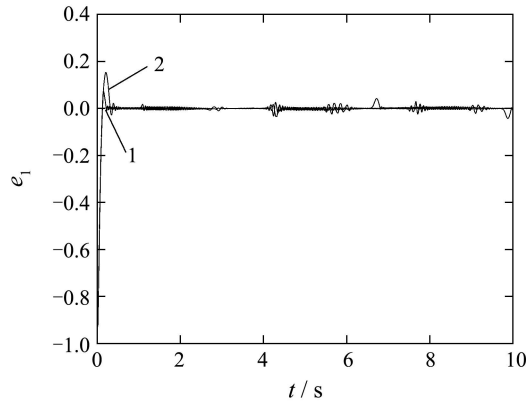


图1 缩放因子不同时跟踪误差 e_1 的对比曲线
Fig. 1 The comparison curves of e_1 with different scaling factors

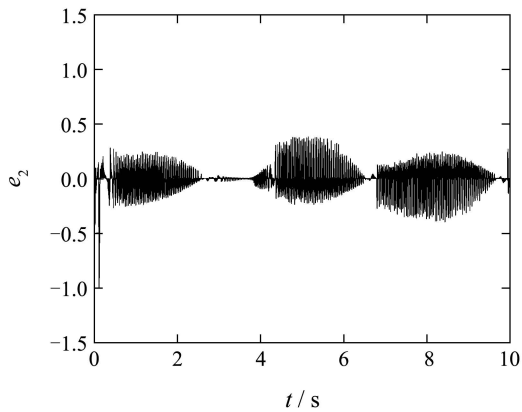


图2 缩放因子较小时跟踪误差 e_2 的曲线
Fig. 2 The curve of e_2 with small scaling factors

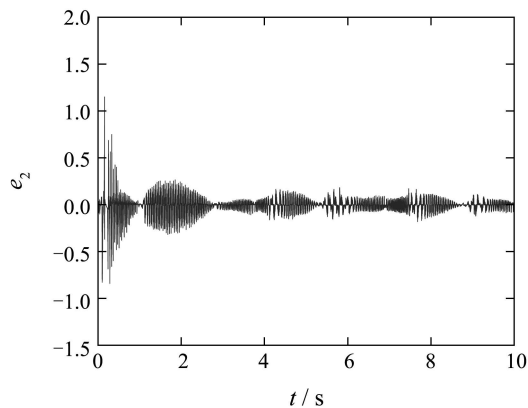


图3 缩放因子较大时跟踪误差 e_2 的曲线
Fig. 3 The curve of e_2 with large scaling factors

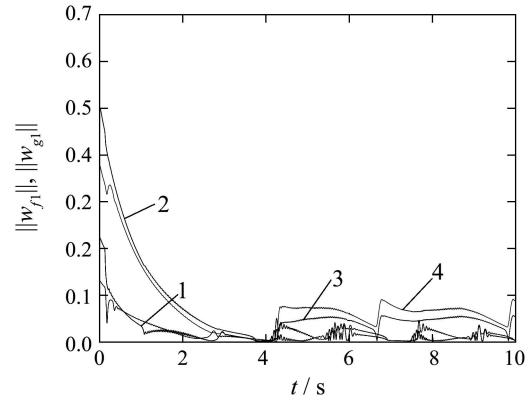


图4 缩放因子不同时, 第1,2个神经网络的权值范数对比曲线

Fig. 4 The comparison curves of the norm of the weights of the No. 1 and 2 neural networks with different scaling factors

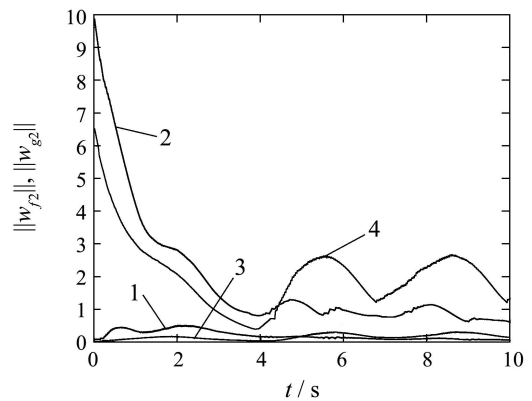


图5 缩放因子不同时, 第3,4个神经网络的权值范数对比曲线

Fig. 5 The comparison curves of the norm of the weights of the No. 3 and 4 neural networks with different scaling factors

4 结论(Conclusions)

本文应用反步法设计了控制器, 用RBF神经网络逼近被控对象中的不确定函数, 将被控对象中任意形式的不确定函数转化为线性形式的不确定函数. 用一种特殊形式的控制量系数函数避免了控制量系数函数分母为零的奇异情况. 本文提出的控制器只需要对 g_i 设定上、下限, 不需要对 $|\dot{g}_i|$ 设定上限或下限. 应用Lyapunov定理和HJI不等式证明了控制系统的鲁棒性和稳定性, 并且避免了直接解HJI不等式. 另外, 还应用了动态面法来避免项的爆炸. 将整个控制系统看作一个整体. 经证明, 控制系统是稳定的, 式(1)的各个状态变量和神经网络各权值的跟踪误差组成的状态变量具有小于等于 γ 的 L_2 -增益. 仿真结果表明本文提出的控制器有很好的跟踪性能和很强的鲁棒性.

参考文献(References):

- [1] LEWIS F L, YESILDIREK A, LIU K. Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1996, 7(2): 388 – 399.
- [2] DONG W J, KUHNERT K D. Robust adaptive control of nonholonomic mobile robot with parameter and nonparameter uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2005, 21(2): 261 – 266.
- [3] SESHAGIRI S, KHALIL H K. Output feedback control of nonlinear systems using RBF neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2000, 11(1): 69 – 79.
- [4] MENG J E, YANG G. Robust adaptive control of robot manipulators using generalized fuzzy neural networks[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2003, 50(3): 620 – 628.
- [5] 丁刚, 张曾科, 韩曾晋. 非线性系统的鲁棒自适应模糊控制[J]. 自动化学报, 2002, 28(3): 356 – 362.
(DING Gang, ZHANG Zengke, HAN Zengjin. Robust adaptive fuzzy control of nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(3): 356 – 362.)
- [6] XU H J, IOANNOU P A. Robust adaptive control for a class of MIMO nonlinear systems with guaranteed error bounds[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 728 – 742.
- [7] 何国军, 蒋静坪. 一类非线性系统的自适应与 L_2 -增益混合控制[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(2): 169 – 172.
(HE Guojun, JIANG Jingping. Hybrid control of L_2 -gain analysis incorporated with adaptive control for a class of nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(2): 169 – 172.)
- [8] 陈维, 王耀南. 基于神经网络的现代感应电机自适应 L_2 鲁棒控制[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27(15): 93 – 99.
(CHEN Wei, WANG Yaonan. Adaptive L_2 robust control of modern induction motors using neural networks[J]. *Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 2007, 27(15): 93 – 99.)
- [9] LI Y H, QIANG S, ZHUANG X Y, et al. Robust and adaptive backstepping control for nonlinear systems using RBF neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(3): 693 – 701.
- [10] CHIMAN KWAN, LEWIS F L. Robust backstepping control of nonlinear systems using neural networks[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 2000, 30(6): 753 – 766.
- [11] VAN DER SCHAFT A J. L_2 -Gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1992, 37(6): 770 – 784.

作者简介:

陈 维 (1975—), 男, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为智能鲁棒控制及其在电力传动系统中的应用, E-mail: chenwei197511@yahoo.com.cn;

王耀南 (1957—), 男, 教授, 院长, 博士生导师, 主要研究方向为智能控制和智能信息处理, E-mail: yaonan@hnu.cn;

许海霞 (1978—), 女, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为智能信息处理, E-mail: xhxia2002@126.com.