

一类不确定非线性系统 自适应输出反馈跟踪控制的新结果

尚 芳, 刘允刚, 张承慧

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

摘要: 研究了一类不确定非线性系统的自适应输出反馈实际跟踪控制问题. 解决该控制问题的困难主要源于此类系统控制系数不确定, 并具有依赖于不可测状态的增长且其增速是关于输出的多项式函数. 首先, 通过推广现有的K-滤波器, 引入了新的动态高增益K-滤波器, 并基于此构造了状态观测器. 然后, 应用反推技术, 成功的设计了系统的自适应输出反馈跟踪控制器. 主要结果表明, 通过设计参数的适当选择, 所构造的控制器能保证闭环系统的所有状态全局有界, 并且当时间足够大时, 跟踪误差收敛到零点的既定小邻域内.

关键词: 非线性系统; 自适应控制; 实际跟踪; 不确定控制系数; 动态高增益K-滤波器; 输出反馈
中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

New results on adaptive tracking by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems

SHANG Fang, LIU Yun-gang, ZHANG Cheng-hui

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China)

Abstract: We consider the adaptive practical tracking control by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems. This class of systems has an uncertain control coefficient and unmeasured states dependent growth with growth rate of polynomial-of-output. To deal with the difficulty caused by this control coefficient, we extend the existing K-filters to new dynamic K-filters with high gains; based on which we construct a state observer. Then, the adaptive tracking controller by output feedback is successfully designed using the backstepping technique. It is shown that if the design parameters are suitably chosen, the designed controller guarantees the closed-loop system states to be globally bounded, and the tracking error to converge to the prescribed small neighborhood of the origin after the elapse of a long time.

Key words: nonlinear systems; adaptive control; practical tracking; uncertain control coefficient; dynamic high-gain K-filters; output feedback

1 引言(Introduction)

输出跟踪控制问题具有重要的理论意义和实际意义, 是控制理论研究的热点问题之一. 在近十几年里, 很多学者致力于非线性系统的输出跟踪控制的研究, 并取得了一系列的研究成果^[1~8]. 如果系统和被跟踪信号的信息充分, 则可以实现渐近跟踪控制^[2,4,6]. 如果这些信息不充分, 虽不能实现渐近跟踪控制, 但可能实现实际跟踪控制, 即存在控制器, 使得时间充分大后跟踪误差进入一给定(可任意小)范围. 由于在许多具体应用中, 实际跟踪控制已经适用, 并且该跟踪控制容许更多类型的不确定性, 因此, 至今实际跟踪控制仍是很活跃的研究领域^[5,7,8].

本文研究如下单输入单输出(SISO)非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_i = \zeta_{i+1} + \psi_i(t, \zeta, u), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\zeta}_n = gu + \psi_n(t, \zeta, u), \\ y = \zeta_1 - y_r, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $n \geq 2$ 是系统的阶数; $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, 初始值为 $\zeta(0) = \zeta_0$; $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别是系统的输入和输出; y_r 是被跟踪信号; g 是不确定的非零常数, 称为控制系数; 函数 $\psi_i: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ 关于第一个变量是连续的, 关于其他变量是局部Lipschitz的. 在下文中, 假设只有系统的输出是可量测的.

收稿日期: 2009-01-09; 收修改稿日期: 2009-09-05.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60974003, 60774004); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-07-0513); 教育部科学技术研究重点资助项目(108079); 山东省优秀中青年科学家奖励基金资助项目(2007BS01010); 山东省自然科学基金杰出青年基金资助项目(JQ200919); 山东大学自主创新基金资助项目(2009JQ008).

本文的目标是设计输出反馈控制器使得系统(1)在如下假设条件下实现全局实际跟踪控制:

假设 1 存在已知的整数 $p \geq 1$ 和常数 $c_0 \geq 0$, 使得

$$|\psi_i(t, \zeta, u)| \leq c_0(1 + |\zeta_1|^p)(|\zeta_1| + \cdots + |\zeta_i|) + c_0, \\ i = 1, \cdots, n.$$

假设 2 被跟踪信号 $y_r(t)$ 是连续可微的. 并且, 对于 $\forall t \in [0, +\infty)$, 存在已知常数 $c_1 > 0$, 使得 $\max\{|y_r(t)|, |\dot{y}_r(t)|\} \leq c_1$.

假设 3 控制系数 g 的符号是已知的, 并且存在已知正常数 g_N 和 g_M , 满足 $g_N \leq |g| \leq g_M$.

即对于任意预先给定的常数 $\delta > 0$, 设计自适应输出反馈控制器, 使得闭环系统的所有状态在 $t \in [0, +\infty)$ 上有定义且是有界的. 此外, 存在足够大的时间 $T_\delta > 0$, 使得 $|y(t)| = |\zeta_1(t) - y_r(t)| \leq \delta, \forall t \geq T_\delta$.

由于仅系统输出, 而非 ζ_1 和 y_r , 是可量测的, 因此本文待研究的系统(1)不同于文献[2,4,5,7]中的系统. 假设1意味着系统(1)的非线性增长依赖于不可测状态, 且其增长率是关于 ζ_1 的多项式函数. 需指出的是, 增长率中的 c_0 是已知常数. 如何放宽该限制是一个很困难的问题, 还需要进一步的探讨. 假设2表明, 除了被跟踪信号 $y_r(t)$ 和其导数 $\dot{y}_r(t)$ 的上界已知外, 不再需要关于该信号的其他信息. 不同于文献[8], 假设3表明系统(1)具有不确定控制系数 g , 这会导致一些常用控制器设计方法失效, 特别是通常的高增益Luenberger型观测器^[9,10]不再适用. 如上所述, 关于系统和被跟踪信号的信息不充分, 很难实现系统(1)的渐近跟踪控制, 因此, 如何构造恰当的状态观测器, 进而设计系统(1)在假设1~3下的输出反馈实际跟踪控制器是一个很有意义的问题.

针对系统(1), 由于控制系数不确定, 因此构造了基于K-滤波器的状态观测器, 并设计了新的自适应输出反馈控制器, 实现了系统(1)的实际跟踪控制. 此外, 由于系统依赖于不可测状态的增长率是关于 ζ_1 的多项式函数, 文献[11,12]中的静态高增益K-滤波器失效, 因此设计了新的动态高增益K-滤波器. 该滤波器的增益由两部分组成: 一是充分大常数, 二是在线调节的变量. 前者主要对付系统中的不确定性, 而后者对付系统非线性项的输出多项式函数增长率. 其次, 基于该K-滤波器, 构造了系统(1)的状态观测器, 用于重构此系统的不可测状态. 最后, 应用反推设计方法, 给出了自适应输出反馈跟踪控制器

的设计步骤. 本文主要结果表明, 通过设计参数的适当选择, 所构造的控制器能保证闭环系统的所有状态全局有界, 并且可实现原系统的实际跟踪控制目标. 仿真算例验证了本文理论结果的正确性.

2 输出反馈实际跟踪控制(Practical tracking control by output feedback)

首先, 根据 $\zeta_1 = y + y_r$ 以及假设1和2, 对于任意 $i = 1, \cdots, n$, 有

$$|\psi_i(t, \zeta, u)| \leq c_0(1 + |y + y_r|^p) \sum_{j=1}^i |\zeta_j| + c_0 \leq \\ c(1 + |y|^p) \sum_{j=1}^i |\zeta_j| + c, \quad (2)$$

其中 $c \triangleq c_0 \max\{1 + 2^{p-1}c_1^p, 2^{p-1}\} \geq 0$ 是已知常数. 由此易知系统(1)的增长率是关于输出的多项式函数.

2.1 高增益K-滤波器和状态估计(High-gain K-filters and state estimation)

针对系统(1), 为了便于构造状态观测器, 首先引入下面的状态变换:

$$x_1 = y = \zeta_1 - y_r, \quad x_i = \zeta_i, \quad i = 2, \cdots, n. \quad (3)$$

由此以及系统(1)可得

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i(t, y_r, x, u), \\ \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ \dot{x}_n = gu + \phi_n(t, y_r, x, u), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} \phi_1(t, y_r, x, u) &= \psi_1(t, x_1 + y_r, x_2, \cdots, x_n, u) - \dot{y}_r, \\ \phi_i(t, y_r, x, u) &= \psi_i(t, x_1 + y_r, x_2, \cdots, x_n, u), \\ i &= 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

显然, 在状态变换(3)下, 系统(1)的实际跟踪控制问题可通过研究系统(4)的相应镇定问题来解决, 即设计控制器, 使得系统(4)的所有状态有界, 并且系统的输出收敛到零点的既定小邻域内. 下文中, 为简便起见, 在不引起混淆的情况下, 将省略某些函数的自变量.

针对系统(4), 若构造Luenberger型观测器, 则相应的状态估计误差动态将依赖于控制输入 u , 这使得控制器的设计相当困难, 甚至无法实现. 另一方面, 对于控制系数不确定的非线性系统, 文献[11,12]基于静态高增益K-滤波器实现了输出反馈稳定控制的设计. 在此基础上, 设计如下动态高增益K-滤波

器:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = -r^i l_i \xi_1 + \xi_{i+1} + r^i l_i y, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_n = -r^n l_n \xi_1 + r^n l_n y, \\ \dot{l}_i = -r^i l_i l_1 + l_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{l}_n = -r^n l_n l_1 + u, \end{cases} \quad (5)$$

其中: $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$, $l = [l_1, \dots, l_n]^T$; $\xi(0) = \xi_0$, $l(0) = l_0$; $l = [l_1, \dots, l_n]^T$ 是待定的常向量; $r(t) = LM(t)$ 是动态增益, 特别地, $L \geq 1$ 是一个待定的常数增益, $M(t)$ 满足如下动态方程:

$$\dot{M} = -\beta_1 M^2 + \beta_2 (1 + |y|^p)^2 M, \quad M(0) = 1. \quad (6)$$

上式中 β_1 和 β_2 是满足 $0 < \beta_1 \leq \beta_2$ 的待定常数. 不难证明, 在式(6)的解的存在区间内, 总有 $M \geq 1$. 因此, $r \geq 1$, 故K-滤波器(5)是高增益的.

定义状态估计 $\hat{x}_i = \xi_i + gl_i$, $i = 1, \dots, n$. 则状态估计误差 $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, n$ 满足

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = -r^i l_i \tilde{x}_1 + \tilde{x}_{i+1} + \phi_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\tilde{x}}_n = -r^n l_n \tilde{x}_1 + \phi_n. \end{cases} \quad (7)$$

为便于控制设计和系统性能分析, 引入下面的变换:

$$\begin{cases} \epsilon_i = \frac{\tilde{x}_i}{r^{a+i-1}}, \quad \eta_i = \frac{\xi_i}{r^{a+i-1}}, & i = 1, \dots, n, \\ \epsilon_1 = \frac{y}{r^a}, \quad \epsilon_i = \frac{l_i}{r^{a+i-1}}, & i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (8)$$

其中常数 $0 < a < \frac{1}{2p}$.

综合式(4)(5)(7)和(8), 可得如下用于控制设计的系统:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = rA\epsilon + \varphi - \frac{\dot{r}}{r}D_a\epsilon, \\ \dot{\eta} = rA\eta + rl\epsilon_1 - \frac{\dot{r}}{r}D_a\eta, \\ \dot{\epsilon}_1 = gr\epsilon_2 + r\epsilon_2 + r\eta_2 + \varphi_1 - \frac{a\dot{r}}{r}\epsilon_1, \\ \dot{\epsilon}_i = \frac{rl_i}{g}(\epsilon_1 + \eta_1 - \epsilon_1) + r\epsilon_{i+1} - \frac{(a+i-1)\dot{r}}{r}\epsilon_i, \\ \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{\epsilon}_n = \frac{rl_n}{g}(\epsilon_1 + \eta_1 - \epsilon_1) + \frac{u}{r^{a+n-1}} - \frac{(a+n-1)\dot{r}}{r}\epsilon_n, \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} \epsilon &= [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]^T, \quad \eta = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T, \\ D_a &= \text{diag}\{a, \dots, a+n-1\}, \\ \varphi &= [\frac{\phi_1}{r^a}, \dots, \frac{\phi_n}{r^{a+n-1}}]^T, \\ A &= [-l, e_1, \dots, e_{n-1}], \end{aligned}$$

$e_i \in \mathbb{R}^n$ 表示第 i 个元素为1, 其余元素为0的向量. 向

量 l 的选择使得存在常数 $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ 和对称正定矩阵 P 满足如下矩阵不等式(根据文献[10]中的引理1):

$$A^T P + PA \leq -I, \quad h_1 I \leq D_a P + P D_a \leq h_2 I. \quad (10)$$

注意到 $y = \epsilon_1 r^a$, 不难看出, 若能够设计控制器, 使得由式(6)和(9)组成系统的所有状态有界且 $\epsilon_1 r^a$ 收敛到零点的既定小邻域内, 则由系统(4)知, 该控制器就是原系统(1)的待求实际跟踪控制器. 因此, 下面将针对式(6)和(9), 设计满足上述要求的输出反馈控制器. 如下两个命题在随后的控制设计和性能分析中起着十分重要的作用. 具体地, 命题1和2分别刻画了系统(9)中子系统 ϵ 和 η 的输入到状态稳定(ISS)特性. 此外, 为了使上下文更加紧凑, 命题1的证明将在附录中给出.

命题1 对于系统(9)的子系统 ϵ , 令 $V_\epsilon = \epsilon^T P \epsilon$. 则在系统(9)解存在的区间内, 存在已知的正常数 $\sigma_{0,1}$ 和 $\sigma_{0,2}$, 满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_\epsilon &\leq -(r - h_2 \beta_1 M - 2) \|\epsilon\|^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 + \|\eta\|^2 - \\ &\quad (h_1 \beta_2 - \sigma_{0,1})(1 + |y|^p)^2 \|\epsilon\|^2 + \sigma_{0,2}. \end{aligned} \quad (11)$$

命题2 对于系统(9)的子系统 η , 令 $V_\eta = \eta^T P \eta$. 则在系统(9)解存在的区间内, 有

$$\dot{V}_\eta \leq -(\frac{r}{2} - h_2 \beta_1 M) \|\eta\|^2 + 2 \|Pl\|^2 r \epsilon_1^2. \quad (12)$$

证 沿着系统(9)的子系统 η 的轨迹, V_η 满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta &\leq -r \|\eta\|^2 + 2r \eta^T Pl \epsilon_1 - \\ &\quad \frac{\dot{r}}{r} \eta^T (D_a P + P D_a) \eta. \end{aligned} \quad (13)$$

首先, 由完全配方技术可得 $2r \eta^T Pl \epsilon_1 \leq \frac{r}{2} \|\eta\|^2 + 2 \|Pl\|^2 r \epsilon_1^2$. 其次, 由式(6)和(10), 以及 $h_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ 可得

$$\begin{aligned} &-\frac{\dot{r}}{r} \eta^T (D_a P + P D_a) \eta \leq \\ &h_2 \beta_1 M \|\eta\|^2 - h_1 \beta_2 (1 + |y|^p)^2 \|\eta\|^2 \leq \\ &h_2 \beta_1 M \|\eta\|^2. \end{aligned}$$

将这两个不等式代入式(13)中即得式(12). 证毕.

2.2 输出反馈控制设计(Output feedback control design)

本小节利用反推法设计系统(6)和(9)的输出反馈控制器, 整个设计过程将以递推的形式给出. 具体地, 第1步是整个设计过程的起始步, 展现了所应用的主要技术; 第2步是迭代过程(第 k 步, $k = 2, \dots, n$)的起始步.

第1步 选取候选Lyapunov函数 $V_1 = V_\epsilon + V_\eta + \frac{1}{2} \epsilon_1^2$, 其中 V_ϵ 和 V_η 的定义已分别在命题1和2中给出.

则由式(9)及命题1和2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -(r - h_2\beta_1 M - 2)\|\epsilon\|^2 - \left(\frac{r}{2} - h_2\beta_1 M - \right. \\ & \left. 1\right)\|\eta\|^2 - (h_1\beta_2 - \sigma_{0,1})(1 + |y|^p)^2\|\epsilon\|^2 + \\ & 2\|Pl\|^2 r \epsilon_1^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 + \sigma_{0,2} + \epsilon_1(gr\epsilon_2 + \\ & r\epsilon_2 + r\eta_2 + \varphi_1 - \frac{a\dot{r}}{r}\epsilon_1). \end{aligned} \quad (14)$$

首先, 利用完全配方技术处理式(14)中的如下几项:

$$\begin{cases} r\epsilon_1(\eta_2 + \epsilon_2) \leq 2r\epsilon_1^2 + \frac{r}{4}(\|\eta\|^2 + \|\epsilon\|^2), \\ \epsilon_1\varphi_1 \leq \frac{1}{2}(1 + |y|^p)^2\epsilon_1^2 + c^2c_1^2 + 1 + \\ (c^2 + \frac{1}{4}(c + c_1)^2)\epsilon_1^2. \end{cases}$$

将上述不等式代入式(14), 并注意到 $r \geq 1$ 和 $-\frac{\dot{r}}{r} = \beta_1 M - \beta_2(1 + |y|^p)^2$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\left(\frac{1}{4}r - h_2\beta_1 M - 2\right)(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - (h_1\beta_2 - \\ & \sigma_{0,1})(1 + |y|^p)^2\|\epsilon\|^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^n \epsilon_i^2 + \bar{\alpha}_1 r \epsilon_1^2 - \\ & (a\beta_2 - \frac{1}{2})(1 + |y|^p)^2\epsilon_1^2 + \sigma_1 + gr\epsilon_1\epsilon_2, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\bar{\alpha}_1 = 2\|Pl\|^2 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}(c + c_1)^2 + a\beta_1 + c^2$ 和 $\sigma_1 = c^2c_1^2 + 1 + \sigma_{0,2}$ 是已知的正常数.

至此, 选择虚拟控制器

$$\epsilon_2^* = -\frac{\text{sgn } g}{g_N}(b_1 + \bar{\alpha}_1)\epsilon_1 =: -\text{sgn } g\alpha_1\epsilon_1, \quad (16)$$

其中: $\alpha_1 > 0$ 是已知常数, $b_1 > 0$ 是待定的设计参数.

为了简便并使整个设计过程保持一致, 定义 $z_1 = \epsilon_1 - \epsilon_1^*$, 其中 $\epsilon_1^* = 0$, 以及 $z_2 = \epsilon_2 - \epsilon_2^*$. 将式(16)代入式(15), 并选择 $\beta_2 > \frac{\sigma_{0,1}}{h_1}$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\left(\frac{1}{4}r - h_2\beta_1 M - 2\right)(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) + \\ & \frac{1}{4} \sum_{i=2}^n \epsilon_i^2 - (a\beta_2 - \frac{1}{2})(1 + |y|^p)^2 z_1^2 - \\ & b_1 r z_1^2 + \sigma_1 + gr z_1 z_2. \end{aligned} \quad (17)$$

第2步 选取候选Lyapunov函数 $V_2 = \gamma_1 V_1 + \frac{1}{2} z_2^2$, 其中常数 $\gamma_1 > 0$ 是待定的设计参数. 则由式(9)和 $z_2 = \epsilon_2 + \text{sgn } g\alpha_1\epsilon_1$, 可得

$$\dot{V}_2 = \gamma_1 \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2, \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & r\epsilon_3 - \frac{(a+1)\dot{r}}{r} z_2 + \frac{\dot{r}}{r} d_{2,1}^{z_1} z_1 + \sum_{i=1}^2 d_2^{z_i} r z_i + \\ & \sum_{i=1}^2 r(d_2^{\epsilon_i} \epsilon_i + d_2^{\eta_i} \eta_i) + d_2^{\varphi_1} \varphi_1, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} d_{2,1}^{z_1} &= \text{sgn } g\alpha_1, \quad d_2^{z_1} = -(g\alpha_1^2 + \frac{l_2}{g}), \\ d_2^{z_2} &= |g|\alpha_1, \quad d_2^{\epsilon_1} = \frac{l_2}{g}, \quad d_2^{\epsilon_2} = \text{sgn } g\alpha_1, \\ d_2^{\eta_1} &= \frac{l_2}{g}, \quad d_2^{\eta_2} = \text{sgn } g\alpha_1, \quad d_2^{\varphi_1} = \text{sgn } g\alpha_1. \end{aligned}$$

由其定义, 可知常数 $d_{2,1}^{z_1}, d_2^{z_i}, d_2^{\epsilon_i}, d_2^{\eta_i}, i = 1, 2$ 和 $d_2^{\varphi_1}$ 中有些是未知的, 但由假设3易知它们都有已知的非负上界. 为了方便起见, 设这些常数的上界分别为 $\bar{d}_{2,1}^{z_1}, \bar{d}_2^{z_i}, \bar{d}_2^{\epsilon_i}, \bar{d}_2^{\eta_i}, i = 1, 2$ 和 $\bar{d}_2^{\varphi_1}$.

首先, 利用完全配方技术处理式(18)中需要估计的项, 可得

$$\begin{cases} gr z_1 z_2 \leq r z_1^2 + \frac{1}{4} \max\{1, g_M^2\} r z_2^2, \\ (\frac{\dot{r}}{r} d_{2,1}^{z_1} + d_2^{z_1} r) z_1 z_2 \leq \\ 2\gamma_1 r z_1^2 + \frac{1}{4\gamma_1} (\beta_1^2 (\bar{d}_{2,1}^{z_1})^2 + (\bar{d}_2^{z_1})^2) r z_2^2 + \\ \beta_2 (1 + |y|^p)^2 (\frac{1}{4} (\bar{d}_{2,1}^{z_1})^2 z_1^2 + z_2^2), \\ \sum_{i=1}^2 r (d_2^{\eta_i} \eta_i + d_2^{\epsilon_i} \epsilon_i) z_2 \leq \\ \frac{\gamma_1}{8} r (\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) + \frac{2}{\gamma_1} \sum_{i=1}^2 ((\bar{d}_2^{\epsilon_i})^2 + (\bar{d}_2^{\eta_i})^2) r z_2^2, \\ d_2^{\varphi_1} \varphi_1 z_2 \leq \\ (1 + |y|^p)^2 (\gamma_1 z_1^2 + z_2^2) + (1 + \frac{c^2}{4\gamma_1} (\bar{d}_2^{\varphi_1})^2) z_2^2 + \\ \frac{1}{4} (\bar{d}_2^{\varphi_1})^2 (c^2 c_1^2 + (c + c_1)^2). \end{cases} \quad (19)$$

选择虚拟控制器

$$\epsilon_3^* = -\alpha_2(\gamma_1) z_2, \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= b_2 + \bar{\alpha}_2, \\ \bar{\alpha}_2 &= \\ \frac{\gamma_1}{2} &+ \frac{c^2}{4\gamma_1} (\bar{d}_2^{\varphi_1})^2 + 1 + (a+1)\beta_1 + \\ \frac{\gamma_1}{4} &\max\{1, g_M^2\} + \frac{1}{4\gamma_1} ((\bar{d}_{2,1}^{z_1})^2 + \\ \beta_1^2 &(\bar{d}_{2,1}^{z_1})^2) + \bar{d}_2^{z_2} + \frac{2}{\gamma_1} \sum_{i=1}^2 ((\bar{d}_2^{\epsilon_i})^2 + (\bar{d}_2^{\eta_i})^2) \end{aligned}$$

是已知常数, $b_2 > 0$ 是待定的设计参数.

类似地, 定义 $z_3 = \epsilon_3 - \epsilon_3^*$. 注意到 $\epsilon_2^* = (z_2 - \text{sgn } g\alpha_1 z_1) \leq 2z_2^2 + 2\alpha_1^2 z_1^2$, 则由式(19)(20)和(18)得

$$\dot{V}_2 \leq -\gamma_1 \left(\frac{1}{8}r - h_2\beta_1 M - 2\right)(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) -$$

$$(\rho_{1,1}(\gamma_1)\beta_2 - 3/2\gamma_1)(1 + |y|^p)^2 z_1^2 + \sigma_2 - (a\beta_2 - 1)(1 + |y|^p)^2 z_2^2 - \gamma_1((b_1 - 3)r - \frac{1}{2}\alpha_1^2)z_1^2 - b_2 r z_2^2 + \frac{1}{4}\gamma_1 \sum_{i=3}^n \varepsilon_i^2 + r z_2 z_3, \quad (21)$$

其中: $\sigma_2 = \gamma_1 \sigma_1 + \frac{1}{4}(\bar{d}_2^{\varphi_1})^2(c^2 c_1^2 + (c + c_1)^2)$, $\rho_{1,1} = a\gamma_1 - \frac{1}{4}(\bar{d}_{2,1}^{z_1})^2$ 都是已知的正常数.

迭代步 假设在第 $k-1$ 步, $k = 3, \dots, n$, 存在一个正定、径向无界的可微函数 $V_{k-1}(\epsilon, \eta, z_1, \dots, z_{k-1})$, 使得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k-1} \leq & - \prod_{i=1}^{k-2} \gamma_i \left(\frac{r}{2^k} - h_2 \beta_1 M - 2 \right) (\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - \\ & (\rho_{k-2,1}(\gamma_{[k-2]})\beta_2 - (k-3/2) \prod_{i=1}^{k-2} \gamma_i)(1 + |y|^p)^2 \times \\ & z_1^2 - \sum_{i=2}^{k-2} (\rho_{k-2,i}(\gamma_{[k-2]})\beta_2 - \prod_{j=1}^{k-2} \gamma_j)(1 + |y|^p)^2 z_i^2 - \\ & (a\beta_2 - 1)(1 + |y|^p)^2 z_{k-1}^2 - \sum_{i=1}^{k-2} \prod_{j=i}^{k-2} \gamma_j ((b_i - 2k + \\ & 2i + 1)r - \frac{1}{2} \prod_{p=1}^{i-1} \gamma_p \alpha_i^2) z_i^2 - b_{k-1} r z_{k-1}^2 + \sigma_{k-1} + \\ & \frac{1}{4} \prod_{j=1}^{k-2} \gamma_j \sum_{i=k}^n \varepsilon_i^2 + r z_{k-1} z_k, \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $z_i = \varepsilon_i - \varepsilon_i^*$, $i = 1, \dots, k$, 且当 $i = 2, \dots, k-1$ 时, z_i 满足

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = & r \varepsilon_{i+1} - \frac{(a+i-1)\dot{r}}{r} z_i + \frac{\dot{r}}{r} \sum_{j=1}^{i-1} d_{i,1}^{z_j} z_j + \\ & \sum_{j=1}^i d_i^{z_j} r z_j + \sum_{j=1}^2 r (d_i^{\epsilon_j} \epsilon_j + d_i^{\eta_j} \eta_j) + d_i^{\varphi_1} \varphi_1, \end{aligned} \quad (23)$$

虚拟控制器 ε_i^* 的定义为

$$\begin{cases} \varepsilon_1^* = 0, \\ \varepsilon_2^* = -\text{sgn } g \alpha_1 z_1, \\ \varepsilon_i^* = -\alpha_{i-1}(\gamma_{[i-2]}) z_{i-1}, \quad i = 3, \dots, k. \end{cases}$$

此处及下文中, $\gamma_{[i]}$ 表示 $[\gamma_1, \dots, \gamma_i]^T$, 其中常数 $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, k-2$ 是待定的设计参数.

下面将证明上述结论在第 k 步仍然成立. 为此, 选取候选 Lyapunov 函数

$$V_k = \gamma_{k-1} V_{k-1} + \frac{1}{2} z_k^2.$$

则 V_k 满足

$$\dot{V}_k = \gamma_{k-1} \dot{V}_{k-1} + z_k \dot{z}_k. \quad (24)$$

为了表达方便, 令 $\varepsilon_{n+1} = \frac{u}{r^{a+n}}$. 由式(9)(23)及 $z_k = \varepsilon_k + \alpha_{k-1} z_{k-1}$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_k = & r \varepsilon_{k+1} - \frac{(a+k-1)\dot{r}}{r} z_k + \frac{\dot{r}}{r} \sum_{i=1}^{k-1} d_{k,1}^{z_i} z_i + \\ & \sum_{i=1}^k d_k^{z_i} r z_i + \sum_{i=1}^2 r (d_k^{\epsilon_i} \epsilon_i + d_k^{\eta_i} \eta_i) + d_k^{\varphi_1} \varphi_1, \end{aligned} \quad (25)$$

其中:

$$\begin{aligned} d_{k,1}^{z_i} &= \alpha_{k-1} d_{k-1,1}^{z_i}, \quad i = 1, \dots, k-2, \\ d_{k,1}^{z_{k-1}} &= \alpha_{k-1}, \quad d_{k,1}^{z_1} = \alpha_{k-1} d_{k-1}^{z_1} - \frac{l_k}{g}, \\ d_k^{z_i} &= \alpha_{k-1} d_{k-1}^{z_i}, \quad i = 2, \dots, k-2, \\ d_k^{z_{k-1}} &= \alpha_{k-1} d_{k-1}^{z_{k-1}} - \alpha_{k-1}^2, \quad d_k^{z_k} = \alpha_{k-1}, \\ d_k^{\epsilon_1} &= \alpha_{k-1} d_{k-1}^{\epsilon_1} + \frac{l_k}{g}, \quad d_k^{\epsilon_2} = \alpha_{k-1} d_{k-1}^{\epsilon_2}, \\ d_k^{\eta_1} &= \alpha_{k-1} d_{k-1}^{\eta_1} + \frac{l_k}{g}, \quad d_k^{\eta_2} = \alpha_{k-1} d_{k-1}^{\eta_2}, \\ d_k^{\varphi_1} &= \alpha_{k-1} d_{k-1}^{\varphi_1}. \end{aligned}$$

类似地, 设这些常数的已知上界分别为 $\bar{d}_{k,1}^{z_i}, i = 1, \dots, k-1, \bar{d}_k^{z_i}, i = 1, \dots, k, \bar{d}_k^{\epsilon_i}, \bar{d}_k^{\eta_i}, i = 1, 2$ 和 $\bar{d}_k^{\varphi_1}$.

将式(25)代入式(24), 进而估计其中的如下项:

$$\begin{cases} r z_{k-1} z_k \leq r z_{k-1}^2 + \frac{1}{4} \max\{1, g_M^2\} r z_k^2, \\ \left(\frac{\dot{r}}{r} d_{k,1}^{z_i} + d_k^{z_i} r \right) z_i z_k \leq \\ \frac{1}{4 \prod_{j=i}^{k-1} \gamma_j} (\beta_1^2 (\bar{d}_{k,1}^{z_i})^2 + (\bar{d}_k^{z_i})^2) r z_k^2 + \\ 2 \prod_{j=i}^{k-1} \gamma_j r z_i^2 + \beta_2 (1 + |y|^p)^2 \left(\frac{1}{4} (\bar{d}_{k,1}^{z_i})^2 z_i^2 + z_k^2 \right), \\ i = 1, \dots, k-1, \\ \sum_{i=1}^2 r (d_k^{\eta_i} \eta_i + d_k^{\epsilon_i} \epsilon_i) z_k \leq \\ \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i \frac{1}{2^{k+1}} r (\|\eta\|^2 + \|\epsilon\|^2) + \\ \frac{2^{k-1}}{\prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j} \sum_{i=1}^2 ((\bar{d}_k^{\epsilon_i})^2 + (\bar{d}_k^{\eta_i})^2) r z_k^2, \\ d_k^{\varphi_1} \varphi_1 z_k \leq \\ (1 + |y|^p)^2 \left(\prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i z_1^2 + z_k^2 \right) + \\ \left(1 + \frac{c^2}{4 \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i} (\bar{d}_k^{\varphi_1})^2 \right) z_k^2 + \\ \frac{1}{4} (\bar{d}_k^{\varphi_1})^2 (c^2 c_1^2 + (c + c_1)^2). \end{cases} \quad (26)$$

然后,选择虚拟控制器

$$\varepsilon_{k+1}^* = -\alpha_k(\gamma_{[k-1]})z_k, \quad (27)$$

其中:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= b_k + \bar{\alpha}_k, \\ \bar{\alpha}_k &= \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i + \frac{c^2(\bar{d}_k^{\varphi_1})^2}{4 \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i} + 1 + (a+k-1)\beta_1 + \\ &\sum_{i=1}^{k-1} \frac{((\bar{d}_k^{z_i})^2 + \beta_1^2(\bar{d}_{k,1}^{z_i})^2)}{4 \prod_{j=i}^{k-1} \gamma_j} + \bar{d}_k^{z_k} + \\ &\frac{\gamma_{k-1}}{4} \max\{1, g_M^2\} + \frac{2^{k-1}}{\prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j} \sum_{i=1}^2 ((\bar{d}_k^{\varepsilon_i})^2 + (\bar{d}_k^{\eta_i})^2) \end{aligned}$$

是已知常数, $b_k > 0$ 是特定的设计参数.

定义 $z_{k+1} = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k+1}^*$. 注意到

$$\varepsilon_k^2 = (z_k - \alpha_{k-1}z_{k-1})^2 \leq 2z_k^2 + 2\alpha_{k-1}^2 z_{k-1}^2,$$

则由式(25)~(27)和式(24)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq - \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i \left(\frac{r}{2^{k+1}} - h_2\beta_1 M - 2 \right) (\|\varepsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - \\ &(\rho_{k-1,1}(\gamma_{[k-1]})\beta_2 - (k-1/2) \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i)(1 + \\ &|y|^p)^2 z_1^2 - \sum_{i=2}^{k-1} (\rho_{k-1,i}(\gamma_{[k-1]})\beta_2 - \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j) \times \\ &(1 + |y|^p)^2 z_i^2 - (a\beta_2 - 1)(1 + |y|^p)^2 z_k^2 - \\ &\sum_{i=1}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-1} \gamma_j ((b_i - 2k + 2i - 1)r - \\ &\frac{1}{2} \prod_{p=1}^{i-1} \gamma_p \alpha_i^2) z_i^2 - b_k r z_k^2 + \frac{1}{4} \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j \sum_{i=k+1}^n \varepsilon_i^2 + \\ &\sigma_k + r z_k z_{k+1}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\sigma_k = \gamma_{k-1}\sigma_{k-1} + \frac{1}{4}(\bar{d}_k^{\varphi_1})^2(c^2c_1^2 + (c+c_1)^2)$$

是已知的正常数, 并且

$$\begin{cases} \rho_{k-1,k-1} = a\gamma_{k-1} - \frac{1}{4}(\bar{d}_{k,1}^{z_{k-1}})^2, \\ \rho_{k-1,i} = \gamma_{k-1}\rho_{k-2,i} - \frac{1}{4}(\bar{d}_{k,1}^{z_i})^2, \\ i = 1, \dots, k-2. \end{cases} \quad (29)$$

在最后一步, 通过迭代过程, 可得实际控制器:

$$u = -r^{a+n}\alpha_n(\gamma_{[n-1]})z_n. \quad (30)$$

式(28)中, 令 $k = n$, 并注意到 $z_{n+1} = 0$ 和 $\sum_{i=n+1}^n \varepsilon_i^2 =$

0, 可得 $\dot{V}_n$ 的表达式, 其中 $V_n(\varepsilon, \eta, z)$ 是如下正定、径向无界函数:

$$V_n = \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i (\varepsilon^T P \varepsilon + \eta^T P \eta) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j z_i^2. \quad (31)$$

此处及下文中, 约定当 $i > j$ 时, $\prod_{p=i}^j \gamma_p = 1$.

至此, 系统(6)和(9)的输出反馈控制设计完毕.

3 主要结果(Main results)

本小节概括了本文的主要结果, 并给出了上小节所设计控制器中待定的设计参数的选择方式. 为了保证所设计的控制器达到实际跟踪目标, 首先需选择恰当的设计参数使得 $\dot{V}_n < 0$. 由此及式(29)和 $\beta_2 > \frac{\sigma_{0,1}}{h_1}$ (已在第1步中给出), 只需选择设计参数 $b_i (i=1, \dots, n)$, $\gamma_i (i=1, \dots, n-1)$, β_1 , β_2 和 L 满足

$$\begin{cases} \rho_{n-1,1}(\gamma_{[n-1]})\beta_2 - (n-1/2) \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i > 0, \\ \rho_{n-1,i}(\gamma_{[n-1]})\beta_2 - \prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j > 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \beta_2 > \frac{\sigma_{0,1}}{h_1}, \quad a\beta_2 - 1 > 0, \\ \frac{LM}{2^{n+1}} - h_2\beta_1 M - 2 \geq K_1, \\ (b_i - 2n + 2i - 1)LM - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j \alpha_i^2 \geq K_2, \\ i = 1, \dots, n-1, \quad b_n LM \geq K_2, \end{cases} \quad (32)$$

其中 K_1 和 K_2 是任意给定的正数.

如下引理指出了满足式(32)的设计参数的存在性, 并在附录的证明过程中给出了这些参数的一种选择方式.

引理 1 对于任意常数 $0 < a < \frac{1}{2p}$, 总是存在

正的设计参数 $b_i (i=1, \dots, n)$, $\gamma_i (i=1, \dots, n-1)$, β_1 , β_2 和 L , 使得式(32)成立.

下面定理概括了本文的主要结果.

定理 1 设系统(1)满足假设1~3. 如果常向量 l 满足式(10), 且设计参数 $b_i (i=1, \dots, n)$, β_1 , β_2 , $\gamma_i (i=1, \dots, n-1)$ 和 L 满足式(32), 则基于高增益K-滤波器(5)和(6)的自适应输出反馈控制器(30)能确保闭环系统的所有状态在 $[0, +\infty)$ 上有定义(well-defined)且是有界的, 同时可实现系统(1)的全局实际跟踪控制, 即对于任意 $\delta > 0$, 存在足够大的时间 $T_\delta > 0$, 使得 $|y(t)| \leq \delta, \forall t \geq T_\delta$.

证 容易验证, 闭环系统方程的右边关于 $(\varepsilon, \eta,$

z, M)在其初值的邻域内是局部Lipschitz的, 所以闭环系统在小区间 $[0, t_f)$ 内有唯一解(见文献[13]中18页 Theorem 3.1). 设 $[0, T_f]$ 是此唯一解的最大解存在区间, 其中 $0 < T_f \leq +\infty$ (见文献[13]中17页 Theorem 2.1). 如果 $T_f = +\infty$, 则整个闭环系统在 $[0, +\infty)$ 上有定义.

在后续证明过程中, 假设设计参数已按照引理1的证明过程适当选择, 且为了方便起见, 令 $L^* = \frac{1}{2}L$. 如此, 根据式(31), $k = n$ 时的式(28)和 $M \geq 1$, 则在 $[0, T_f]$ 上, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq - \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i (K_1 + \frac{L}{2^{n+2}}) (\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - \\ &\quad \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j (K_2 + \frac{1}{2} b_i^* L) z_i^2 + \sigma_n \leq \\ &\quad \sigma_n - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma_i L}{2^{n+2}} (\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j b_i^* L z_i^2 \leq -\beta L V_n + \sigma_n, \quad (33) \end{aligned}$$

其中 $\beta > 0$ 是恰当的已知常数. 那么, 由式(33)和比较原理^[14], 可得

$$\begin{aligned} V_n(\epsilon(t), \eta(t), z(t)) &\leq \\ \frac{\sigma_n}{\beta L} + \exp(-\beta L t) &(-\frac{\sigma_n}{\beta L} + \\ V_n(\epsilon(0), \eta(0), z(0))) &< +\infty, \quad t \in [0, T_f]. \quad (34) \end{aligned}$$

这意味着 V_n 在 $[0, T_f]$ 上是有界的. 进而得出 (ϵ, η, z) 在 $[0, T_f]$ 上也是有界的.

下面证明 M 在 $[0, T_f]$ 上是有界的. 因为 $z_1 = \frac{y}{r^a}$ 在 $[0, T_f]$ 上是有界的, 即存在常数 $N > 0$, 使得对任意 $t \in [0, T_f]$, 有 $|\epsilon_1(t)| \leq N$, 并进而有

$$|y(t)| \leq r^a(t)N = (LM(t))^a N.$$

由此以及式(6)和 $M(t) \geq 1, \forall t \in [0, T_f]$, 则在 $[0, T_f]$ 上,

$$\begin{aligned} \dot{M} &\leq \\ -\beta_1 M^2 + 2\beta_2(1 + N^{2p} L^{2ap} M^{2ap})M &\leq \\ -M^{1+2ap}(\beta_1 M^{1-2ap} - 2\beta_2(1 + N^{2p} L^{2ap})) &, \end{aligned}$$

并进而由 $1 - 2ap > 0$ 可得

$$\begin{cases} 1 \leq M(t) \leq (\frac{2\beta_2(1 + N^{2p} L^{2ap})}{\beta_1})^{\frac{1}{1-2ap}}, \\ t \in [0, T_f]. \end{cases} \quad (35)$$

由式(8)和已经证明的 (M, ϵ, η, z) 的有界性, 易知 $(y, \tilde{x}, \xi, l)$ 在 $[0, T_f]$ 上是有界的. 进而由式(3), $x = \tilde{x} + \xi + gl$ 和假设2知系统(1)的状态在 $[0, T_f]$ 上也是有界的. 闭环系统所有状态的有界性意味着 $T_f = +\infty$.

否则, 根据式(34)和 $[0, T_f]$ 是闭环系统解的最大存在区间, 有如下矛盾:

$$\begin{aligned} +\infty &= \lim_{t \rightarrow T_f^-} V_n(\epsilon(t), \eta(t), z(t)) \leq \\ \lim_{t \rightarrow T_f^-} \exp(-\beta L t) &(V_n(\epsilon(0), \eta(0), z(0)) - \\ \frac{\sigma_n}{\beta L}) + \frac{\sigma_n}{\beta L} &< +\infty, \end{aligned}$$

因此, $T_f = +\infty$.

最后证明, 当选择 L 充分大时, 可以实现系统(1)的全局实际跟踪控制. 因为 $T_f = +\infty$, 如果

$$\begin{aligned} t \geq T \triangleq \\ \max\{0, \frac{1}{\beta L} \ln \frac{\beta L(1 + V_n(\epsilon(0), \eta(0), z(0)))}{\sigma_n}\}, \end{aligned}$$

则

$$\exp(-\beta L t) V_n(\epsilon(0), \eta(0), z(0)) \leq \frac{\sigma_n}{\beta L}.$$

由此及式(34)可得

$$V_n(\epsilon(t), \eta(t), z(t)) \leq \frac{2\sigma_n}{\beta L}, \quad \forall t \geq T. \quad (36)$$

进而由 V_n 的表达式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_1^2(t) &\leq \\ V_n(\epsilon(t), \eta(t), z(t)) &\leq \frac{2\sigma_n}{\beta L}, \quad \forall t \geq T. \end{aligned}$$

故有

$$\epsilon_1^2(t) = z_1^2(t) \leq \frac{4\sigma_n}{\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i \beta L} =: \frac{c_2}{L}, \quad \forall t \geq T.$$

又因为 $\epsilon_1 = \frac{y}{r^a}$, 则

$$\left| \frac{y(t)}{M^a(t)} \right| \leq L^a |\epsilon_1(t)| \leq \sqrt{c_2} L^{a-0.5}, \quad \forall t \geq T. \quad (37)$$

分别用 $\sqrt{c_2} L^{a-0.5}$ 和 $[T, \infty)$ 替代式(35)中 $L^a N$ 和 $[0, T_f]$, 得到

$$M(t) \leq \left(\frac{2\beta_2(1 + c_2^p L^{(2a-1)p})}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{1-2ap}}, \quad t \in [T, \infty).$$

由此及式(37), 有

$$\begin{aligned} y^2(t) &\leq \frac{c_2}{L^{1-2a}} \left(\frac{2\beta_2(1 + c_2^p L^{-(1-2a)p})}{\beta_1} \right)^{\frac{2a}{1-2ap}}, \\ \forall t &\geq T. \end{aligned}$$

进而由 $1 - 2a > 0$ 可知, 当 $t > T$ 时, 通过选择足够大的 L , 可使 $|y(t)|$ 任意小, 即实现了系统(1)的全局实际跟踪控制. 证毕.

4 实例与仿真(Practical example and simulation)

上节针对系统(1), 给出了输出反馈实际跟踪控制器的设计方法. 尽管该系统结构特殊, 假设条件较强, 但实际中仍有该系统的特例, 例如下面动态方程刻画单接点机械手系统(见文献[15]第27页问题1.10.8):

$$\begin{cases} J_1 \ddot{q}_1 + F_1 \dot{q}_1 + k(q_1 - q_2) + Mgl \sin q_1 = 0, \\ J_m \ddot{q}_2 + F_m \dot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u, \\ y = q_1, \end{cases} \quad (38)$$

其中: q_1, q_2 分别是接点的位置和转子的位置; 电机转子惯量 J_m , 弹性常量 k , 接点质量 M , 万有引力常量 g , 中心点质量 l , 粘滞摩擦系数 F_1 和 F_m 都是正常数; 接点惯量 J_1 是未知的常数, 其符号和上下界已知; 电机转矩是控制 u . 假设只有 q_1 是可量测的, 被跟踪信号及其导数是有界的.

单接点机械手系统(38)是系统(1)的特例, 是因为在如下坐标变换下:

$$x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = \frac{k}{J_1} q_2, x_4 = \frac{k}{J_1} \dot{q}_2,$$

微分方程(38)等价于如下状态空间描述:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 - \frac{k}{J_1} x_1 - \frac{Mgl}{J} \sin x_1 - \frac{F_1}{J_1} x_2, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{k}{J_1 J_m} u + \frac{k^2}{J_1 J_m} x_1 - \frac{k}{J_m} x_3 - \frac{F_m}{J_m} x_4, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (39)$$

很显然, 上面系统的控制系数不确定, 非线性项依赖于不可测状态, 且满足假设1~3.

系统(39)的阶数为4, 其相应的K-滤波器阶数为8, 因此对该系统的仿真研究比较复杂. 另外, 仿真的主要目的是验证本文理论结果的正确性和有效性. 由于上述两方面的原因, 考虑如下2阶单输入单输出非线性系统的仿真研究:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2 + 0.1, \\ \dot{\zeta}_2 = gu + \zeta_2 \ln(1 + 0.01\zeta_1^2), \\ y = \zeta_1 - y_r. \end{cases} \quad (40)$$

设 $\max\{|y_r|, |\dot{y}_r|\} \leq 0.1$, $1 \leq |g| \leq 1.5$, 并且 g 的符号是正的. 容易验证此系统满足假设1~3, 其中 $c_0 = 0.1$, $p = 2$, $c_1 = 0.1$, $g_N = 1$, $g_M = 1.5$.

根据上节内容, 可为系统(40)设计形如式(30)的

输出反馈跟踪控制器. 令 $a = \frac{1}{7}$, $K_1 = 0.1$, $K_2 = 0.1$, 并选 $l = [2, 1]^T$. 再按照引理1的证明过程选择下列设计参数: $b_1 = 3.5$, $b_2 = 0.1$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 25$, $\gamma_1 = 132.8$, $L = 80$ ($L^* = 4$). 设 $g = 1$, $y_r = 0.1 \sin t$, 初始状态为 $\zeta_0 = [0.5, -0.5]^T$, $\xi(0) = 0$ 和 $l(0) = 0$, 通过仿真可得如下图1~6. 从这些图中可以看出闭环系统的状态是有界的, 并且0.04 s后, 跟踪误差满足 $|\zeta_1 - 0.1 \sin t| \leq 0.001$, 即实现了系统(40)的实际跟踪控制.

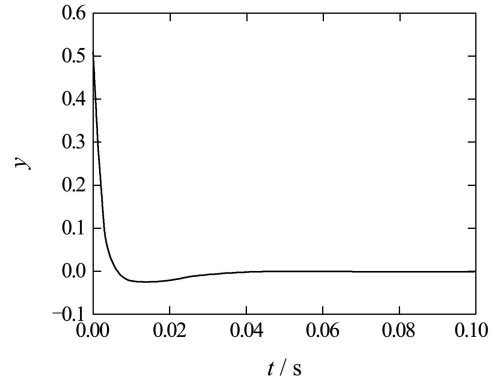


图1 跟踪误差 y

Fig. 1 The tracking error y

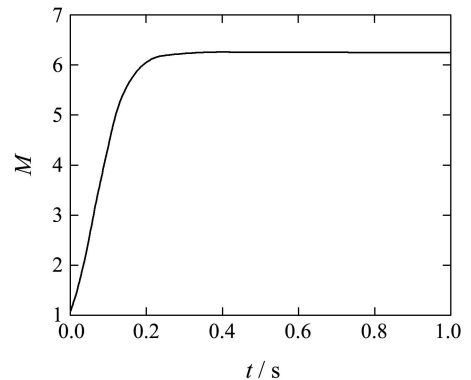


图2 滤波器增益 M

Fig. 2 Gain M of the K-filters

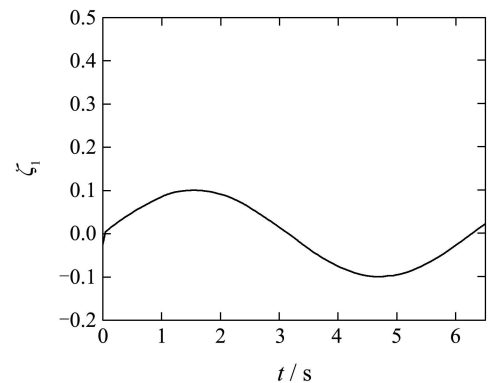
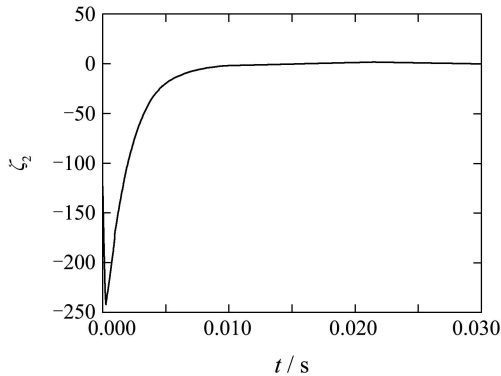
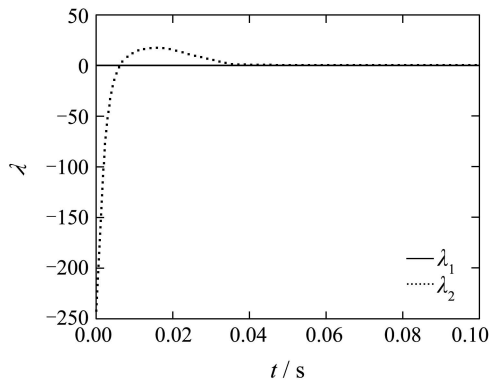
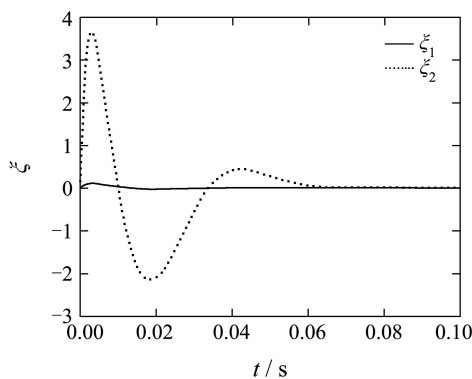


图3 系统状态 ζ_1

Fig. 3 System state ζ_1

图4 系统状态 ζ_2 Fig. 4 System state ζ_2 图5 K-滤波器状态 λ Fig. 5 State λ of the K-filters图6 K-滤波器状态 ξ Fig. 6 State ξ of the K-filters

5 结论(Concluding remarks)

本文研究了一类控制系数不确定且具有输出多项式函数增长率非线性系统的自适应输出反馈实际跟踪控制问题. 本文的主要贡献在于, 通过引入了新的动态高增益K-滤波器, 构造了基于此滤波器的恰当状态观测器, 并且利用反推法成功地设计了输出反馈控制器. 结果表明, 通过选择恰当的设计参数, 闭环系统的所有状态都是有界的, 并且, 当时间足够大时, 跟踪误差收敛到零点的既定小邻域内. 后续工

作将沿着此方向, 进一步研究更一般非线性系统的自适应跟踪控制问题.

参考文献(References):

- [1] HUANG J, LIN C F. On a robust nonlinear servomechanism problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(7): 1510 – 1513.
- [2] KRSTIĆ M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIĆ P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*[M]. New York: Wiley, 1995.
- [3] BYRNES C I, PISCOLI F D, ISIDORI A. *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*[M]. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [4] KRISHNAMURTHY P, KHORRAMI F, JIANG Z P. Global output feedback tracking for nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 814 – 819.
- [5] LIN W, PONGVUTHITHUM R. Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(10): 1737 – 1749.
- [6] HUANG J, CHEN Z Y. A general framework for tackling the output regulation problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2203 – 2218.
- [7] LIU Y G, ZHANG J F. Practical output-feedback risk-sensitive control for stochastic nonlinear systems with zero-dynamics[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, 45(3): 885 – 926.
- [8] GONG Q, QIAN C J. Global practical tracking of a class of nonlinear systems by output feedback[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 184 – 189.
- [9] LEI H, LIN W. Adaptive regulation of uncertain nonlinear systems by output feedback: a universal control approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(7/8): 529 – 537.
- [10] PRALY L, JIANG Z P. Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 53(2): 107 – 116.
- [11] LIU Y G. Global stabilization by output feedback for a class of nonlinear systems with uncertain control coefficients and unmeasured states dependent growth[J]. *Sciences in China(Series F)*, 2008, 51(10): 1508 – 1520.
- [12] SHANG F, LIU Y G. Output-feedback control for a class of uncertain nonlinear systems with linearly unmeasured states dependent growth[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(3): 272 – 280.
- [13] HALE J K. *Ordinary Differential Equations*[M]. Second Edition. New York: Krieger, 1980.
- [14] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. Third Edition. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [15] MARINO R, TOMEI P. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*[M]. New York: Prentice Hall, 1995.

附录 两个重要证明(Appendix Two important proofs)

A) 命题1的证明.

沿着系统(9)中 ϵ 子系统的轨迹, V_ϵ 满足

$$\dot{V}_\epsilon \leq -r\|\epsilon\|^2 + 2\epsilon^T P\varphi - \frac{\dot{r}}{r}\epsilon^T (D_a P + P D_a)\epsilon. \quad (A1)$$

首先处理式(A1)中不等号右边的第2项. 注意到 $r \geq 1$, $x_1 = y = r^a \epsilon_1$, $x_i = r^{a+i-1}(\epsilon_i + \eta_i + g\epsilon_i)$, $i = 2, \dots, n$, 则由式(2)可得

$$|\varphi_1| \leq \frac{1}{r^a}(c(1 + |y|^p)|\zeta_1| + c + |\dot{y}_r|) \leq$$

$$\begin{aligned}
& c(1 + |y|^p)|\varepsilon_1| + cc_1(1 + |y|^p) + c + c_1, \\
|\varphi_i| & \leq \frac{c}{r^{a+i-1}}(1 + |y|^p)(|y| + |y_r| + \sum_{j=2}^i |x_j|) + \\
& \frac{c}{r^{a+i-1}} \leq c \max\{\sqrt{n-1}, g_M\}(1 + \\
& |y|^p)(\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| + \|\epsilon\| + \|\eta\|) + \\
& cc_1(1 + |y|^p) + c.
\end{aligned}$$

从而 $\|\varphi\|_\infty \leq c \max\{\sqrt{n-1}, g_M\}(1 + |y|^p)(\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| + \|\epsilon\| + \|\eta\|) + cc_1(1 + |y|^p) + c + c_1$, 其中 $\|\varphi\|_\infty$ 表示其无穷范数. 进而根据完全配方技术可得

$$\begin{aligned}
2\epsilon^T P \varphi & \leq 2\|P\| \cdot \|\epsilon\| \cdot \|\varphi\|_\infty \leq \sigma_{0,1}(1 + |y|^p)^2 \|\epsilon\|^2 + \\
& \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 + 2\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2 + \sigma_{0,2}, \quad (A2)
\end{aligned}$$

其中 $\sigma_{0,1} = c^2 \|P\|^2 ((4n+2) \max\{n-1, g_M^2\} + c_1^2)$ 和 $\sigma_{0,2} = 1 + (c + c_1)^2 \|P\|^2$ 是已知正常数.

其次, 由式(6)和式(10)易知

$$\begin{aligned}
& -\frac{\dot{r}}{r} \epsilon^T (D_a P + P D_a) \epsilon = \\
& (\beta_1 M - \beta_2(1 + |y|^p)^2) \epsilon^T (D_a P + P D_a) \epsilon \leq \\
& h_2 \beta_1 M \|\epsilon\|^2 - h_1 \beta_2(1 + |y|^p)^2 \|\epsilon\|^2.
\end{aligned}$$

将此式和式(A2)代入式(A1)可得式(11). 证毕.

B) 引理1的证明.

只需给出满足式(32)的设计参数的一种选择即可. 由式(32), 这些设计参数的选择可按照如下顺序进行: 首先选择 $b_i, i = 1, \dots, n$ 和 $\gamma_i, i = 1, \dots, n-1$, 然后选择 β_1, β_2 , 最后选择 L .

1) $b_i, i = 1, \dots, n$ 和 $\gamma_i, i = 1, \dots, n-1$ 的选择.

首先, 对任意给定的 $b_i^* > 0, i = 1, \dots, n-1$ 和 $b_n^* \geq K_2$, 选择 $b_i = b_i^* + 2n - 2i + 1, i = 1, \dots, n-1, b_n = b_n^*$. 如此, 有 $b_i > 2n - 2i + 1, i = 1, \dots, n-1, b_n \geq K_2$, 进而由后面 L 的适当选择可确保式(32)中最后一行不等式的成立.

其次, 为了保证式(32)中前两行不等式的成立, 先选择 γ_i 使得 $\rho_{n-1,i}(\gamma_{[n-1]}) > 0, i = 1, \dots, n-1$. 如此, 由式(29), γ_1 需满足 $a\gamma_1 - \frac{1}{4}(\bar{d}_{2,1}^{z_1})^2 > 0$, 对任意 $i = 2,$

$\dots, n-1, \gamma_i$ 满足 $a\gamma_i - \frac{1}{4}(\bar{d}_{i+1,1}^{z_i})^2 > 0$ 和 $\gamma_i \cdot \rho_{i-1,j}(\gamma_{[i-1]}) - \frac{1}{4}(\bar{d}_{i+1,1}^{z_j})^2 > 0, j = 1, \dots, i-1$. 至此, 可选择

$$\begin{aligned}
\gamma_1 & > \frac{1}{4a}(\bar{d}_{2,1}^{z_1})^2, \\
\gamma_i & > \max\left\{\frac{1}{4a}(\bar{d}_{i+1,1}^{z_i})^2, \frac{1}{4\rho_{i-1,j}(\gamma_{[i-1]})}(\bar{d}_{i+1,1}^{z_j})^2, \right. \\
& \left. j = 1, \dots, i-1\right\}, i = 2, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

2) β_1, β_2 的选择.

为确保式(32)中前三行不等式成立, 并注意到已设定的关系 $0 < \beta_1 \leq \beta_2$, 只需选择 $\beta_1 > 0$, 并进而选择

$$\begin{aligned}
\beta_2 & > \max\left\{\beta_1, \frac{(n-1/2) \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i}{\rho_{n-1,1}(\gamma_{[n-1]})}, \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j}{\rho_{n-1,i}(\gamma_{[n-1]})}, \right. \\
& \left. i = 2, \dots, n-1, \frac{1}{a}, \frac{\sigma_{0,1}}{h_1}\right\}.
\end{aligned}$$

3) L 的选择.

为确保式(32)中最后两行不等式成立, 并注意到 $M \geq 1$, 只需选择

$$\begin{aligned}
L & \geq L^* + \max\{2^{n+1}(h_2\beta_1 + 2 + K_1), \frac{1}{b_i^*}(K_2 + \\
& \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j \alpha_i^2), i = 1, \dots, n-1, \frac{K_2}{b_n^*}\}, \quad (A3)
\end{aligned}$$

其中 $L^* \geq 1$ 是待定常数.

显然, 按上面过程选择设计参数确保式(32)成立.

证毕.

作者简介:

尚 芳 (1980—), 女, 博士研究生, 主要研究方向是非线性输出反馈控制、自适应控制理论等, E-mail: shangfang929@163.com;

刘允刚 (1970—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为随机控制、非线性系统分析、自适应控制等, E-mail: lygfr@sdu.edu.cn;

张承慧 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为工程优化控制、自适应控制、电气传动自动化及电力电子技术等, E-mail: zchui@sdu.edu.cn.