文章编号: 1000−8152(2011)02−0229−06

一类非线性系统的控制器和观测器设计

董亚丽, 刘金英

(天津工业大学 理学院, 天津 300160)

摘要: 研究一类非线性系统的全状态反馈控制问题、观测器设计问题及输出反馈控制设计问题. 首先设计出非线性全状态反馈控制器, 获得了系统指数镇定的充分条件. 然后提出了非线性观测器, 并证明了该观测器是指数稳定观测器. 进一步, 在控制器和观测器问题的充分条件满足的假设下, 证明了提出的带估计状态的反馈控制能达到指数镇定. 最后, 仿真实例验证了所得结果的有效性.

关键词: 控制器; 观测器; 非线性系统; 输出反馈; 指数镇定

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Controller and observer design for a class of nonlinear systems

DONG Ya-li, LIU Jin-ying

(School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160)

Abstract: This paper considers the full-state feedback control problem, the observer design problem and the output feedback control problem for a class of nonlinear systems. First, a linear full-state feedback controller is designed and a sufficient condition is derived, under which the exponential stabilization is achieved. Second, a nonlinear observer is proposed and it is shown to be an exponentially stable observer. Furthermore, given that the sufficient conditions of the controller and observer problem are satisfied, it is shown that the proposed controller with estimated state feedback from the proposed observer will achieve the exponential stabilization. Finally, a simulation example is given to verify the effectiveness of the obtained results.

Key words: controller; observer; nonlinear system; output feedback; exponential stabilization

1　引言(Introduction)

近年来, 非线性系统的输出反馈控制问题引起了研究者的极大关注. 输出反馈控制设计中常常包含2个相关问题: 观测器设计和控制器设计. 不像线性系统, 分离原理对非线性系统一般不成立, 因此对非线性系统, 输出反馈控制问题比状态反馈镇定问题更具有挑战性. 文献[1]利用状态变换和输出映射, 将非线性系统变换为线性系统, 给出了非线性系统观测器的设计方法. 文献[2]研究一类非线性系统的观测器设计问题, 应用微分中值定理转化误差动态系统为等价系统, 使用凸理论并结合构造Lyapunov函数, 给出非线性误差动态渐近趋于零的充分条件, 并提出观测器增益矩阵的构造方法. 文献[3]给出了一个新的非线性观测器设计方法, 利用Lyapunov辅助理论得到充分必要条件. 文献[4]对能被变换到输出反馈形式的一类非线性系统, 通过非线性系统的动态输出反馈研究了全局镇定问题. 文献[5]研究了具有三角结构的非线性系统的输出反馈控制问题, 其非线性项满足某些增长条件. 文献[6]提出了设计中心流形的新方法, 通过使用该方法获得了一类非线性系统镇定的充分条件. 文献[7∼9]研究了Lipschitz非线性系统的观测器设计方法. 文献[7]给出了Lipschitz非线性系统的稳定观测器的设计方法, 研究了稳定观测器增益的存在性, 给出了渐近稳定观测器的存在性与它的不可观测距离之间的联系. 文献[8]对一类Lipschitz非线性系统提出了观测器设计方法, 给出了保证观测器的渐近稳定性的稳定矩阵的充分必要条件, 提出了观测器增益的设计方法. 文献[9]将文献[8]的研究结果推广到降阶观测器的设计中. 文献[10]将文献[7]中的一些结果进行了推广, 并给出了标准观测器是指数稳定观测器所需要的条件. 文献[11]对一类非线性系统提出了观测器设计的耗散方法, 并证明了所提出的观测器能用于非线性系统的全局输出反馈镇定. 文献[12]对一类具有Lipschitz非线性性的系统构造了全阶状态观测器, 通过适当分解误差动态为级联系统, 得到了误差动态渐近稳定的充分条件, 这些条件可用线性矩阵不等式来表达. 文献[13]对一类带

收稿日期: 2009−02−14; 收修改稿日期: 2009−11−04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60974054).

未知输入的Lipschitz非线性系统提出了全阶非线性未知输入观测器的设计方法, 并给出观测器存在的充分条件, 此条件须解非线性矩阵不等式, 进一步又将条件改进为解线性矩阵不等式. 文献[14]对一类具有单调非线性性的系统进行了观测器设计. 利用观测器及控制律设计的输出反馈控制保证了观测误差的输入到状态稳定性. 文献[15]对文献[14]进行了扩展, 对一类非线性系统设计了全局收敛观测器. 文献[16]结合降阶观测器设计, 对一类非线性系统构造了全局输出反馈控制器.

本文研究一类非线性系统的全状态反馈控制问题、观测器设计问题及输出反馈控制设计问题. 文中给出了非线性全状态反馈控制器的设计方法, 获得了系统指数镇定的充分条件. 进一步提出了非线性观测器的设计方法, 并得到了观测误差指数收敛于零的充分条件. 最后将全状态反馈控制设计与观测器设计相结合, 提出了输出反馈控制器, 并证明在此控制下, 相应闭环系统是指数稳定的. 与文献[14,15]相比较, 文献[14,15]的观测器增益矩阵由线性矩阵不等式确定, 并未给出显式表达, 本文的观测器增益给出了显式表达, 因而本文所提设计方法更加便于应用.

全文符号如下:

$\|M\|$表示矩阵或向量M的欧几里德范数; M^{H}表示矩阵M的复共轭转置矩阵; $\sigma_{\min}(M)$表示矩阵M的最小奇异值; 矩阵M的奇异值的平方是矩阵$M^{\mathrm{H}}M$的特征值; $\det(M)$表示矩阵M的行列式.

2 基础准备(Preliminaries)

考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + G\gamma(Hx) + \rho(y,u), \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

的控制器及观测器设计问题, 其中: 状态$x \in \mathbb{R}^n$, 输出$y \in \mathbb{R}^q$, 控制输入$u \in \mathbb{R}^p$, 映射$\gamma: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\rho: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, 矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$是常值矩阵. 不失一般性, 假设$x = 0$是系统(1)的平衡点.

首先给出如下假设:

假设 1 存在常数$\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0$使得

$$\|\gamma(Hx)\| \leqslant \gamma_1\|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|\rho(y,u)\| \leqslant \gamma_2\|y\|,\ \forall y \in \mathbb{R}^q.$$

假设 2 矩阵对(A,B)是能控的.

假设 3 矩阵对(A,C)是能观测的.

假设 4 存在常数$\gamma_3 > 0$使得

$$\|\gamma(z_1)-\gamma(z_2)\| \leqslant \gamma_3\|z_1 - z_2\|,\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

令数$\delta(M,N)$表示为

$$\delta(M,N) = \min_{\omega\in\mathbb{R}} \sigma_{\min} \begin{bmatrix} \mathrm{i}\omega I - M \\ N \end{bmatrix},$$

其中: $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, I是适当维数的单位阵.

首先给出引理1.

引理 1[10] 对于代数Ricatti方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + PRP + Q = 0, \tag{3}$$

如果$R = R^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$, 矩阵$A$是Hurwitz的, 且相伴Hamiltonian矩阵

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

是双曲的, 即H没有纯虚数特征值, 则式(3)存在唯一正定解$P = P^{\mathrm{T}} > 0$.

3 状态反馈控制设计(State feedback control design)

本节研究满足假设1及假设2的系统(1)的状态反馈镇定问题.

对系统(1)设计控制律为

$$u = -Kx/\|B\|^2 - K_1x, \tag{4}$$

其中: K_1是预反馈增益矩阵, 且选择K_1使$A_1 \triangleq A - BK_1$是稳定的; K是反馈增益矩阵, 以后确定. 在控制(4)下, 闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{x} = {}& (A - BK_1 - BK/\|B\|^2)x + \\ & G\gamma(Hx) + \rho(y,u) = \\ & (A_1 - BK/\|B\|^2)x + G\gamma(Hx) + \rho(y,u).\end{aligned} \tag{5}$$

令

$$V = x^{\mathrm{T}}Px,\ P = P^{\mathrm{T}} > 0, \tag{6}$$

则V沿系统(5)的轨线的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(5)} = {}& x^{\mathrm{T}}(A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 - (BK/\|B\|^2)^{\mathrm{T}}P - \\ & PBK/\|B\|^2)x + 2x^{\mathrm{T}}PG\gamma(Hx) + \\ & 2x^{\mathrm{T}}P\rho(y,u) \leqslant x^{\mathrm{T}}(A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 - \\ & K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2 - PBK/\|B\|^2 + \\ & 2PP + (\|G\|^2\gamma_1^2 + \gamma_2^2\|C\|^2)I)x.\end{aligned} \tag{7}$$

如果

$$\begin{aligned}& A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 - K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2 - PBK/\|B\|^2 + \\ & 2PP + (\|G\|^2\gamma_1^2 + \gamma_2^2\|C\|^2)I = -\eta I,\end{aligned} \tag{8}$$

则对任意$\eta > 0$有$\dot{V} \leqslant -\eta x^{\mathrm{T}}x$.

在式(8)中选取控制增益为

$$K = B^{\mathrm{T}}P, \tag{9}$$

则有

$$A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 - 2PBB^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2 + 2PP + (\|G\|^2\gamma_1^2 + \gamma_2^2\|C\|^2 + \eta)I = 0,$$

即

$$A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 + 2P(I - BB^{\mathrm{T}}/\|B\|^2)P + (\gamma^2 + \eta)I = 0, \tag{10}$$

其中$\gamma^2 = \|G\|^2\gamma_1^2 + \gamma_2^2\|C\|^2$.

下面需要解决的是式(10)的正定解P的存在性问题.

由于A_1是Hurwitz的, $2(I - BB^{\mathrm{T}}/\|B\|^2) \geqslant 0$, $(\gamma^2 + \eta)I > 0$, 如果矩阵

$$H_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} A_1 & 2(I-BB^{\mathrm{T}}/\|B\|^2) \\ -(\gamma^2+\eta)I & -A_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{11}$$

是双曲的, 则由引理1知式(10)有唯一正定解.

下述引理给出了H_{c}是双曲的一个充分条件.

引理 2　如果不等式

$$\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2+\eta} < \delta(A_1^{\mathrm{T}}, \sqrt{2}\sqrt{\gamma^2+\eta}B^{\mathrm{T}}/\|B\|^2) \tag{12}$$

成立, 则H_{c}是双曲的.

证　令

$$\Sigma_1 = (\gamma^2+\eta)^{-1}(\mathrm{i}\omega I + A_1)(-\mathrm{i}\omega I + A_1^{\mathrm{T}}) - 2(I - BB^{\mathrm{T}}/\|B\|^2).$$

矩阵$[-\mathrm{i}\omega I - H_{\mathrm{c}}]$的行列式为

$$\begin{aligned}
&\det(-\mathrm{i}\omega I - H_{\mathrm{c}}) = \\
&\det\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\omega I - A_1 & -2(I-BB^{\mathrm{T}}/\|B\|^2) \\ (\gamma^2+\eta)I & -\mathrm{i}\omega I + A_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \\
&(-1)^n\det\begin{bmatrix} (\gamma^2+\eta)I & -\mathrm{i}\omega I + A_1^{\mathrm{T}} \\ -\mathrm{i}\omega I - A_1 & -2(I-BB^{\mathrm{T}}/\|B\|^2) \end{bmatrix} = \\
&(-1)^n\det(\begin{bmatrix} I & 0 \\ (\gamma^2+\eta)^{-1}(\mathrm{i}\omega I + A_1) & -I \end{bmatrix}\cdot \\
&\begin{bmatrix} (\gamma^2+\eta)I & -\mathrm{i}\omega I + A_1^{\mathrm{T}} \\ -\mathrm{i}\omega I - A_1 & -2(I-BB^{\mathrm{T}}/\|B\|^2) \end{bmatrix}) = \\
&(-1)^n\det\begin{bmatrix} (\gamma^2+\eta)I & -\mathrm{i}\omega I + A_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & \Sigma_1 \end{bmatrix} = \\
&(-1)^n\det((\mathrm{i}\omega I + A_1)(-\mathrm{i}\omega I + A_1^{\mathrm{T}}) - \\
&2(\gamma^2+\eta)(I - BB^{\mathrm{T}}/\|B\|^2)) = \\
&(-1)^n\det\left(G^{\mathrm{H}}(\mathrm{i}\omega)G(\mathrm{i}\omega) - 2(\gamma^2+\eta)I\right),
\end{aligned}$$

其中

$$G(\mathrm{i}\omega) = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\omega I - A_1^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{2}\sqrt{\gamma^2+\eta}B/\|B\| \end{bmatrix}. \tag{13}$$

由条件(12)知, $\det[-\mathrm{i}\omega I - H_{\mathrm{c}}] \neq 0$, 即$\mathrm{i}\omega(\forall\omega \in \mathbb{R})$不是$H_{\mathrm{c}}$的特征值, 因此$H_{\mathrm{c}}$是双曲的.

由上述讨论, 结合引理2直接可得下述定理.

定理 1　考虑满足假设1及假设2的非线性系统(1). 如果不等式(12)成立, 则经状态反馈(4)(9), 闭环系统(1)的平衡点$x = 0$是指数稳定的.

4　观测器设计(Observer design)

对系统(1), 考虑如下观测器:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G\gamma(H\hat{x}) + \rho(y,u) + L_1(y - C\hat{x}) + L(y - C\hat{x}), \tag{14}$$

其中选取L_1使得$A_0 \triangleq A - L_1C$是Hurwitz, L是观测器增益矩阵.

令估计误差为$e \triangleq x - \hat{x}$, 则误差动态为

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= A(x-\hat{x}) + G(\gamma(Hx) - \gamma(H\hat{x})) - \\
&\quad L_1C(x-\hat{x}) - LC(x-\hat{x}) = \\
&\quad (A_0 - LC)e + G(\gamma(Hx) - \gamma(H\hat{x})).
\end{aligned} \tag{15}$$

选取Lyapnnov函数

$$V_1 = e^{\mathrm{T}}P_0e,\ \ P_0 = P_0^{\mathrm{T}} > 0, \tag{16}$$

则

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= e^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}P_0 + P_0A_0 - (LC)^{\mathrm{T}}P_0 - P_0LC)e + \\
&\quad 2e^{\mathrm{T}}P_0G(\gamma(Hx) - \gamma(H\hat{x})) \leqslant \\
&\quad e^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}P_0 + P_0A_0 - C^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}P_0 - P_0LC + \\
&\quad P_0P_0 + \|G\|^2\gamma_3^2\|H\|^2I)e.
\end{aligned}$$

选取$L = \dfrac{\beta}{2}P_0^{-1}C^{\mathrm{T}}$, 其中$\beta > 0$待定, 则有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &\leqslant e^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}P_0 + P_0A_0 - \frac{\beta}{2}C^{\mathrm{T}}CP_0^{-1}P_0 - \\
&\quad P_0\frac{\beta}{2}P_0^{-1}C^{\mathrm{T}}C + P_0P_0 + \gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2I)e = \\
&\quad e^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}P_0 + P_0A_0 - \beta C^{\mathrm{T}}C + P_0P_0 + \\
&\quad \gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2I)e.
\end{aligned}$$

如果

$$A_0^{\mathrm{T}}P_0 + P_0A_0 - \beta C^{\mathrm{T}}C + P_0P_0 + \gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2I = -\eta_0I, \tag{17}$$

则对任意$\eta_0 > 0$, 有$\dot{V}_1 \leqslant -\eta_0e^{\mathrm{T}}e$. 式(17)可写为

$$A_0^{\mathrm{T}}P_0 + P_0A_0 - \beta C^{\mathrm{T}}C + P_0P_0 + (\gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2 + \eta_0)I = 0. \tag{18}$$

取

$$\beta = \frac{\gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2 + \varepsilon}{\|C\|^2},$$

则式(18)可写为

$$A_0^{\mathrm{T}}P_0+P_0A_0+P_0P_0+(\gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2+\eta_0)I-\frac{\gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2+\varepsilon}{\|C\|^2}C^{\mathrm{T}}C=0. \tag{19}$$

记$\gamma_4^2=\gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2$, 对$\eta_0>\max(\varepsilon,0)$, 由于$A_0$是Hurwitz的, $I>0$, 且

$$(\gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2+\eta_0)I-\frac{\gamma_3^2\|G\|^2\|H\|^2+\varepsilon}{\|C\|^2}C^{\mathrm{T}}C>0,$$

只要

$$H_{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}A_0 & I\\ -(\gamma_4^2+\eta_0)I+(\gamma_4^2+\varepsilon)C^{\mathrm{T}}C/\|C\|^2 & -A_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{20}$$

是双曲的, 由引理1知, 式(19)存在唯一正定解$P_0=P_0^{\mathrm{T}}>0$.

下述引理给出了H_{o}是双曲的充分条件.

引理 3 如果不等式

$$\sqrt{\gamma_4^2+\eta_0}<\delta(-A_0,\sqrt{\gamma_4^2+\varepsilon}C/\|C\|) \tag{21}$$

成立, 则H_{o}是双曲的.

证 令$\varSigma_2=(\gamma_4^2+\eta_0)I-(\gamma_4^2+\varepsilon)CC^{\mathrm{T}}/\|C\|^2$. 矩阵$[-\mathrm{i}\omega I-H_{\mathrm{o}}]$的行列式为

$$\begin{aligned}&\det[-\mathrm{i}\omega I-H_{\mathrm{o}}]=\\&\det\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\omega I-A_0 & -I\\ \varSigma_2 & -\mathrm{i}\omega I+A_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\\&(-1)^n\det\begin{bmatrix}-I & -\mathrm{i}\omega I-A_0\\ -\mathrm{i}\omega I+A_0^{\mathrm{T}} & \varSigma_2\end{bmatrix}=\\&(-1)^n\det(\begin{bmatrix}-I & -\mathrm{i}\omega I-A_0\\ -\mathrm{i}\omega I+A_0^{\mathrm{T}} & \varSigma_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I & -\mathrm{i}\omega I-A_0\\ 0 & I\end{bmatrix})=\\&(-1)^n\det\left((-\mathrm{i}\omega I+A_0^{\mathrm{T}})(\mathrm{i}\omega I+A_0)-\varSigma_2\right)=\\&(-1)^n\det\left(\varGamma^{\mathrm{H}}(\mathrm{i}\omega)\varGamma(\mathrm{i}\omega)-(\gamma_4^2+\eta_0)I\right),\end{aligned}$$

其中

$$\varGamma(\mathrm{i}\omega)=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\omega I+A_0\\ \sqrt{(\gamma_4^2+\varepsilon)}C/\|C\|\end{bmatrix}.$$

由式(21)知$\det(-\mathrm{i}\omega I-H_{\mathrm{o}})\neq0$, 即$\mathrm{i}\omega(\forall\omega\in\mathbb{R})$不是$H_{\mathrm{o}}$的特征值, 因此$H_{\mathrm{o}}$是双曲的.

由上述讨论可以得到下述定理.

定理 2 设假设2及假设3成立. 如果不等式(21)成立, 则观测器(14)是系统(1)的指数观测器, 即估计误差$e=x-\hat{x}$指数收敛于零.

5 输出反馈控制设计(Output feedback control design)

下面将全状态反馈控制设计与观测器设计相结合, 对系统(1)设计输出反馈控制器.

定理 3 设系统(1)满足假设1、假设2、假设3及假设4. 如果不等式(12)(21)都成立, 则闭环系统(1)的平衡点$x=0$是指数稳定的, 且控制器为

$$u=-K\hat{x}/\|B\|^2-K_1\hat{x}, \tag{22}$$

其中$\hat{x}$是由式(14)产生的x的估计, K是由式(9)给出的增益矩阵, 选择K_1使得$A-BK_1$是稳定的. 进一步观测误差$e=x-\hat{x}$指数收敛于零.

证 将输出反馈控制(22)代入式(1), 并注意到式(9)可得

$$\begin{aligned}\dot{x}=&(A-BK_1-BK/\|B\|^2)x+(BK_1+BK/\|B\|^2)e+G\gamma(Hx)+\rho(y,u)=\\&(A_1-BB^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2)x+(BK_1+BB^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2)e+G\gamma(Hx)+\rho(y,u).\end{aligned} \tag{23}$$

由式(6)给出的Lyapunov函数V沿式(23)的轨线的时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_1=&x^{\mathrm{T}}[(A_1^{\mathrm{T}}-(BB^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2)^{\mathrm{T}})P+P(A_1-BB^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2)]x+2x^{\mathrm{T}}P(BB^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2+BK_1)e+2x^{\mathrm{T}}PG\gamma(Hx)+2x^{\mathrm{T}}P\rho(y,u)\leqslant\\&x^{\mathrm{T}}[A_1^{\mathrm{T}}P+PA_1-2PBB^{\mathrm{T}}P/\|B\|^2+2PP+(\gamma_2^2\|C\|^2+\|C\|^2\gamma_1^2)I]x+\\&2\frac{\|PBB^{\mathrm{T}}P\|}{\|B\|^2}\|x\|\|e\|+2\|PBK_1\|\|x\|\|e\|=\\&-\eta x^{\mathrm{T}}x+2\frac{\|PBB^{\mathrm{T}}P\|}{\|B\|^2}\|x\|\|e\|+2\|PBK_1\|\|x\|\|e\|\leqslant-\eta x^{\mathrm{T}}x+\xi\|x\|\|e\|,\end{aligned}$$

其中$\xi=2\|P\|^2+2\|PBK_1\|$. 令

$$W(x,e)=lV(x)+V_1(e),$$

其中$l>0$, $V_1(e)$由式(16)给出, 则

$$\dot{W}\leqslant l(-\eta x^{\mathrm{T}}x+\xi\|x\|\|e\|)+\dot{V}_1(e).$$

又$\dot{V}_1(e)=\dot{e}^{\mathrm{T}}P_0e+e^{\mathrm{T}}P_0\dot{e}\leqslant-\eta_0e^{\mathrm{T}}e$, 故有

$$\begin{aligned}\dot{W}\leqslant&l(-\eta x^{\mathrm{T}}x+\xi\|x\|\|e\|)-\eta_0e^{\mathrm{T}}e=\\&-(\frac{l\eta}{2}x^{\mathrm{T}}x+\frac{\eta_0}{2}e^{\mathrm{T}}e+\frac{l\eta}{2}x^{\mathrm{T}}x+\frac{\eta_0}{2}e^{\mathrm{T}}e-\xi\|x\|\|e\|)=-(\frac{l\eta}{2}\|x\|^2+\frac{\eta_0}{2}\|e\|^2+\\&\frac{l\eta}{2}(\|x\|-\frac{\xi}{l\eta}\|e\|)^2-\frac{l\eta}{2}(\frac{\xi}{l\eta})^2\|e\|^2+\frac{\eta_0}{2}\|e\|^2).\end{aligned}$$

取$l=\xi^2/(\eta\eta_0)$, 则

$$\dot{W}\leqslant-(\frac{l\eta}{2}\|x\|^2+\frac{\eta_0}{2}\|e\|^2+\frac{l\eta}{2}(\|x\|-\frac{\xi}{l\eta}\|e\|)^2)\leqslant-\frac{l\eta}{2}\|x\|^2-\frac{\eta_0}{2}\|e\|^2.$$

因此x,e指数收敛于零.

6 仿真实例(Simulation example)

考虑文献[17]中的单连柔性关节机器人模型:

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0, \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u, \end{cases} \tag{24}$$

其中I, J, q_1, q_2分别是是链节和电机的转动惯量和角位移. 令

$$x_1 = q_1,\ x_2 = \dot{q}_1,\ x_3 = q_2,\ x_4 = \dot{q}_2,$$

则系统(24)的状态空间描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{I}(x_1 - x_3) - \dfrac{MgL}{I}\sin x_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{k}{J}(x_1 - x_3) + \dfrac{1}{J}u. \end{cases} \tag{25}$$

式(25)可写为

$$\dot{x} = Ax + Bu + G\gamma(Hx),$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k}{I} & 0 & \dfrac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{J} & 0 & -\dfrac{k}{J} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J} \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{MgL}{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

$$H = [\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,],\ \gamma(z) = \sin\ z,\ z = Hx.$$

考虑如下非线性动态系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + G\gamma(Hx), \\ y = Cx \end{cases} \tag{26}$$

的基于状态观测器的输出反馈镇定问题, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19.5 & 0 & 19.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 48.6 & 0 & 48.6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 21.6 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H = [\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,],\ C = [\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,],$$

$$\gamma(z) = \sin\ z,\ z = Hx.$$

易见, 该系统可以写为系统(1)的形式, 其中$\rho(y,u) = 0$.

极易验证假设1、假设2、假设3及假设4都成立, 且有$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$. 选取:

$$K_1 = [1.5894\ \ -0.3443\ \ -1.5324\ \ 0.4630],$$

$$L_1 = [10\ \ -33.1\ \ -22.359\ \ -83.7262]^{\mathrm{T}},$$

$$\eta = \eta_0 = 3,\ \varepsilon = 0.1$$

使得矩阵A_1, A_0是稳定的, 且条件(12)和(21)都成立. 根据定理3, 闭环系统(26)的平衡点$x = 0$是指数稳定的, 且控制器为

$$u = -K\hat{x}/\|B\|^2 - K_1\hat{x},$$

其中$\hat{x}$是由式(14)产生的x的估计.

分别解Riccati代数方程(10)(19)可得:

$$P = \begin{bmatrix} 5.2255 & -1.4530 & -2.5945 & 0.0190 \\ -1.4530 & 2.1802 & 1.6808 & 0.4938 \\ -2.5945 & 1.6808 & 5.4196 & 0.0898 \\ 0.0190 & -0.4938 & 0.0898 & 0.7392 \end{bmatrix},$$

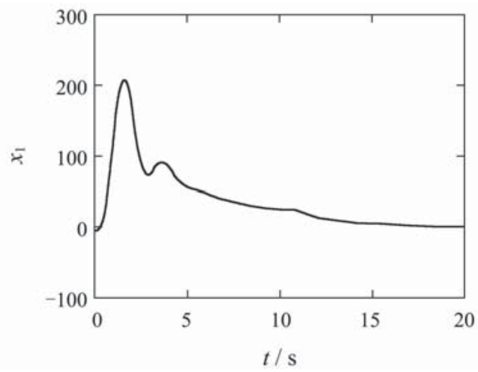
$$P_0 = \begin{bmatrix} 15.6399 & 1.5417 & 11.9231 & -1.8108 \\ 1.5417 & 3.5033 & 1.2730 & 0.9497 \\ 11.9231 & 1.2730 & 10.2828 & -1.9504 \\ -1.8108 & 0.9497 & -1.9504 & 1.4842 \end{bmatrix}.$$

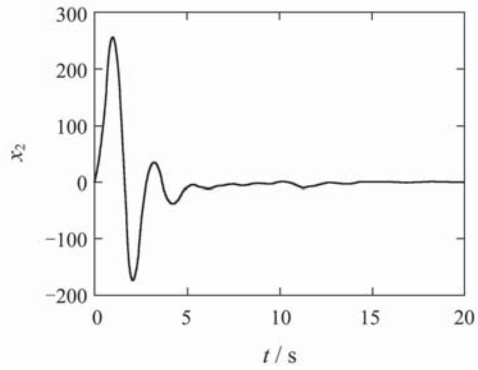
经计算, 反馈增益矩阵及观测增益矩阵为:

$$K = [0.4101\ \ 10.4529\ \ 1.9392\ \ 15.9659],$$

$$L = [3.6120\ \ 0.7258\ \ -4.7024\ \ -2.2373]^{\mathrm{T}}.$$

利用MATLAB对该问题进行仿真, 仿真结果如图1, 2所示, 它说明了本文所获结论的有效性.





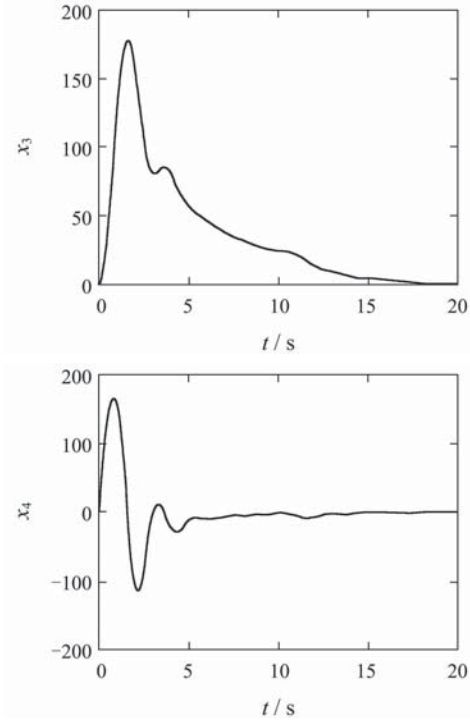


图 1 状态轨线

Fig. 1 Trajectories of the states

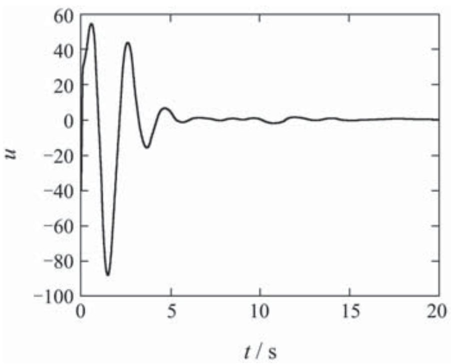


图 2 控制输入

Fig. 2 Control input

7 结论(Conclusion)

本文针对一类非线性系统分别研究了状态反馈设计问题、观测器设计问题及输出反馈控制设计问题. 首先, 本文提出了线性全状态反馈控制器的设计方法, 证明了在适当条件下相应用闭环系统是指数稳定的. 然后, 本文提出了非线性观测器设计的新方法, 得到了保证估计误差指数收敛于零的充分条件. 进一步本文利用提出的线性状态控制器及提出的非线性观测器, 设计出了输出反馈控制律, 该控制律保证了闭环系统是指数稳定的. 一般地, 对非线性系统, 分离原理并不成立. 然而对于本文所考虑的非线性系统, 通过使用本文所提出的全状态线性反馈控制器及非线性观测器, 本文证明了分离原理成立, 即在全状态线性反馈控制器设计中获得的增益矩阵能用于状态估计反馈控制设计中, 该估计状态由本文提出的观测器给出. 最后, 本文给出仿真实例说明本文所获结果的有效性.

参考文献(References):

[1] AKRENER A J, ISIDORI A. Linearization by output injection and nonlinear observers[J]. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(1): 47 – 52.

[2] 董亚丽. 一类非线性系统观测器设计的新方法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(1): 153 – 157.
(DONG Yali. New methodology for observer design of a class of nonlinear systems[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(1): 153 – 157.)

[3] KAZANTZIS N, KRAVARIS C. Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem[J]. *Systems & Control Letters*, 1998, 34(5): 241 – 247.

[4] MARINO R. TOMEI P. Dynamic output feedback linearization and global stabilization[J]. *Systems & Control Letters*, 1991, 17(2): 115 – 121.

[5] QIAN C, LIN W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1710 – 1715.

[6] DONG Y L, CHENG D Z, QIN H S. Feedback stabilization via designed planar centre manifold[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2004, 14(1): 1 – 14.

[7] RAJAMANI R, CHO Y M. Existence and design of observer for nonlinear systems: relation to distance to unobservability[J]. *International Journal of Control*, 1998, 69(5): 717 – 731.

[8] RAJAMANI R. Observer for Lipschitz nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(3): 397 – 401.

[9] ZHU F, HAN Z. A note on observer for Lipschitz nonlineare systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1751 – 1754.

[10] ABOKY C, SALLET G, VIVALDA J C. Observer for Lipschitz nonlinear systems[J]. *International Journal of Control*, 2002, 75(3) : 204 – 212.

[11] MORENO J A. A Separation property of dissipative observers for nonlinear systems[C] //*Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*. New York: IEEE, 2006: 1647 – 1652.

[12] ALESSANDRI A. Observer design for nonlinear systems by using input-to state stability[C] //*Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision & Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2004: 14 – 17.

[13] CHEN WSAIF M. Unknown input observer design for a class of nonlinear systems: an LMI approach[C] //*Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2006: 14 – 16.

[14] ARCAK M, KOKOTOVIC P. Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis[J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1923 – 1930.

[15] FAN X, ARCAK M. Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities[J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 50(4): 319 – 330.

[16] KARAGIANNIS D, CARNEVALE D, ASTOLFI A. Output feedback stabilization of a class of nonlinear systems via reduced -order observers and certainty equivalence[C] //*Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision & Control*. New York: IEEE, 2007: 12 – 14.

[17] SLOTINE J J E, LI W. *Applied Nonlinear Control*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

作者简介:

董亚丽 (1963—), 女, 博士, 教授, 研究方向为非线性系统控制理论与应用等, E-mail: dongyl@vip.sina.com;

刘金英 (1984—), 女, 硕士研究生, 研究方向为非线性系统控制, E-mail: liujinying_815@yahoo.com.cn.