

具有随机丢包的关联系统的分散控制

李 晖, 伍清河

(北京理工大学 自动化学院, 北京 100081)

摘要: 研究了在子系统之间信息传输存在随机丢包现象时关联大系统的性能分析及控制器设计问题. 通过引入空间变量及空间移动算子, 将关联系统建模成具有Markovian跳变参数的关于离散时间变量和空间变量的多维系统. 结合跳变系统有界实引理, 得到使整个关联系统均方稳定并满足一定性能指标的解析条件. 然后基于线性矩阵不等式变换给出确保关联大系统鲁棒均方稳定性的一种分散输出反馈控制器的设计方法. 最后通过一组多机器人直线编队的例子说明本文算法的正确性和有效性.

关键词: 关联系统; 数据丢包; 分散控制; 跳变系统

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Decentralized control of interconnected systems with random communication packet dropout

LI Hui, WU Qing-he

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: The stability analysis and controller synthesis are thoroughly investigated for large-scale interconnected systems, which subject to random communication packet dropout between subsystems. Spatial variables and spatial shift operators are introduced to model the interconnected systems with packet dropout as multidimensional systems of discrete-time and spatial variables and with Markovian jumping parameter. Analytical criteria are obtained for the whole interconnected system to be mean-square stable and to have the prescribed performance, based on the bounded real lemma for jump systems. Next, a method of designing the decentralized output feedback controller is proposed, which is expressed in terms of linear matrix inequalities. Finally, an example of multi-robot formation control with consideration to the packet dropout is exploited to demonstrate the validity and effectiveness of the proposed model and method.

Key words: interconnected systems; packet dropout; decentralized control; jump systems

1 引言(Introduction)

近年来, 关于空间分布的关联大系统控制的研究引起了人们极大的关注^[1~3]. 这类系统有着很广泛的应用背景, 例如多智能体系统, 自动高速公路系统, 无人飞机编队以及卫星群系统等^[4~6], 他们都是由许多子系统组成, 且各子系统需要彼此通信, 交换或共享状态信息. 在多数情况下, 各子系统之间信息的交换是通过无线网络实现的. 无线网络的使用可以减少子系统之间硬件上的连接, 降低安装成本, 提高系统的灵活性和缩放性. 但同时网络固有的诸如传输延时, 数据丢包等问题会影响整个系统的性能, 甚至引起系统的不稳定, 例如, 文献[4]讨论了车辆编队中不稳定的数据通信对车辆纵向距离保持的影响, 从而给关联大系统的研究带来了新的挑战.

本文主要针对子系统之间信息传输存在丢包现

象时关联大系统的性能分析及控制问题进行研究. 在网络控制系统中, 关于数据丢包问题的研究已经取得了一些成果^[7~9], 但是这些研究主要考虑在传感器和控制器之间或者控制器和执行器之间的数据丢包问题, 是针对单个被控对象, 设计得到集中式控制器. 如果采用这种集中式的控制器结构来控制大规模关联系统, 势必会带来很大的计算负担.

考虑到关联系统固有的空间分布结构, 文献[3]引入空间变量和空间移动算子, 将关联系统模型归入到一般的状态空间表达式框架下, 研究整个大系统的稳定性分析及控制器设计问题. 但是它假设子系统之间的信息交换是理想的, 不存在延时或丢包问题. 文献[10,11]对子系统之间信号传输有时延的问题进行了讨论. 而关于子系统信息传输存在丢包现象的关联大系统分析及综合问题的研究还很少

见. 作者曾对此问题进行了一些研究, 设计了使关联系统均方稳定的状态反馈控制器, 但是考虑到在许多实际问题中, 系统的状态往往不能或不便直接测量, 因此本文将进一步考虑输出反馈的控制方式.

本文借鉴文献[3]的空间移动算子定义, 对子系统之间信息传输存在随机丢包的关联大系统进行建模, 并结合Markovian跳变线性系统理论^[12], 给出使随机关联系统均方稳定并具有一定 H_∞ 性能的解析条件, 然后设计分散的输出反馈控制器, 鲁棒镇定整个关联大系统, 该控制器的设计基于线性矩阵不等式(LMI)的方法, 便于计算. 最后通过一个仿真实例进一步证明了本文算法的有效性.

2 随机关联系统建模(Modeling for random interconnected systems)

考虑空间分布的离散时间关联系统, 如图1所示. 由于子系统在空间上的联系和相互作用, 对系统中的信号引入空间自变量, 即信号为 $L+1$ 个独立变量的函数 $d = d(k, s_1, s_2, \dots, s_L)$, $k \in \mathbb{Z}^+$ 为时间变量, $s_i \in \mathbb{Z}$ 为空间变量, 标示子系统的位置信息, L 为空间维数. 这里为表述方便, 研究一维空间的情况, 信号简记为 $d(k, s)$, 但得到的结论可以很方便的扩展到高维空间的情形^[13].

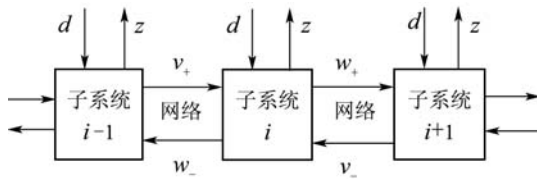


图1 关联系统模型

Fig. 1 The model of interconnected systems

对于每个子系统(如图2), 其状态方程记为:

$$\begin{bmatrix} x_T(k+1, s) \\ w(k, s) \\ z(k, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{TT} & A_{TS} & B_T \\ A_{ST} & A_{SS} & B_S \\ C_T & C_S & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T(k, s) \\ v(k, s) \\ d(k, s) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中: $x_T(k, s) \in \mathbb{R}^{m_0}$ 表示子系统的状态向量; $d(k, s) \in \mathbb{R}^p$ 为外界干扰信号; $z(k, s) \in \mathbb{R}^q$ 为要优化的性能输出.

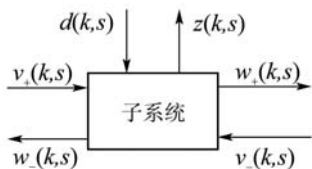


图2 一个基本的子系统模型

Fig. 2 A basic sub-system block

$$v(k, s) = \begin{bmatrix} v_+(k, s) \\ v_-(k, s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

$$w(k, s) = \begin{bmatrix} w_+(k, s) \\ w_-(k, s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

为子系统之间的关联变量. 设 $v_+(k, s)$ 和 $w_+(k, s)$ 维数均为 m_+ , $v_-(k, s)$ 和 $w_-(k, s)$ 的维数相同为 m_- . 由于基于网络的子系统之间信号传输存在随机丢包现象, 由图1, 将两子系统之间的关联关系建模如下:

$$\begin{cases} v_+(k, s) = \gamma w_+(k, s-1) + (1-\gamma)v_+(k-1, s), \\ v_-(k, s) = \delta w_-(k, s+1) + (1-\delta)v_-(k-1, s). \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\gamma(k)$ 和 $\delta(k)$ (上式中分别简记作 γ 和 δ), $k \geq 0$ 是相互独立的贝努利序列, 代表网络信号传输情况. 设 $\Pr[\gamma(k) = 0] = \Pr[\delta(k) = 0] = p$; $\Pr[\gamma(k) = 1] = \Pr[\delta(k) = 1] = 1 - p$. $\gamma(k) = 1$ 或 $\delta(k) = 1$ 表示信号传输正常, 此时 $v_+(k, s) = w_+(k, s-1)$, $v_-(k, s) = w_-(k, s+1)$. $\gamma(k) = 0$ 或 $\delta(k) = 0$ 表示发生了数据丢包, 则子系统沿用上一时刻的关联信号, 即 $v_+(k, s) = v_+(k-1, s)$, $v_-(k, s) = v_-(k-1, s)$. 可见 p 代表了数据丢包率. 子系统的状态空间模型(1)可写成式(3)的形式:

$$\begin{cases} x_T(k+1, s) = \\ A_{TT}x_T(k, s) + A_{TS}^1\gamma w_+(k, s-1)A_{TS}^1(1-\gamma)v_+(k-1, s) + A_{TS}^{-1}\delta w_-(k, s+1) + \\ A_{TS}^{-1}(1-\delta)v_-(k-1, s) + B_Td(k, s), \\ w_+(k, s) = \\ A_{TS}^1x_T(k, s) + A_{SS}^{1,1}\gamma w_+(k, s-1) + A_{SS}^{1,1}(1-\gamma)v_+(k-1, s) + A_{SS}^{1,-1}\delta w_-(k, s+1) + \\ A_{SS}^{1,-1}(1-\delta)v_-(k-1, s) + B_S^1d(k, s), \\ w_-(k, s) = \\ A_{TS}^{-1}x_T(k, s) + A_{SS}^{-1,1}\gamma w_+(k, s-1) + A_{SS}^{-1,1}(1-\gamma)v_+(k-1, s) + A_{SS}^{-1,-1}\delta w_-(k, s+1) + \\ A_{SS}^{-1,-1}(1-\delta)v_-(k-1, s) + B_S^{-1}d(k, s), \\ v_+(k, s) = \gamma w_+(k, s-1) + (1-\gamma)v_+(k-1, s), \\ v_-(k, s) = \delta w_-(k, s+1) + (1-\delta)v_-(k-1, s), \\ z(k, s) = C_Tx_T(k, s) + C_S^1\gamma w_+(k, s-1) + \\ C_S^1(1-\gamma)v_+(k-1, s) + C_S^{-1}\delta w_-(k, s+1) + \\ C_S^{-1}(1-\delta)v_-(k-1, s) + Dd(k, s). \end{cases} \quad (3)$$

为了将模型(3)归入到一般的状态空间表达式框

架下, 以便系统的分析和控制器的设计, 定义空间及时间前向移动算子^[3].

定义 1 对于信号 $d(k, s)$, 定义空间移动算子 S :

$$\begin{cases} Sd(k, s) = d(k, s+1), \\ S^{-1}d(k, s) = d(k, s-1), \end{cases} \quad (4)$$

以及时间前向移动算子 T :

$$Td(k, s) = d(k+1, s). \quad (5)$$

注 1^[13] 对于空间移动算子, 有 $S \in \{zI : z \in \mathbb{C}, zz^* - 1 = 0\}$; 而对于时间前向移动算子, 有

$$T \in \left\{ zI : z \in \mathbb{C}, [z \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^* \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\}.$$

记

$$\begin{aligned} x_S(k, s) &= \begin{bmatrix} x_{S_1}(k, s) \\ x_{S_{-1}}(k, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_+(k, s-1) \\ w_-(k, s+1) \end{bmatrix}, \\ p(k, s) &= \begin{bmatrix} v_+(k-1, s) \\ v_-(k-1, s) \end{bmatrix}, \quad q(k, s) = \begin{bmatrix} v_+(k, s) \\ v_-(k, s) \end{bmatrix}, \\ \Delta_S &= \text{diag}\{SI_{m_+}, S^{-1}I_{m_-}\}, \end{aligned}$$

则模型(3)可写成如式(6)所示的一般状态空间表达式的形式, 其中的矩阵元素可以相应的从式(3)中得出. 这里为了记号简单, 对信号省去了自变量 (k, s) . $\theta(k) = (\gamma(k), \delta(k))$ 是表示网络传输情况的时变参数, 式(6)中简记为 θ .

$$\begin{bmatrix} Tx_T \\ \Delta_S x_S \\ q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{TT} & A_{TS}(\theta) & B_{0,T}(\theta) & B_{1,T} \\ A_{ST} & A_{SS}(\theta) & B_{0,S}(\theta) & B_{1,S} \\ C_{0,T} & C_{0,S}(\theta) & D_{00}(\theta) & D_{01} \\ C_{1,T} & C_{1,S}(\theta) & D_{10}(\theta) & D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T \\ x_S \\ p \\ d \end{bmatrix}. \quad (6)$$

可以看出, 关联系统有如下4种模态:

- 1) $\theta(k) = 0$ 即 $\gamma(k) = 0, \delta(k) = 0$, 两侧子系统传输的数据信息均丢失;
- 2) $\theta(k) = 1$ 即 $\gamma(k) = 0, \delta(k) = 1$, 左侧数据包丢失, 右侧数据包传输良好;
- 3) $\theta(k) = 2$ 即 $\gamma(k) = 1, \delta(k) = 0$, 左侧数据包传输良好, 右侧数据包丢失;
- 4) $\theta(k) = 3$ 即 $\gamma(k) = 1, \delta(k) = 1$, 两侧子系统的数据信息均可得到.

由随机序列 $\gamma(k)$ 和 $\delta(k)$ 的概率分布可得:

$$\begin{cases} \Pr(\theta = 0) = \Pr(\gamma = 0, \delta = 0) = p^2 = p_0, \\ \Pr(\theta = 1) = \Pr(\gamma = 0, \delta = 1) = p(1-p) = p_1, \\ \Pr(\theta = 2) = \Pr(\gamma = 1, \delta = 0) = (1-p)p = p_2, \\ \Pr(\theta = 3) = \Pr(\gamma = 1, \delta = 1) = (1-p)^2 = p_3. \end{cases} \quad (7)$$

可见, 模型(6)是具有Markovian跳变参数 θ 的关于离散时间变量 k 和空间变量 s 的多维系统. 本文将结合Markovian跳变线性系统理论来研究这类多维系统的稳定性能及控制器设计问题.

3 系统性能分析(Performance analysis)

首先给出下文中用到的一些符号定义.

将信号 $x(k, s)$ 中的时间和空间变量分开考虑, 定义如下的空间及范数.

定义 2 固定时间变量 k , 定义空间 l_2 .

它是由所有 $\sum_{s \in \mathbb{Z}} x^*(s) \cdot x(s)$ 有限的函数全体构成的空间, 其内积定义为

$$\langle x, y \rangle_{l_2} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} x^*(s) \cdot y(s), \quad (8)$$

相应的范数定义为

$$\|x\|_{l_2} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{l_2}}. \quad (9)$$

定义 3 空间 L_2 . 它是由将 $k \in \mathbb{Z}^+$ 映射到 $x(k, s) \in l_2$ 的所有函数构成的空间, 随机序列 $\{x(k, s)\}_{k=0}^\infty$ 依赖于Markovian跳变参数 $\theta(k) = \{\theta(0), \theta(1), \dots, \theta(k), \dots\}$, 且是平方可和的. 其中的范数定义为

$$\|x\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}_{\theta(k)} \langle x(k, s), x(k, s) \rangle_{l_2}. \quad (10)$$

$\mathbb{E}_{\theta(k)}(x(k))$ 表示随机序列 $x(k)$ 的数学期望.

定义 4 Markovian跳变系统的稳定性^[14].

对于离散时间Markovian跳变线性系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\theta(k))x(k) + B(\theta(k))d(k), \\ z(k) = C(\theta(k))x(k) + D(\theta(k))d(k), \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\theta(k)$ 表示系统的模态, 为在有限集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ 中随时间 k 取值的Markovian随机过程, 其转移概率 $p_{ij} = \Pr(\theta(k+1) = j | \theta(k) = i)$, $i, j \in \mathbb{N}$ 满足 $p_{ij} \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1, \forall i \in \mathbb{N}$. 令 $d = 0$, 系统(11)是

1) 均方稳定的(mean-square stable), 如果对于任意初始状态 (x_0, θ_0) , $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|x(k)\|^2] = 0$;

2) 随机稳定的(stochastically stable), 如果对于任意初始状态 (x_0, θ_0) , $\mathbb{E}[\sum_{k=0}^\infty \|x(k)\|^2] < \infty$;

3) 指数均方稳定的(exponentially mean square stable), 如果对于任意初始状态 (x_0, θ_0) , 存在常数 $0 < \alpha < 1, \beta > 0$ 使得 $\forall k \geq 0, \mathbb{E}[\|x(k)\|^2] < \beta \alpha^k \|x_0\|^2$.

文献[14]已经证明, 对于Markovian跳变线性系统(11), 这3种稳定性的定义是等价的, 本文考察系统的均方稳定性.

定义5 Markovian跳变系统的 H_∞ 范数^[12].

假设系统(11)是均方稳定的, 令 $x(0) = 0$, 则系统的 H_∞ 范数, 记作 $\|P\|_\infty$, 定义为

$$\|P\|_\infty = \sup_{\theta(0) \in \mathbb{N}} \sup_{0 \neq d \in L_2} (\|z\|_{L_2} / \|d\|_{L_2}). \quad (12)$$

H_∞ 范数反应了关联系统克服外界干扰的能力.

在式(6)中, 记 $\Delta_m = \text{diag}\{TI_{m_0}, \Delta_S\}$, $x(k, s) = [x_T^*(k, s), x_S^*(k, s)]^*$, 则式(6)可简记作:

$$\begin{bmatrix} \Delta_m x \\ q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B_0(\theta) & B_1(\theta) \\ C_0(\theta) & D_{00}(\theta) & D_{01}(\theta) \\ C_1(\theta) & D_{10}(\theta) & D_{11}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ d \end{bmatrix}. \quad (13)$$

为记号方便, 当 $\theta(k) = j$, 即系统处于模式 j , $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ 时, 记 $A(\theta(k)) = A_j$. 其余矩阵定义相同.

定义如下的矩阵集合:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \{G = \text{diag}\{G_0, G_1, G_{-1}\}, G_0 > 0, \\ &G = G^*, \det(G) \neq 0\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{L} = \{L = L^*\}. \quad (15)$$

假设系统在 $k+1$ 时刻跳变到模式 j 的概率与 k 时刻的模式无关, 即 $p_{ij} = p_j$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. 有如下关于系统均方稳定性及性能分析的定理.

定理1 设 $p_{ij} = p_j$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, 则在子系统之间信息传输存在随机丢包现象时关联大系统是均方稳定的, 并且满足 $\|P\|_\infty < \gamma$, 如果存在矩阵 $G \in \mathbf{G}$, $L \in \mathbf{L}$, 使得

$$\begin{aligned} &\text{diag}\{G, -L, \gamma^2 I\} - \\ &\sum_{j=0}^3 p_j H_j^* \text{diag}\{G, -L, I\} H_j > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{其中 } H_j = \begin{bmatrix} A_j & B_{0,j} & B_{1,j} \\ C_{0,j} & D_{00,j} & D_{01,j} \\ C_{1,j} & D_{10,j} & D_{11,j} \end{bmatrix}.$$

证 1) 稳定性.

在模型(13)中假设 $d(k, s) = 0$. 若存在矩阵 $G \in \mathbf{G}$, $L \in \mathbf{L}$, 使得式(16)成立, 则必有

$$\text{diag}\{G, -L\} - \sum_{j=0}^3 p_j H_{1,j}^* \text{diag}\{G, -L\} H_{1,j} > 0 \quad (17)$$

$$\text{成立, 其中 } H_{1,j} = \begin{bmatrix} A_j & B_{0,j} \\ C_{0,j} & D_{00,j} \end{bmatrix}.$$

记

$$V = [x_T^*(k, s), x_{S_1}^*(k, s), x_{S_{-1}}^*(k, s), p^*(k, s)],$$

$$\begin{aligned} V_1 &= [x_T^*(k+1, s), x_{S_1}^*(k, s+1), \\ &x_{S_{-1}}^*(k, s-1), q^*(k, s)], \end{aligned}$$

对不等式(17)左边的矩阵左乘 V , 右乘 V^* , 结合系统的动态特性(6), 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^3 p_j (V \text{diag}\{G_0, G_1, G_{-1}, -L\} V^* - \\ &V_1 \text{diag}\{G_0, G_1, G_{-1}, -L\} V_1^*) > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

考察关联大系统的稳定性, 将上式在空间上求和, 利用时间及空间移动算子的定义, 可得式(19), 这里为节省篇幅对信号省略了自变量 (k, s) .

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^3 p_j (\langle x_T, G_0 x_T \rangle_{l_2} + \langle x_{S_1}, G_1 x_{S_1} \rangle_{l_2} + \\ &\langle x_{S_{-1}}, G_{-1} x_{S_{-1}} \rangle_{l_2} - \langle p, Lp \rangle_{l_2} - \\ &\langle Tx_T, G_0(Tx_T) \rangle_{l_2} - \langle Sx_{S_1}, G_1(Sx_{S_1}) \rangle_{l_2} - \\ &\langle S^{-1}x_{S_{-1}}, G_{-1}(S^{-1}x_{S_{-1}}) \rangle_{l_2} + \langle q, Lq \rangle_{l_2}) > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

注意到

$$\begin{aligned} \langle Sx_{S_1}, G_1(Sx_{S_1}) \rangle_{l_2} &= \langle x_{S_1}, S^* G_1(Sx_{S_1}) \rangle_{l_2} = \\ \langle x_{S_1}, G_1 S^* Sx_{S_1} \rangle_{l_2} &= \langle x_{S_1}, G_1 x_{S_1} \rangle_{l_2}, \end{aligned} \quad (20)$$

以及

$$\langle x_{S_{-1}}, G_{-1} x_{S_{-1}} \rangle_{l_2} = \langle S^{-1} x_{S_{-1}}, G_{-1}(S^{-1} x_{S_{-1}}) \rangle_{l_2}. \quad (21)$$

另外, 由 $q(k, s) = \Delta_T p(k, s)$, $\Delta_T = \text{diag}\{TI_{m_+}, TI_{m_-}\}$, 有

$$\begin{aligned} &\langle q, Lq \rangle_{l_2} - \langle p, Lp \rangle_{l_2} = \\ &\left\langle \begin{bmatrix} \Delta_T \\ I \end{bmatrix} p, \begin{bmatrix} L & \\ & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_T \\ I \end{bmatrix} p \right\rangle_{l_2} = \\ &\sum_{s \in \mathbb{Z}} p^* [\Delta_T^* \ I] \begin{bmatrix} L & \\ & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_T \\ I \end{bmatrix} p \leq 0. \end{aligned} \quad (22)$$

所以由式(19)可得

$$\sum_{j=0}^3 p_j (\langle x_T, G_0 x_T \rangle_{l_2} - \langle Tx_T, G_0(Tx_T) \rangle_{l_2}) > 0. \quad (23)$$

因而必存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^3 p_j (\langle Tx_T, G_0(Tx_T) \rangle_{l_2} - \langle x_T, G_0 x_T \rangle_{l_2}) < \\ &-\varepsilon \langle x_T, x_T \rangle_{l_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

定义Lyapunov函数如下:

$$V(x_T(k, s)) = \langle x_T(k, s), G_0 x_T(k, s) \rangle_{l_2}, \quad (25)$$

则

$$\mathbb{E}_{\theta(k)} [V(x_T(k+1, s) | x_T(k, s))] =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^3 p_j \langle T x_T(k, s), G_0(T x_T(k, s)) \rangle_{l_2} < \\ & V(x_T(k, s)) - \varepsilon \langle x_T(k, s), x_T(k, s) \rangle_{l_2} \leq \quad (26) \\ & [1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(G_0)}] V(x_T(k, s)) = \\ & \alpha V(x_T(k, s)). \quad (27) \end{aligned}$$

不等式(26)成立是因为 $\langle z, Gz \rangle_{l_2} \leq \lambda_{\max}(G) \cdot \langle z, z \rangle_{l_2}, \forall z$, 总可以选择一个足够小的 ε 使得 $\alpha := 1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(G_0)} > 0$.

由数学归纳法可证, 下述引理是正确的^[15].

引理 1

$$\begin{aligned} P_n : & \quad \mathbb{E}_{\theta(k), \dots, \theta(k+n-1)} [V(x_T(k+n, s) | x_T(k, s))] < \\ & \alpha^n V(x_T(k, s)), \forall k, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (28) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta(0), \dots, \theta(N)} [\sum_{k=0}^N V(x_T(k, s) | x_T(0, s))] < \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \alpha + \dots + \alpha^N) V(x_T(0, s)) < \\ & \frac{1}{1 - \alpha} \langle x_T(0, s), G_0 x_T(0, s) \rangle_{l_2}. \quad (29) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta(0), \dots, \theta(N)} [\sum_{k=0}^N \langle x_T(k, s), x_T(k, s) \rangle_{l_2} | x_T(0, s)] \leq \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{\min}(G_0)} \mathbb{E}_{\theta(0), \dots, \theta(N)} [\sum_{k=0}^N V(x_T(k, s) | x_T(0, s))] \leq \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_{\min}(G_0)} \frac{1}{1 - \alpha} \langle x_T(0, s), G_0 x_T(0, s) \rangle_{l_2} = \\ & \frac{\lambda_{\max}(G_0)}{\varepsilon \lambda_{\min}(G_0)} V(x_T(0, s)) < \infty. \quad (31) \end{aligned}$$

不等式(30)成立是因为 $\lambda_{\min}(G_0) \langle z, z \rangle_{l_2} \leq \langle z, G_0 z \rangle_{l_2}, \forall z$. 而不等式(31)成立由于 $G_0 > 0$ 意味着 $\lambda_{\min}(G_0) > 0, \lambda_{\max}(G_0) > 0$.

综上可得关联系统是随机稳定的, 进而也是均方稳定的.

2) H_∞ 性能.

定义截断函数

$$e_M(k) = \begin{cases} e(k), & 0 \leq k \leq M, \\ 0, & k > M. \end{cases} \quad (32)$$

Lyapunov函数仍如式(25)所示, 且对于任意初始模态 $\theta(0) \in \mathbb{N}$, 设 $x_T(0, s) = 0, V(x_T(0, s)) = 0$, 则

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\theta(0), \dots, \theta(M)} [\sum_{k=0}^M (V(x_T(k+1, s)) - V(x_T(k, s)))] = \\ & \mathbb{E}_{\theta(0), \dots, \theta(M)} [V(x_T(M+1, s))] \geq 0. \quad (33) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \|z_M\|_{L_2}^2 \leq \\ & \gamma^2 \|d_M\|_{L_2}^2 + \sum_{k=0}^M \mathbb{E}_{\theta(k)} [\langle z(k, s), z(k, s) \rangle_{l_2} - \\ & \gamma^2 \langle d(k, s), d(k, s) \rangle_{l_2} + \\ & (V(x_T(k+1, s)) - V(x_T(k, s)))]. \quad (34) \end{aligned}$$

另一方面, 对不等式(16)左边的矩阵左乘 $[x^*(k, s) \ p^*(k, s) \ d^*(k, s)]$, 右乘 $[x^*(k, s) \ p^*(k, s) \ d^*(k, s)]^*$, 求数学期望, 并在空间上求和, 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^3 p_j (\langle T x_T, G_0(T x_T) \rangle_{l_2} + \langle S x_{S_1}, G_1(S x_{S_1}) \rangle_{l_2} + \\ & \langle S^{-1} x_{S-1}, G_{-1}(S^{-1} x_{S-1}) \rangle_{l_2} - \langle q, Lq \rangle_{l_2} + \\ & \langle z, z \rangle_{l_2} - \langle x_T, G_0 x_T \rangle_{l_2} - \langle x_{S_1}, G_1 x_{S_1} \rangle_{l_2} - \\ & \langle x_{S-1}, G_{-1} x_{S-1} \rangle_{l_2} + \langle p, Lp \rangle_{l_2} - \gamma^2 \langle d, d \rangle_{l_2}) < 0. \quad (35) \end{aligned}$$

由式(20)~(22)以及Lyapunov函数的定义式(25), 不等式(35)等价于

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\theta(k)} [\langle z(k, s), z(k, s) \rangle_{l_2} - \gamma^2 \langle d(k, s), d(k, s) \rangle_{l_2} + \\ & (V(x_T(k+1, s)) - V(x_T(k, s)))] < 0. \quad (36) \end{aligned}$$

从而由式(34), 必存在 $\zeta > 0$, 使得

$$\|z_M\|_{L_2}^2 \leq \gamma^2 \|d_M\|_{L_2}^2 - \zeta.$$

令 $M \rightarrow \infty$, 有 $\|z\|_{L_2}^2 \leq \gamma^2 \|d\|_{L_2}^2 - \zeta$. 即对于任意 $d \in L_2$, 有 $\|z\|_{L_2} \leq \gamma \|d\|_{L_2}$ 成立, 即 $\|P\|_\infty < \gamma$.

证毕.

注 2 从上述定理可见, 条件(16)的维数只与子系统的维数有关, 而与关联大系统中子系统的个数无关. 这一特点非常有利于系统的重组: 可以添加或去除子系统而不影响对整个关联大系统稳定性及性能的分析.

注 3 当只有一个模态时 ($N = 1$), 条件(16)等价于理想关联, 即子系统之间没有丢包现象时关联大系统的稳定性及性能分析结果^[13,16].

4 控制器设计(Controller synthesis)

本节将根据定理1设计分散的输出反馈控制器(如图3), 使得关联大系统在子系统之间信息传输存在随机丢包时均方稳定, 且满足性能 $\|P\|_\infty < \gamma$.

定义被控对象的模型如下:

$$\begin{bmatrix} \Delta_m x \\ q \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B_0(\theta) & B_1 & B_2 \\ C_0(\theta) & D_{00}(\theta) & D_{01} & D_{02} \\ C_1(\theta) & D_{10}(\theta) & D_{11} & D_{12} \\ C_2(\theta) & D_{20}(\theta) & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ d \\ u \end{bmatrix}. \quad (37)$$

其中: $y(k, s)$ 表示传感器测量信号, $u(k, s)$ 为控制输入信号.

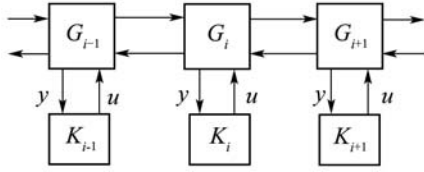


图3 关联系统的分散控制

Fig. 3 Decentralized control of interconnected systems

要设计具有如下状态空间实现的分散输出反馈控制器:

$$\begin{bmatrix} Tx^K(k, s) \\ u(k, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^K & B^K \\ C^K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^K(k, s) \\ y(k, s) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

由式(37)(38)可得闭环子系统的状态空间方程:

$$\begin{bmatrix} Tx_T \\ Tx^K \\ \Delta_S x_S \\ q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl}(\theta) & B_{0cl}(\theta) & B_{1cl}(\theta) \\ C_{0cl}(\theta) & D_{00cl}(\theta) & D_{01cl}(\theta) \\ C_{1cl}(\theta) & D_{10cl}(\theta) & D_{11cl}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T \\ x^K \\ x_S \\ p \\ d \end{bmatrix}. \quad (39)$$

其中的矩阵元素可相应写出. 由定理1可得闭环关联系统鲁棒均方稳定的充分条件. 即存在 $G \in \mathbf{G}$, $L \in \mathbf{L}$, 使得

$$\begin{aligned} & \text{diag}\{G, -L, \gamma^2 I\} - \\ & \sum_{j=0}^3 p_j H_{cl,j}^* \text{diag}\{G, -L, I\} H_{cl,j} > 0. \quad (40) \end{aligned}$$

其中 $H_{cl,j} = \begin{bmatrix} A_{cl,j} & B_{0cl,j} & B_{1cl,j} \\ C_{0cl,j} & D_{00cl,j} & D_{01cl,j} \\ C_{1cl,j} & D_{10cl,j} & D_{11cl,j} \end{bmatrix}$.

$$R_{l1} = \begin{bmatrix} Y A_{TT} + L C_{2T} & W & K_j & -M_j & Y B_{1T} + L D_{21} \\ A_{TT} & A_{TT} X + B_{2T} F & A_{TS,j} Z & -B_{0T,j} Q & B_{1T} \\ A_{ST} & A_{ST,j} X + B_{2S} F & A_{SS,j} Z & -B_{0S,j} Q & B_{1S} \\ C_{0T} & C_{0T} X + D_{02} F & C_{0S,j} Z & -D_{00,j} Q & D_{01} \\ C_{1T} & C_{1T} X + D_{12} F & C_{1S,j} Z & -D_{10,j} Q & D_{11} \end{bmatrix}, \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}, l = j + 2.$$

证 因为 $\det(G) \neq 0, \det(L) \neq 0$, 令 $V = G^{-1}$, $Q = L^{-1}$. 考虑到 V 和 Q 的对称性, 在不等式(40)左边分别左乘和右乘 $P = \text{diag}\{V, -Q, I\}$, 由Schur补引理可知, 条件(40)等价于:

$$\begin{bmatrix} P_0 & (\cdot)^* & (\cdot)^* & (\cdot)^* & (\cdot)^* \\ \sqrt{p_0} T_0 & P & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{p_1} T_1 & 0 & P & 0 & 0 \\ \sqrt{p_2} T_2 & 0 & 0 & P & 0 \\ \sqrt{p_3} T_3 & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix} > 0. \quad (42)$$

由于在不等式(40)中, 矩阵变量 G, L 和控制器参数矩阵 A^K, B^K, C^K 以非线性的方式耦合在一起. 为了求解控制器参数, 采用变量替代法, 通过引进一组新的矩阵变量, 将原来的非线性矩阵不等式转化为一组新变量的线性矩阵不等式来求解.

定理2 设 $p_{ij} = p_j, i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, 则关联系统在子系统之间信息传输存在随机丢包情况下均方稳定且满足 $\|\mathbf{P}\|_\infty < \gamma$, 如果存在对称正定矩阵 $X, Y \in R_S^{m_0}, Q \in \mathbf{L}$, 矩阵

$$Z = \text{diag}\{Z_1, Z_{-1}\} \in R_S^m$$

及 L, F, W, K_j, M_j , 使得如下LMI成立:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \sqrt{p_0} R_{21}^* & \sqrt{p_1} R_{31}^* & \sqrt{p_2} R_{41}^* & \sqrt{p_3} R_{51}^* \\ \sqrt{p_0} R_{21} & R_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{p_1} R_{31} & 0 & R_{22} & 0 & 0 \\ \sqrt{p_2} R_{41} & 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ \sqrt{p_3} R_{51} & 0 & 0 & 0 & R_{22} \end{bmatrix} > 0. \quad (41)$$

$$\text{其中: } R_{11} = \begin{bmatrix} Y & I & 0 & 0 & 0 \\ I & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$R_{22} = \begin{bmatrix} Y & I & 0 & 0 & 0 \\ I & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

其中: $P_0 = \text{diag}\{V, -Q, \gamma^2 I\}$, $P = \text{diag}\{V, -Q, I\}$, $T_j = H_{cl,j} P, j = 0, 1, 2, 3$. $(\cdot)^*$ 代表相应矩阵的转置, 由式(42)左侧项的对称性可得.

由于矩阵变量 $V = G^{-1} \triangleq \text{diag}\{V_0, V_1, V_{-1}\} \in \mathbf{G}$ 满足 $\det(V) \neq 0, V_0 > 0$, 记 $Z = \text{diag}\{V_1, V_{-1}\}$, 可将 V_0 和它的逆矩阵进行以下分块:

$$V_0 = \begin{bmatrix} X & N_1 \\ N_1^* & N_2 \end{bmatrix}, \quad V_0^{-1} = \begin{bmatrix} Y & H_1 \\ H_1^* & H_2 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

其中 X, Y 是对称矩阵. 由等式 $V_0 V_0^{-1} = I$ 可得

$$V_0 \begin{bmatrix} Y \\ H_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 且 } V_0 \begin{bmatrix} Y & I \\ H_1^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & N_1^* \end{bmatrix}.$$

定义

$$U_1 = \begin{bmatrix} Y & I \\ H_1^* & 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & N_1^* \end{bmatrix},$$

则 $V_0 U_1 = U_2$. 记 $P_1 = \text{diag}\{U_1, I_m, I_m, I_q\}$, 则有

$$P_1^* P_0 P_1 = R_{11}, \quad (44)$$

$$P_1^* P P_1 = R_{22}, \quad (45)$$

$$P_1^* T_j P_1 = R_{l1}. \quad (46)$$

其中:

$$\begin{cases} L = H_1 B^K, F = C^K N_1^*, \\ W = Y A_{TT} X + Y B_{2T} F + L C_{2T} X + H_1 A^K N_1^*, \\ K_j = Y A_{TS,j} Z + L C_{2S,j} Z, \\ M_j = Y B_{0T,j} Q + L D_{20,j} Q, \\ j = 0, 1, 2, 3; l = j + 2. \end{cases} \quad (47)$$

因此, 对不等式(42)左边项左乘 $\text{diag}\{P_1^*, P_1^*, P_1^*, P_1^*, P_1^*\}$, 右乘 $\text{diag}\{P_1, P_1, P_1, P_1, P_1\}$, 可得LMI(41). 证毕.

上述证明过程也给出了输出反馈控制器参数矩阵的设计方法: 若LMI(41)可解, 则求得矩阵变量 X, Y, L, F, W 后, 由式(47)可得控制器矩阵.

注4 由式(45)求解控制器参数矩阵时, 还需要先求得非奇异矩阵 H_1 和 N_1 , 求解方法可参考文献[3,17].

5 算例(Example)

本节通过一个多机器人直线编队的例子来说明算法的有效性(见图4). 该模型取自文献[13].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2(t, s) \\ \dot{x}_1(t, s) \\ L_1 \\ L_2 \\ v_+(t, s) \\ v_-(t, s) \\ z_1(t, s) \\ z_2(t, s) \\ y(t, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m}\gamma(t) & \frac{k}{m}\delta(t) & M_1 & M_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) & 0 & 1 - \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(t) & 0 & 1 - \delta(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t, s) \\ x_1(t, s) \\ x_{S_1}(t, s) \\ x_{S_{-1}}(t, s) \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t, s) \\ d_2(t, s) \\ u(t, s) \end{bmatrix}, \quad (49)$$

其中: $L_1 = x_{S_1}(t, s+1)$, $L_2 = x_{S_{-1}}(t, s-1)$, $M_1 = \frac{k}{m}(1-\gamma(t))$, $M_2 = \frac{k}{m}(1-\delta(t))$, $N_1 = v_+(t-\Delta t, s)$, $N_2 = v_-(t-\Delta t, s)$.

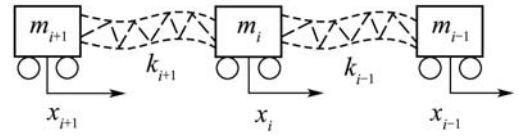


图4 多机器人直线编队模型

Fig. 4 Multi-robot formation in line

对于每一个机器人, 有如下的动态方程:

$$\begin{cases} m_i \ddot{e}_i = k_{i+1}(e_{i+1} - e_i) - \\ \quad k_{i-1}(e_i - e_{i-1}) + d_{2i} + u_i, \\ y_i = e_i + 0.1d_{1i}. \end{cases} \quad (48)$$

其中: e_i 表示第 i 个机器人当前的位置与其应处在的理想位置之间的偏差; u_i 表示作用于机器人 i 的控制量; y_i 为传感器的测量信号; d_{1i} 为测量噪声, d_{2i} 为过程噪声. m_i 为机器人的质量; k_{i-1} 和 k_{i+1} 分别表示其前后机器人对当前机器人状态的影响系数. 这里假设 $m_i = m$, $k_i = k$, $\forall i$. 编队控制的目的就是要使各机器人之间保持期望的距离向目标点运动. 它等价于动态方程(48)在平衡状态 $e_i = 0$ 的稳定性问题.

在实际应用中, 各机器人的位置信息是通过无线网络传输给其他机器人的, 由于不可避免的网络数据丢包现象, 需要研究在存在数据丢包情况下编队系统的鲁棒稳定性问题.

记 $x_1(t, s) = x_T(t, s) = e_i$, $x_2(t, s) = \dot{x}_1(t, s)$, $x_{S_{-1}}(t, s) = e_{i+1}$, $x_{S_1}(t, s) = e_{i-1}$, $u(t, s) = u_i$, 可得子系统的状态空间实现如式(49)所示. 其中 $\gamma(t)$ 和 $\delta(t)$ 表示网络传输数据丢包情况, Δt 为采样间隔.

设 $k = m$, 采样时间 $T = 0.5$ s, 丢包率 $p = 0.3$. 由定理2, 基于MATLAB的LMI工具箱, 可求得最优 H_∞ 性能 $\gamma = 3.7444$, 仿真过程中假设干扰为正

态分布的随机数,得到的输出反馈控制器矩阵为:

$$A^K = \begin{bmatrix} -0.3875 & -3.5830 \\ 0.1599 & -1.9351 \end{bmatrix}, B^K = \begin{bmatrix} -1.9940 \\ -2.5204 \end{bmatrix}, \\ C^K = [2.4982 \quad 1.4590].$$

考虑3台机器人组成的编队系统,假设3台机器人跟随一个虚拟领航机器人沿直线向目标前进,初始时刻3机器人与其应处的理想位置之间的偏差分别为 $e_1 = -5$ m, $e_2 = 10$ m, $e_3 = 20$ m,基于上述的控制器矩阵得到各机器人位置均方误差响应曲线如图5($T = 0.5$ s, $p = 0.3$)所示,可见编队系统是鲁棒均方稳定的,控制器能够在均方意义下使每个机器人的位置偏差趋于0,达到编队的目的。

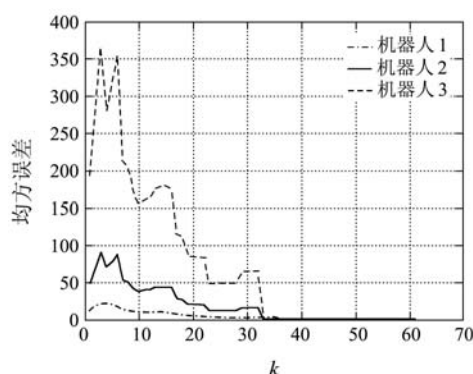


图5 均方误差变化曲线

Fig. 5 Variation of mean square errors

6 结论(Conclusion)

本文针对各子系统之间信息交换存在随机丢包现象时关联大系统的稳定性及鲁棒性进行了研究. 将这种不确定关联的关联系统建模成具有Markovian跳变参数的离散时间-空间多维系统,得到使整个关联系统均方稳定并具有一定 H_∞ 性能指标的解析条件. 然后基于线性矩阵不等式的方法设计分散的输出反馈控制器. 最后通过一个多机器人直线编队的例子表明本文所提出的算法是正确性.

参考文献(References):

- [1] CHUGHTAI S S, WERNER H. Distributed control for a class of spatially interconnected discrete-time systems[C] // *Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control*. Seoul, Korea: International Federation of Automatic Control, 2008: 7761 – 7766.
- [2] 陈为胜, 李俊民, 陈国陪. 非线性关联系统自适应神经网络输出反馈分散控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(4): 650 – 654. (CHEN Weisheng, LI Junmin, CHEN Guopei. Adaptive neural network output-feedback decentralized control for nonlinear interconnected systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(4): 650 – 654.)
- [3] D'ANDREA R, DULLERUD G E. Distributed control of spatially interconnected systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(9): 1478 – 1495.
- [4] TEO R, STIPANOVIC D, TOMLIN C J. Multiple vehicle control over a lossy datalink[C] // *Proceedings of the 4th Asian Control Conference*. Singapore: IEEE, 2002: 2063 – 2068.
- [5] LI H, WU Q H, HUANG H. Distributed control of multi-robot formation based on spatially interconnected model[C] // *Proceedings of 2009 International Conference on Electronic Computer Technology*. Macau, China: IEEE Computer Society Conference Publishing Services, 2009: 200 – 204.
- [6] STIPANOVIC D M, INALHAN G, TEO R, et al. Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles[J]. *Automatica*, 2004, 40(8): 1285 – 1296.
- [7] 张喜民, 李建东, 陈实. 具有时延和数据包丢失的网络控制系统稳定性[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 494 – 497. (ZHANG Ximin, LI Jiandong, CHEN Shi. Stability of the networked control systems with time-delay and data packet dropout[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 494 – 497.)
- [8] HU A, YAN W Y. Stability robustness of networked control systems with respect to packet loss[J]. *Automatica*, 2007, 43(7): 1243 – 1248.
- [9] SEILER P, SENGUPTA P. An H_∞ approach to network control[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2005, 50(3): 356 – 364.
- [10] CHANDRA R S, LANGBORT C, D'ANDREA R. Distributed control design with robustness to small time delays[J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(4): 296 – 303.
- [11] ROTKOWITZ M, LALL S. Decentralized control subject to communication and propagation delays[C] // *Proceedings of 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis: IEEE, 2004, 5: 4990 – 4997.
- [12] SEILER P, SENGUPTA R. A bounded real lemma for jump systems[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2003, 48(9): 1651 – 1654.
- [13] WU F. Distributed control for interconnected linear parameter dependent systems[J]. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, 2003, 150(5): 518 – 528.
- [14] JI Y, CHIZECK H J, Feng X, et al. Stability and control of discrete-time jump linear systems[J]. *Control Theory and Advanced Technology*, 1991, 7(2): 247 – 270.
- [15] SEILER P. *Coordinated control of unmanned aerial vehicles*[D]. Berkeley, USA: University of California, Berkeley, 2001.
- [16] D'ANDREA R, CHANDRA R S. Control of spatially interconnected discrete-time systems[C] // *Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada, USA: IEEE, 2002: 240 – 245.
- [17] 俞立著. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. (YU Li. *Robust Control-LMI*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

作者简介:

李晖 (1984—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为复杂大系统控制、多机器人编队, E-mail: huili03855@bit.edu.cn;

伍清河 (1955—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、复杂系统建模、优化、控制、决策与仿真, E-mail: qinghe@bit.edu.cn.