文章编号: 1000−8152(2010)08−0985−06

具有随机长时延的网络控制系统保性能控制

俞 立, 吴玉书, 宋洪波

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 本文研究了一类具有随机长时延离散时间网络控制系统(NCSs)的建模和保性能控制问题. 用两个马尔可夫链分别来描述反馈通道和前向通道的网络诱导时延, 基于采用现有最新数据的原则, 将闭环NCS建模成一个与当前时刻和过去时刻网络诱导时延有关的马尔可夫随机时滞系统. 应用线性矩阵不等式技术和李亚普诺夫方法得到了闭环NCS随机稳定且具有二次性能指标上界的充分条件, 并给出了状态反馈保性能控制器的设计方法. 最后, 通过数值算例验证了本文方法的有效性.

关键词: 网络控制系统; 随机长时延; 随机稳定; 马尔可夫随机时滞系统; 保性能控制

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Guaranteed cost control for networked control systems with random long time-delay

YU Li, WU Yu-shu, SONG Hong-bo

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

Abstract: This paper is concerned with the modeling and the guaranteed cost control for a class of discrete-time networked control systems(NCSs) with a random long time-delay. The network-induced time-delay in the forward and the feedback channels are modeled as two Markov chains, respectively. By using the most recent available data, we model the closed-loop NCS as a Markovian stochastic time-delay system which depends on the network-induced time-delay at the present and past instants. By Lyapunov method and the linear matrix inequality(LMI) technique, we derive the sufficient conditions for the closed-loop NCS to be stochastically stable with a quadratic performance upper bound. A design procedure is also presented for the state-feedback guaranteed cost controller. An illustrative example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: networked control systems; random long time-delay; stochastic stability; Markovian stochastic time-delay system; guaranteed cost control

1 引言(Introduction)

网络控制系统(NCSs)是一类通过通信网络形成闭环的反馈控制系统, 以其成本低、连线少、易于扩展和维护、高效和灵活、资源共享等优势受到了人们越来越多的关注. 但是, 通信网络的引入使得控制系统出现了许多新的有待于解决的问题, 包括网络诱导时延、数据包丢失、通信受限等. 因此, 近年来NCS成为了国内外控制界研究的热点问题之一[1~3].

在NCS引发的诸多问题中, 网络诱导时延是引起系统性能下降甚至不稳定的重要原因, 它是由于有限的网络带宽、通信介质的分时复用原则以及数据包不同的处理方式而产生的, 并且在绝大多数情况下其大小不可忽略. 根据网络MAC协议和拓扑结构的不同, 网络诱导时延会具有不同的性质, 如定常时延、有界时延、随机时延等. 相对于定常和有界时延, 随机时变时延更难处理[4~9]. 文献[6]假设时延上界大于一个采样周期的长时延服从独立同分布, 文献[7]利用马尔可夫链来描述两个通道的随机长时延, 并都讨论了NCS的随机最优控制问题, 但是它们均以传感器–控制器时延和控制器–执行器时延服从同一个分布律为前提条件, 而在实际网络中这两个时延的分布律往往不同. 进一步, 文献[8]用两个不同的马尔可夫链来描述传感器–控制器时延和控制器–执行器时延, 进而将整个闭环NCS建模成一个具有两个模式的马尔可夫随机切换系统, 并且给出了

收稿日期: 2009−04−21; 收修改稿日期: 2009−12−12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60974017, 60834003); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(200803370002).

系统随机稳定的条件和稳定化控制器的设计方法. 但是, 在时延大于一个采样周期时, 旧的数据可能比新的数据迟到达, 从而发生时序错乱, 而上述结果都只是假设采用最新的数据, 并没有给出合适的模型来描述这种机制. 文献[9]在滤波器使用现有最新数据的前提下, 给出了滤波器输入时延和网络时延的关系, 进而将滤波误差系统建模为一个模态与当前时刻和过去时刻时延均有关的马尔可夫随机切换系统, 并给出了H_∞滤波器的设计方法, 但NCS的滤波问题只考虑存在于传感器到滤波器之间的网络. 长时延存在于反馈通道和前向通道, 且考虑时序错乱影响的NCS保性能控制问题更为复杂.

本文研究了反馈通道和前向通道均存在随机长时延的一类网络控制系统保性能控制问题. 用两个马尔可夫链分别来描述反馈通道和前向通道的网络诱导时延, 基于文献[9]的思想, 给出了控制器输入时延与反馈通道时延, 对象控制输入时延和前向通道时延的关系, 在考虑状态反馈控制律的情况下, 将闭环NCS建模成一个与当前时刻和过去时刻网络时延有关的马尔可夫随机时滞系统. 利用Lyapunov方法和LMI技术给出了闭环NCS随机稳定且具有二次性能上界的充分条件. 进而利用锥补线性化算法给出了保性能控制器的设计方法. 最后的仿真算例验证了本文方法的有效性.

2 NCS的建模(Modeling of NCS)

考虑如图1所示的NCS, 被控对象由以下线性时不变离散时间状态空间模型描述:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \tag{1}$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$是系统状态, $u(k) \in \mathbb{R}^m$是控制输入, A和B是具有适当维数的常数矩阵.

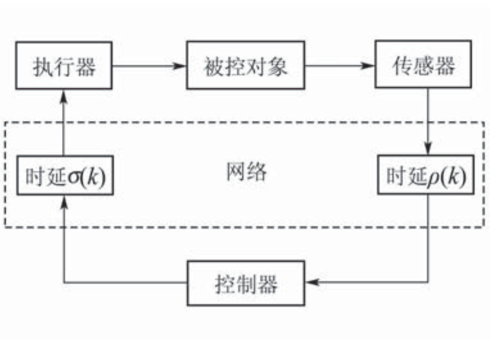

图 1 具有随机网络长时延的NCS结构图

Fig. 1 Structure of NCS with random long time-delay

考虑如下形式的状态反馈控制器:

$$v(k) = Kw(k), \tag{2}$$

其中: $w(k)$为控制器的输入, $v(k)$为控制器的输出, K为待设计的控制器增益矩阵. 随机时延存在于反馈通道和前向通道, 分别由两个马尔可夫链$\rho(k)$和$\sigma(k)$来表示. 假设时延可能大于一个采样周期并且有界, 即$0 \leqslant \rho(k) \leqslant M$, $0 \leqslant \sigma(k) \leqslant N$, 其中, M和N为给定的正整数. $\Phi = [\rho_{ij}]$和$\Lambda = [\sigma_{rs}]$分别为$\rho(k)$和$\sigma(k)$的概率转移矩阵, 其中:

$$\begin{cases} \rho_{ij} = \mathrm{Prob}\{\rho(k+1) = j \mid \rho(k) = i\}, \\ \sigma_{rs} = \mathrm{Prob}\{\sigma(k+1) = s \mid \sigma(k) = r\}, \\ \rho_{ij} \geqslant 0, \sigma_{rs} \geqslant 0, \sum\limits_{j=0}^{M} \rho_{ij} = 1, \sum\limits_{s=0}^{N} \sigma_{rs} = 1, \\ \forall i, j \in M_\rho, \forall r, s \in N_\sigma, \end{cases} \tag{3}$$

其中: $\mathrm{Prob}\{\cdot\}$表示事件发生的概率, $M_\rho = \{0, 1, \cdots, M\}$, $N_\sigma = \{0, 1, \cdots, N\}$. 另外, 假设控制器和执行器采用现有最新的数据来更新它的输入.

由于控制器输入$w(k)$和执行器输入$u(k)$的取值分别与$\rho(k-i), i = 0, 1, \cdots, M$和$\sigma(k-r), r = 0, 1, \cdots, N$有关, 因此闭环系统方程与马尔可夫链$\rho(k-i), \sigma(k-r), \forall i \in M_\rho, \forall r \in N_\sigma$有关. 基于文献[9]的思想, 引入两个映射$\chi_1 : \rho(k), \rho(k-1), \cdots, \rho(k-M) \to \theta(k)$和$\chi_2 : \sigma(k), \sigma(k-1), \cdots, \sigma(k-N) \to \varphi(k)$来描述网络时延和系统输入时延的关系. 即如果$\rho(k-i), \sigma(k-r), i = 0, 1, \cdots, M, r = 0, 1, \cdots, N$满足式(4)和式(5), 则:

$$w(k) = x(k - \theta(k)), u(k) = v(k - \varphi(k)),$$

$$\theta(k) = \begin{cases} 0,\ \rho(k) = 0, \rho(k-j) \in M_\rho, j = 1, 2, \cdots, M, \\ 1,\ \rho(k) \geqslant 1, \rho(k-1) \leqslant 1, \rho(k-j) \in M_\rho, \\ \quad j = 2, \cdots, M, \\ 2,\ \rho(k-i) \geqslant i+1, i = 0, 1, \rho(k-2) \leqslant 2, \\ \quad \rho(k-j) \in M_\rho, j = 3, \cdots, M, \\ \quad \vdots \\ M,\ \rho(k-i) \geqslant i+1, i = 0, 1, \cdots, M-1, \\ \quad \rho(k-j) \in M_\rho, j = M. \end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi(k) = \begin{cases} 0,\ \sigma(k) = 0, \sigma(k-s) \in N_\sigma, s = 1, 2, \cdots, N, \\ 1,\ \sigma(k) \geqslant 1, \sigma(k-1) \leqslant 1, \sigma(k-s) \in N_\sigma, \\ \quad s = 2, \cdots, N, \\ 2,\ \sigma(k-r) \geqslant r+1, i = 0, 1, \sigma(k-2) \leqslant 2, \\ \quad \sigma(k-s) \in N_\sigma, s = 3, \cdots, N, \\ \quad \vdots \\ N,\ \sigma(k-r) \geqslant r+1, i = 0, 1, \cdots, N-1, \\ \quad \sigma(k-s) \in N_\sigma, s = N. \end{cases} \tag{5}$$

因此, 闭环NCS可以由以下马尔可夫随机时滞系统描述:

$$x(k+1)=Ax(k)+BKx(k-\tau(k)),\tag{6}$$

其中$\tau(k)=\varphi(k)+\theta(k-\varphi(k))$, 且$\varphi(k)$和$\theta(k-\varphi(k))$分别由式(5)和式(4)决定. 记闭环NCS(6)的初始条件为$\phi(0)=\{x(0),\cdots,x(-N-M),\sigma(0),\cdots,\sigma(-N),\rho(0),\cdots,\rho(-N-M)\}$, 并考虑如下二次性能指标:

$$\begin{aligned}J=&\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(k)R_1x(k)+u^{\mathrm{T}}(k)R_2u(k)]|\phi(0)]=\\&\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{\infty}\varUpsilon|\phi(0)],\end{aligned}\tag{7}$$

其中: R_1和R_2是给定的对称正定加权矩阵, $\mathrm{E}[\cdot]$表示数学期望, $\varUpsilon=x^{\mathrm{T}}(k)R_1x(k)+x^{\mathrm{T}}(k-\tau(k))R_2x(k-\tau(k))$.

注 1　另外一种方法是通过增广技术将闭环NCS建模成高维自治系统, 如文献[8], 但这样处理会使得计算量大大增加. 本文的方法是将其建模成随机时滞系统, 避免了因增广而增加的计算量. 另外, 此模型考虑了时序错乱的影响, 从而可以刻画具有长时延离散时间NCS的动态特性.

本文的目的是设计状态反馈控制器(2), 使得闭环NCS(6)随机稳定而且具有二次性能指标上界. 为此先给出随机稳定和保性能控制的定义.

定义 1[10]　考虑闭环NCS(6), 若对任意给定的初始条件$\phi(0)$, 以下不等式

$$\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{\infty}\|x(k)\|^2|\phi(0)]<\infty\tag{8}$$

成立, 则称闭环NCS(6)随机稳定.

定义 2　考虑系统(1)和性能指标(7), 如果存在矩阵K和一个正数J^*, 使得闭环NCS(6)随机稳定, 且二次性能指标$J\leqslant J^*$, 则称$v(k)=Kw(k)$为系统(1)的一个保性能控制律, 且J^*为闭环NCS(6)的二次性能上界.

3　主要结果(Main results)

以下定理给出了闭环NCS(6)随机稳定且具有二次性能指标上界的充分条件.

定 理 1　考虑闭环NCS(6), 对给定的初始条件$\phi(0)$, 若存在矩阵$P(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M})>0,\forall a_i\in M_\rho,b_j\in N_\sigma,i=0,1,\cdots,N+M,j=0,1,\cdots,N$, 使得以下矩阵不等式

$$\begin{aligned}&\varXi(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M})=\\&\begin{bmatrix}\varTheta & \varPi^{\mathrm{T}} & W^{\mathrm{T}}\\ * & \varOmega & 0\\ * & * & -R_2^{-1}\end{bmatrix}<0\end{aligned}\tag{9}$$

成立, 则闭环NCS(6)随机稳定, 且性能指标J具有上界

$$\begin{aligned}J^*=&\xi^{\mathrm{T}}(0)\varGamma(\sigma(0),\sigma(-1),\cdots,\sigma(-N),\rho(0),\\&\rho(-1),\cdots,\rho(-N-M))\xi(0),\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}&\varTheta=\\&\mathrm{diag}\{Q_1(b_0,a_0)-P(b_0,\cdots,b_N,a_0,\cdots,a_{N+M})+\\&R_1,Q_2(b_1,a_1)-Q_1(b_1,a_1),\cdots,\\&Q_N(b_{N-1},a_{N-1})-Q_{N-1}(b_{N-1},a_{N-1}),\\&Q_{N+1}(a_N)-Q_N(b_N,a_N),Q_{N+2}(a_{N+1})-\\&Q_{N+1}(a_{N+1}),\cdots,Q_{N+M}(a_{N+M-1})-\\&Q_{N+M-1}(a_{N+M-1}),-Q_{N+M}(a_{N+M})\},\\&\varPi=[\varPi^{\mathrm{T}}(0,0)\ \varPi^{\mathrm{T}}(0,1)\ \varPi^{\mathrm{T}}(1,0)\ \varPi^{\mathrm{T}}(1,1)\cdots\\&\quad\varPi^{\mathrm{T}}(N,M)]^{\mathrm{T}},\\&\varPi(j,i)=[C(j,i)+\delta_0D(j,i)\delta_1D(j,i)+\cdots+\\&\qquad\delta_{N+M-1}D(j,i)\delta_{N+M}D(j,i)],\\&C(j,i)=\sigma_{b_0j}^{1/2}\rho_{a_0i}^{1/2}A,j=0,1,\cdots,N,\\&D(j,i)=\sigma_{b_0j}^{1/2}\rho_{a_0i}^{1/2}BK,i=0,1,\cdots,M,\\&\varOmega=\\&\mathrm{diag}\{-P^{-1}(0,b_0,\cdots,b_{N-1},0,a_0,\cdots,a_{N+M-1}),\\&-P^{-1}(0,b_0,\cdots,b_{N-1},1,a_0,\cdots,a_{N+M-1}),\\&-P^{-1}(1,b_0,\cdots,b_{N-1},0,a_0,\cdots,a_{N+M-1}),\\&-P^{-1}(1,b_0,\cdots,b_{N-1},1,a_0,\cdots,a_{N+M-1}),\\&\cdots,-P^{-1}(N,b_0,\cdots,b_{N-1},M,a_0,\cdots,\\&a_{N+M-1})\},\\&\xi(0)=[x^{\mathrm{T}}(0)x^{\mathrm{T}}(-1)\cdots x^{\mathrm{T}}(-N-M)]^{\mathrm{T}},\\&\varGamma(\sigma(0),\cdots,\sigma(-N),\rho(0),\cdots,\rho(-N-M))=\\&\mathrm{diag}\{P(\sigma(0),\cdots,\sigma(-N),\rho(0),\cdots,\rho(-N-M)),\\&Q_1(\sigma(-1),\rho(-1)),\cdots,Q_N(\sigma(-N),\rho(-N)),\\&Q_{N+1}(\rho(-N-1)),\cdots,Q_{N+M}(\rho(-N-M))\},\\&W=[\delta_0^{1/2}K\delta_1^{1/2}K\cdots\delta_{N+M-1}^{1/2}K\delta_{N+M}^{1/2}K],\end{aligned}$$

其中标量δ由$\tau(k)$的值决定, 当$\tau(k)=\alpha$时, $\delta_\alpha=1$, $\delta_\beta=0,\forall\beta=\{0,1,\cdots,N+M\}/\alpha$.

证　选取Lyapunov函数

$$\begin{aligned}&V(k)=\\&x^{\mathrm{T}}(k)P(\sigma(k),\sigma(k-1),\cdots,\sigma(k-N),\rho(k),\\&\rho(k-1),\cdots,\rho(k-N-M))x(k)+\\&\sum_{d=1}^{N}x^{\mathrm{T}}(k-d)Q_d(\sigma(k-d),\rho(k-d))x(k-d)+\end{aligned}$$

$$\sum_{g=N+1}^{M+N} x^{\mathrm{T}}(k-g)Q_g(\rho(k-g))x(k-g),$$

其中$P(\cdot),Q_d(\cdot),Q_g(\cdot)$均为正定矩阵. 为了描述简便,用$a_i$和$b_j$分别来表示$\rho(k-i)$和$\sigma(k-j),i=0,1,\cdots,N+M,j=0,1,\cdots,N$. 记

$$\phi(k)=\{x(k),\cdots,x(k-M-N),\sigma(k),\cdots,\sigma(k-N),\rho(k),\cdots,\rho(k-N-M)\},$$

则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\Delta V(k)\mid\phi(k)]=\\
&\mathrm{E}[V(k+1)\mid\phi(k)]-V(k)=\\
&\mathrm{E}[x^{\mathrm{T}}(k+1)P(\sigma(k+1),b_0,b_1,\cdots,b_{N-1},\\
&\rho(k+1),a_0,a_1,\cdots,a_{N+M-1})x(k+1)\mid\phi(k)]+\\
&x^{\mathrm{T}}(k)[Q_1(b_0,a_0)-P(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,\\
&a_{N+M})]x(k)+x^{\mathrm{T}}(k-1)[Q_2(b_1,a_1)-Q_1(b_1,a_1)]\cdot\\
&x(k-1)+\cdots+x^{\mathrm{T}}(k-N+1)[Q_N(b_{N-1},a_{N-1})\\
&-Q_{N-1}(b_{N-1},a_{N-1})]x(k-N+1)+x^{\mathrm{T}}(k-N)\cdot\\
&[Q_{N+1}(a_N)-Q_N(b_N,a_N)]x(k-N)+x^{\mathrm{T}}(k-N-\\
&1)[Q_{N+2}(a_{N+1})-Q_{N+1}(a_{N+1})]x(k-N-1)+\\
&\cdots+x^{\mathrm{T}}(k-N-M+1)[Q_{N+M}(a_{N+M-1})-\\
&Q_{N+M-1}(a_{N+M-1})]x(k-N-M+1)-\\
&x^{\mathrm{T}}(k-N-M)Q_{N+M}(a_{N+M})x(k-N-M)+\\
&\mathrm{E}[\varUpsilon\mid\phi(k)]-\mathrm{E}[\varUpsilon\mid\phi(k)]=\\
&\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{M}\sigma_{b_0j}\rho_{a_0i}[Ax(k)+BKx(k-\tau(k)))]^{\mathrm{T}}\cdot\\
&P(j,b_0,b_1,\cdots,b_{N-1},i,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M-1})\cdot\\
&[Ax(k)+BKx(k-\tau(k))]+x^{\mathrm{T}}(k)[Q_1(b_0,a_0)-\\
&P(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M})]x(k)+\\
&\sum_{r=1}^{N-1}x^{\mathrm{T}}(k-r)[Q_{r+1}(b_r,a_r)-Q_r(b_r,a_r)]x(k-r)+\\
&x^{\mathrm{T}}(k-N)[Q_{N+1}(a_N)-Q_N(b_N,a_N)]x(k-N)+\\
&\sum_{s=N+1}^{N+M-1}x^{\mathrm{T}}(k-s)[Q_{s+1}(a_s)-Q_s(a_s)]x(k-s)+\\
&x^{\mathrm{T}}(k-N-M)(-Q_{N+M}(a_{M+N}))x(k-N-\\
&M)+\mathrm{E}[\varUpsilon\mid\phi(k)]-\mathrm{E}[\varUpsilon\mid\phi(k)].
\end{aligned}$$

令$\xi(k)=[x^{\mathrm{T}}(k)\ x^{\mathrm{T}}(k-1)\ \cdots\ x^{\mathrm{T}}(k-N-M)]^{\mathrm{T}}$, 当$\tau(k)=\alpha$时, $\delta_\alpha=1,\delta_\beta=0,\forall\beta=\{0,1,\cdots,N+M\}/\alpha$, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\Delta V(k)\mid\phi(k)]=\\
&\xi^{\mathrm{T}}(k)(\varTheta+F(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M}))\xi(k)-\\
&\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(k)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(k)\mid\phi(k)]. \qquad (10)
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
&\overline{R}_1=\mathrm{diag}\{R_1,0,\cdots,0,0\},\\
&W=[\delta_0^{1/2}K\ \delta_1^{1/2}K\ \cdots\ \delta_{N+M-1}^{1/2}K\ \delta_{N+M}^{1/2}K],\\
&F(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M})=\\
&\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{M}\varPi^{\mathrm{T}}(j,i)P(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,\\
&a_{N+M-1})\varPi(j,i)+W^{\mathrm{T}}R_2W.
\end{aligned}$$

由Schur补引理[11]可知式(9)成立等价于$\varTheta+F(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M})<0$. 另一方面, 由式(7)可知$\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(k)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(k)\mid\phi(k)]\geqslant 0$, 结合式(10), 可得$\mathrm{E}[V(k+1)\mid\phi(k)]<V(k)$成立, 故必存在$0<\varepsilon<1$, 使得$\mathrm{E}[V(k+1)\mid\phi(k)]\leqslant\varepsilon V(k)$, 递推可得$\mathrm{E}[V(k)\mid\phi(0)]\leqslant\varepsilon^k V(0)$, 因此

$$\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{T}[V(k)\mid\phi(0)]]\leqslant(1+\varepsilon+\cdots+\varepsilon^T)V(0)=\frac{1-\varepsilon^{T+1}}{1-\varepsilon}V(0),$$

由于$Q_d(\cdot),Q_g(\cdot)$均为正定矩阵, 故

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{T}[x^{\mathrm{T}}(k)P(b_0,\cdots,b_N,a_0,\cdots,a_{N+M})]x(k)\mid\\
&\phi(0)]]\leqslant\\
&\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{T}[V(k)\mid\phi(0)]]\leqslant\frac{1-\varepsilon^{T+1}}{1-\varepsilon}V(0).
\end{aligned}$$

令$T\to\infty$, 可得

$$\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{\infty}[\|x(k)\|^2\mid\phi(0)]]\leqslant\frac{1}{\mu\cdot(1-\varepsilon)}V(0)<\infty,$$

其中μ表示$P(b_0,\cdots,b_N,a_0,\cdots,a_{N+M})$的最小特征根. 由定义1可得闭环NCS(6)随机稳定.

另一方面, 由式(9)和式(10)可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[V(k+1)\mid\phi(k)]\leqslant\\
&V(k)-\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(k)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(k)\mid\phi(k)]. \qquad (11)
\end{aligned}$$

对不等式(11)分别取$k=0$和$k=1$, 得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[V(1)\mid\phi(0)]\leqslant\\
&V(0)-\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(0)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(0)\mid\phi(0)], \qquad (12)\\
&\mathrm{E}[V(2)\mid\phi(1)]\leqslant\\
&V(1)-\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(1)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(1)\mid\phi(1)], \qquad (13)
\end{aligned}$$

对式(13)两边分别求数学期望$\mathrm{E}[\cdot\mid\phi(0)]$, 并结合式(12)可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[V(2)\mid\phi(0)]\leqslant\\
&\mathrm{E}[V(1)\mid\phi(0)]-
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(1)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(1)\mid\phi(0)]\leqslant$$
$$V(0)-\sum_{h=0}^{1}\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(h)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(h)\mid\phi(0)].$$

由上述步骤递推可得

$$\mathrm{E}[V(k)\mid\phi(0)]\leqslant$$
$$V(0)-\sum_{h=0}^{k-1}\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(h)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(h)\mid\phi(0)].$$

令$k\to\infty$, 并移项可得

$$\sum_{h=0}^{\infty}\mathrm{E}[\xi^{\mathrm{T}}(h)(\overline{R}_1+W^{\mathrm{T}}R_2W)\xi(h)\mid\phi(0)]\leqslant$$
$$V(0)-\xi^{\mathrm{T}}(0)\varGamma(\sigma(0),\sigma(-1),\cdots,\sigma(-N),\rho(0),$$
$$\rho(-1),\cdots,\rho(-N-M))\xi(0).$$

由定义2可知闭环NCS(6)随机稳定且具有二次性能指标J^*, 定理得证.

定理1给出了闭环NCS(6)随机稳定且具有二次性能指标上界的一个充分条件. 由于式(9)是一组非线性矩阵不等式, 比较难以求解, 这里采用文献[12]提出的锥补线性化算法(CCL)求解. 下面将给出闭环NCS(6)保性能控制器的设计方法.

用$L(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})$替代矩阵$\varXi(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M})$中 的$P^{-1}(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})$, 并将相应的矩阵记为$\tilde{\varXi}(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M})$. 利用CCL算法将保性能控制器的求解问题转化为如下的具有LMIs约束的优化问题:

$$\min\ \mathrm{tr}[\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{M}P(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})\cdot L(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})],\tag{14}$$

s.t.

$$\tilde{\varXi}(b_0,b_1,\cdots,b_N,a_0,a_1,\cdots,a_{N+M})<0,\tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}P(j,b_0,\cdots,b_{N-1},\ i,a_0,\cdots,a_{N+M-1}) & I\\ I & L(j,b_0,\cdots,b_{N-1},\ i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})\end{bmatrix}\geqslant 0,$$
$$i\in M_\rho,j\in N_\sigma,a_\ell\in M_\rho,b_\hbar\in N_\sigma,$$
$$\ell\in\{0,1,M+N\},\hbar\in N_\sigma.\tag{16}$$

优化问题(14)可以通过下面的迭代算法进行求解:

1) 求优化问题(14)的一组可行解$P_0(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})$, $L_0(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})$和$K_0$, 记迭代次数$l=0$, 并设定一个迭代次数的上界$l_{\max}$;

2) 求解以下具有LMIs约束的最小化问题:

$$\min\ \mathrm{tr}[\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{M}P_0(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})\cdot L(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})+L_0(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})\cdot P(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})],$$

s.t. (15), (16)

得到$P(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})$, $L(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})$和$K$, 令$P_{l+1}=P$, $L_{l+1}=L$, $K_{l+1}=K$;

3) 若此时的$P(j,b_0,\cdots,b_{N-1},i,a_0,\cdots,a_{N+M-1})$满足式(9), 则退出, 得到的解是该优化问题的一个可行解; 若不满足, 则令$l=l+1$, 并返回步骤2). 如果当$l=l_{\max}$时仍然得不到可行解, 则认为在迭代次数$l_{\max}$内该优化问题没有可行解.

4　数值算例(Numerical example)

考虑文献[13]中的对象, 其中:

$$A=\begin{bmatrix}0.6065 & 0.0000 & -0.2258\\ 0.3445 & 0.7788 & -0.0536\\ 0.0000 & 0.0000 & 1.2840\end{bmatrix},$$
$$B=[-0.0582\quad -0.0093\quad 0.5861]^{\mathrm{T}}.\tag{17}$$

A的特征根分别为0.7788, 0.6065和1.2840, 因此该系统不稳定. 假设$M=1$, $N=2$. 选取R_1和R_2为具有适当维数的单位矩阵, 概率转移矩阵为

$$\varPhi=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix},$$
$$\varLambda=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.6 & 0.2 & 0.2\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{bmatrix}.$$

系统初始条件为

$$x(i)=[0.1\ \ 0.2\ \ 0.5]^{\mathrm{T}},i=0,-1,-2,-3.$$

设$l_{\max}=50$, 经过34次迭代运算后, 得到相应的优化问题(14)有解, 求得的保性能控制器增益矩阵为

$$K=[0.1088\ \ 0.0446\ \ -1.0357],$$

闭环系统的性能指标上界为$J^*=1.9428$.

取随机时延$\rho(k)$和$\sigma(k)$分别满足概率转移矩阵$\varPhi$和$\varLambda$, $\rho(k)$, $\sigma(k)$的切换值和系统状态轨迹分别如图2、图3和图4所示, 由图4可知所设计的控制器在存在随机长时延的情况下有效地镇定所考虑的系统.

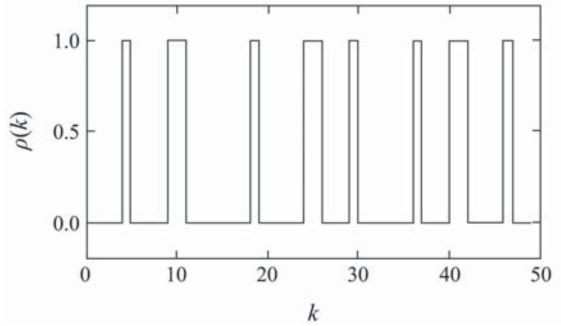

图 2 $\rho(k)$的切换值

Fig. 2 Values of $\rho(k)$

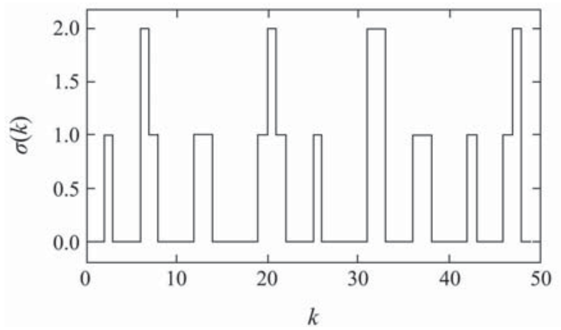

图 3 $\sigma(k)$的切换值

Fig. 3 Values of $\sigma(k)$

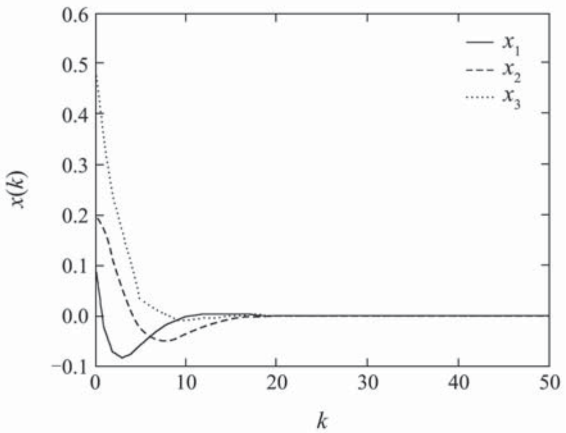

图 4 闭环系统的状态轨迹

Fig. 4 State trajectories of closed-loop system

5 结论(Conclusions)

本文研究了一类具有随机长时延的离散时间网络控制系统的保性能控制问题. 用两个马尔可夫链分别来描述传感器–控制器时延和控制器–执行器时延, 将闭环网络控制系统建模成一个与当前时刻和过去时刻的网络诱导时延均有关的马尔可夫随机时滞系统, 进而给出了闭环系统具有二次性能上界的充分条件以及状态反馈保性能控制器的设计方法, 最后的数值算例验证了该方法的有效性.

参考文献(References):

[1] ZHANG W, BRANICKY M S, PHILIPS S M. Stability of networked control systems[J]. *IEEE Control System Magazine*, 2001, 21(1): 84 – 99.

[2] WALSH G C, YE H, BUSHNELL L G. Stability analysis of networked control systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10(3): 438 – 445.

[3] LIAN F L. *Analysis, design, modeling and control of networked control systems*[D]. USA: Department of Mechanical Engineering, University of Michigan, 2001.

[4] LUCK R, RAY A. An observe-based compensator for distributed delays[J]. *Automatica*, 1990, 26(5): 903 – 908.

[5] NILSSON J. *Real-time control systems with delays*[D]. Sweden: Lund Institute of Technology, 1998.

[6] HU S S, ZHU Q X. Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay[J]. *Automatica*, 2003, 39(11): 1877 – 1884.

[7] 于之训, 陈辉堂, 王月娟. 基于Markov延迟特性的闭环网络控制系统研究[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(2): 263 – 267.
(YU Zhixun, CHEN Huitang, WANG Yuejuan. Research on Markov delay characteristic-based closed loop network control system[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 263 – 267.)

[8] ZHANG L Q, SHI Y, CHEN T W, et al. A new method for stabilization of networked control system with random delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1177 – 1181.

[9] SONG H B, YU L, ZHANG W A. H_∞ filtering of networked-based systems with random delays[J]. *Signal Processing*, 2009, 89(4): 615 – 622.

[10] SEILER P, SENGUPTA R. An H_∞ approach to networked control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(3): 356 – 364.

[11] 俞立. 鲁棒控制–线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control–the Method of Linear Matrix Inequalities*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[12] EI GHAOUI L, OUSTRY F, AITRAMI M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.

[13] XIONG J L, LAM J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 80 – 87.

作者简介:

俞 立 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为网络控制系统、鲁棒控制、时滞系统等, E-mail: lyu@zjut.edu.cn;

吴玉书 (1985—), 女, 控制理论与控制工程专业硕士研究生, 研究方向为网络控制系统, E-mail: yushu85@163.com;

宋洪波 (1984—), 男, 控制理论与控制工程专业博士研究生, 研究方向为网络控制系统、鲁棒控制等, E-mail: di7ganshb@163.com.