第 28 卷第 2 期
2011 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 2
Feb. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)02−0179−06

临界状态下三维仿射控制系统的局部光滑镇定

倪郁东[1,2], 费树岷[2]

(1. 合肥工业大学 数学学院, 安徽 合肥 230009;

2. 教育部复杂工程系统测量与控制重点实验室; 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 讨论三维仿射非线性控制系统, 在具有零和一对共轭纯虚数特征值的临界状态下的局部光滑镇定性. 首先, 应用非奇异线性状态变换和时间尺度变换, 将系统转化成标准形式. 之后, 运用形式级数法的思想和扩展正则判别函数法, 构造多组线性方程组, 给出确定光滑控制律和闭环系统李雅普诺夫函数的一种方法, 从而得到该标准化系统局部光滑镇定的充分条件. 示例说明该方法是有效的.

关键词: 非线性控制系统; 临界状态; 李雅普诺夫函数; 局部光滑镇定

中图分类号: O231.2　　　**文献标识码**: A

Local smooth stabilization of 3-dimensional nonlinear affine control systems in critical cases

NI Yu-dong[1,2], FEI Shu-min[2]

(1. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei Anhui 230009, China;
2. Key Laboratory of Measurement and Control of, Ministry of Education; School of Automation,
Southeast University,Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: This paper studies the local smooth stabilization of 3-dimensional nonlinear affine control systems with a null eigenvalue and a pair of conjugated imaginary eigenvalues. The system is converted to a standard form by employing a nonsingular linear transform and a time-scale transform; and then, sets of linear equations are formed by using the formal progression method and the extended canonical discriminant function. Furthermore, an approach is developed to determine the smooth control law and the Lyapunov function for the closed-loop system. Consequently, a sufficient condition of the local smooth stabilization for the standard system is obtained; the validity of which is shown by an example.

Key words: nonlinear control systems; critical case; Lyapunov function; local smooth stabilization

1　引言(Introduction)

非线性系统(如电力电子系统等)的分析和设计通常比线性系统要困难得多, 这是因为这些系统中存在固有的、不可忽略的非线性特质(如周期振荡、混沌形态等), 诸如叠加原理、拉普拉斯变换、傅里叶变换等适用于线性系统分析和设计的基本方法都难以应用到非线性控制系统之中去. 非线性系统局部线性化是一种简单实用的方法, 通常利用线性系统的设计方法, 可以解决很多非线性系统的控制问题. 然而, 临界系统或含临界状态的非线性系统, 则必须根据系统的非线性特征来分析和设计, 这使得问题的解决变得十分困难. Brockett R. W.和Bacciotti A.深入地研究了仿射非线性控制系统[1,2]

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{1}$$

其中: $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $g = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$, $f, g_i \in \mathbb{C}^\infty (i = 1, 2, \cdots, m)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$. 在对可镇定性与几何及代数性可控性条件之间关系等问题探讨的基础上, 得出如下结论: 系统(1)可局部光滑镇定的必要条件为该系统的线性近似系统$\dot{x} = Ax + Bu$的不可控模态的特征值不能具有正实部, 即其实部为负实数或0. 显然, 若不可控模态的特征值为负实数, 则系统(1)在线性反馈下是指数型局部可镇定的. 因此关于仿射非线性控制系统(1)局部光滑渐近镇定的研究, 主要集中在其不可控模态的特征值为0的非指数型镇定上, 这种情形下的系统称为临界控制系统. 由线性系统理论及中心流形定理可知, 系统(1)的局部光滑渐近镇定问题等价地归结为如下临界系统(2)的镇定问题:

$$\dot{x} = Ax + f_0(x) + g_0(x) \cdot u, \tag{2}$$

其中: $f_0(0) = 0$, $Df_0(0) = 0$, $g_0(0) = 0$, 并且A的

收稿日期: 2009−05−09; 收修改稿日期: 2010−11−16.
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(60835001).

特征值的实部均为0.

临界自由系统($u=0$)的稳定性分析是临界情形下控制系统镇定问题研究的基础, 而临界非线性系统的稳定性(既使是局部的), 往往取决于系统非线性部分的特质, 这些非线性特质的多样性和复杂性正是此类研究的困难之所在. 对于复杂的临界系统, 较为一般的稳定性判据难以寻找, 目前控制理论界仍是通过寻找适当的Lyapunov函数, 利用Lyapunov第二方法来实现系统的稳定性判别. 然而广为应用的Lyapunov第二方法并不是一个构造性的方法, 不同类型系统的Lyapunov函数构造方式各不相同, 因此一般临界系统的稳定性研究自然就成了稳定性理论中的热点和难点.

临界系统的基本类型是二维和三维临界系统, 它们对一般临界系统的分析具有重要意义[3], 因此成为吸引了众多国内外学者研究的重点. 王联、王慕秋在文献[4]中较完整地分析了二维二次临界系统的稳定性, 而张芷芬则在文献[5]中建立了二维临界系统稳定性判别的一些简便条件. 利用正则判别函数法, 李春文等在文献[6]中对临界系统的二维三次情形, 讨论了稳定性判别中Lyapunov函数的构造方法, 并在文献[7]中, 给出了二维齐次高阶临界系统稳定性判别的算法设计. 刘向东、黄文虎在文献[8]中应用二维Hopf分叉理论并使用中心流形方法, 建立了一般二维临界系统稳定性判别的微分几何条件. 文献[9]讨论了一次近似系统具有一对共轭纯虚数根的二维光滑临界系统, 在较一般的情形下建立了系统局部渐近稳定和不稳定的一个简单的代数判别条件. 在此稳定性分析的基础上, 文献[10]进一步给出了二维临界光滑控制系统镇定性判别和控制律的构造方法. Fu J. H.在文献[11～13]中, 对于含临界状态的动态系统$\dot{Z}=f(Z)$, 研究了其一次近似系统$\dot{Z}=AZ$, 其中$A=\dfrac{\partial f}{\partial Z}(0)$. 在$A$的特征值——式(1)为0或者实部为负数, 式(2)为一对共轭复数或者实部为负数这两种情形下的Lyapunov函数的构造方法, 并给出了一些情况下系统渐近稳定的判别条件. 但仅就临界状态而言, 其实质只是二维情形的研究, 未能涵盖重要的三维情形——A的特征值为一对共轭纯虚数和0. 然而这种三维情形也是一般临界系统的基本类型, 并且与二维临界系统有着本质的区别. 一般地, 二维和三维临界系统是各类临界系统研究的基本点和突破点. 文献[14]在临界状态下——一次近似系统的系数矩阵具有一对共轭纯虚数根和0, 进行了三维非线性光滑系统的局部稳定性分析, 得到了一组局部渐近稳定的充分条件. 文献[15]利用Lyapunov直接方法研究了非线性系统

$$\dot{x}_s=\sum_{j=1}^{n}p_{sj}f_j(x_j),\ s=1,2,\cdots,n$$

的绝对稳定性问题, 给出了特殊形式Lyapunov函数存在的充分和必要条件, 所得结果适用于一些含临界情形系统的稳定性分析.

文献[16]讨论了三维临界系统的联级形式, 建立了渐近镇定的判别条件. 文献[17]研究了求系统(1)的中心流形或近似中心流形的方法, 基于中心流形定理建立了一个具有广泛意义的方法——将系统(1)的镇定问题归结为系统(2)的镇定问题. 文献[18]利用中心流形收缩技巧研究了非线性系统在一些临界状态下的镇定性, 并利用局部非线性映射设计了基于线性或非线性反馈的镇定律.

控制器的设计一直是非线性临界系统镇定问题研究的另一项困难. 一方面, 迄今为止的众多成果中关于控制器的设计大多未给出明确的回答; 另一方面, 已有的关于临界系统镇定设计的结果, 往往因为系统结构的特殊性或是设计条件难以验证, 而失去一般性和实用性. 丰富的理论成果和难以实现及应用之间的巨大反差, 使得镇定性理论的实用性受到了很大的限制.

本文考察三维仿射临界控制系统的一类核心情形——具有零和一对共轭纯虚数特征值, 运用形式级数法和扩展正则判别函数法, 讨论系统(2)的局部光滑镇定设计问题.

2 具有一对共轭纯虚数和零特征值的三维临界光滑控制系统(3-dimensional critical smooth control system with a pair of conjugated imaginary and zero eigenvalues)

考察下列具有零和一对共轭纯虚数特征值的三维临界光滑控制系统:

$$\dot{Z}=AZ+\bar{f}(Z)+\bar{g}(Z)u,$$

其中: A的特征值为$\pm\omega\mathrm{i}$和0, ω为正实数, i为虚数单位.

作适当变换可使上述系统具有如下标准形式:

$$\begin{cases}\dot{x}=y+P(x,y,z)+g^1(x,y,z)u,\\ \dot{y}=-x+Q(x,y,z)+g^2(x,y,z)u,\\ \dot{z}=H(x,y,z)+g^3(x,y,z)u,\end{cases}\tag{3}$$

其中: $f(Z)=(P,Q,H)^{\mathrm{T}}$, $g(Z)=(g^1,g^2,g^3)^{\mathrm{T}}$关于$Z=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$是光滑的, 并且$f(0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial Z}(0)=0$, $g(0)=0$.

事实上, 对于矩阵A存在一个非奇异的矩阵$S\in\mathbb{R}^{3\times3}$, 使得$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}$, 其中$D=\begin{pmatrix}0&\omega\\-\omega&0\end{pmatrix}$.

令$Z=SU$, 则

$$\dot{U} = S^{-1}ASU + S^{-1}\bar{f}(SU) + S^{-1}\bar{g}(SU)u.$$

再令$v = \omega t$, 便得到

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v} = A_0U + f(U) + g(U)u,$$

其中:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \omega f(U) = S^{-1}\bar{f}(SU),$$

$$\omega g(U) = S^{-1}\bar{g}(SU).$$

由此可见, 系统$\dot{Z} = AZ + \bar{f}(Z) + \bar{g}(Z)u$在一个非奇异线性坐标变换和时间尺度变换下, 化成了标准形式(3).

3 控制律的设计和 Lyapunov 函数的构造 (Design of control law and construction of Lyapunov function)

对于系统(3), 设计光滑的状态反馈.

设f, g及反馈u的形式分别为:

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} f_n,\ g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n,\ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{4}$$

其中f_n, u_n, g_n分别为以x, y, z的n次齐次多项式为元素的向量、矩阵函数.

记$gu = \sum_{n=2}^{\infty} h_n$, $h_n = \sum_{i=1}^{n-1} g_iu_{n-i}$, 显见$h_n$的求和式中仅含有$u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$项.

设$f_n = (P_n, Q_n, H_n)^{\mathrm{T}}$, $h_n = (h_n^1, h_n^2, h_n^3)^{\mathrm{T}}$ $(n \geqslant 2)$, 其中$P_n, Q_n, H_n, h_n^1, h_n^2, h_n^3$均为$x, y, z$的$n$次齐次多项式, 则系统(3)可写成:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sum\limits_{n\geqslant 2} P_n + \sum\limits_{n\geqslant 2} h_n^1(x, y, z, u_1, \cdots, u_{n-1}), \\ \dot{y} = -x \sum\limits_{n\geqslant 2} Q_n + \sum\limits_{n\geqslant 2} h_n^2(x, y, z, u_1, \cdots, u_{n-1}), \\ \dot{z} = \sum\limits_{n\geqslant 2} H_n + \sum\limits_{n\geqslant 2} h_n^3\left(x, y, z, u_1, \cdot, u_{n-1}\right). \end{cases} \tag{5}$$

取系统(5)的Lyapunov函数形式为

$$V = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \sum_{n\geqslant 3} V_n\left(x, y, z\right),$$

其中待定函数V_n为x, y, z的n次齐次多项式. 显然, 存在某一原点邻域使V函数是正定的.

记∇为三维梯度算子,

$$F_k = \left(P_k + h_k^1, Q_k + h_k^2, H_k + h_k^3\right)^{\mathrm{T}},\ k \geqslant 2,$$

$$G_n\left(x, y, z, u_1, u_2, \cdots, u_{n-2}\right) =$$

$$(x, y, z) \cdot F_{n-1} + \sum_{k=3}^{n-1} \nabla V_k \cdot F_{n+1-k},\ n \geqslant 4,$$

$$G_3 = (x, y, z) \cdot F_2,$$

则$G_n(n \geqslant 3)$是光滑的, 并且V沿系统(5)的导数为

$$\dot{V} =$$

$$x(y + \sum_{n\geqslant 2}(P_n + h_n^1)) + y(-x + \sum_{n\geqslant 2}(Q_n + h_n^2)) +$$

$$z\sum_{n\geqslant 2}(H_n + h_n^3) + \sum_{n\geqslant 3}\frac{\partial V_n}{\partial x}(y + \sum_{k\geq 2}(P_k + h_k^1) +$$

$$\sum_{n\geqslant 3}\frac{\partial V_n}{\partial y}(-x + \sum_{k\geqslant 2}(Q_k + h_k^2)) +$$

$$\sum_{n\geqslant 3}\frac{\partial V_n}{\partial z}\sum_{k\geqslant 2}(H_k + h_k^3) =$$

$$\sum_{n\geqslant 2}(x(P_n + h_n^1) + y(Q_n + h_n^2) + z(H_n + h_n^3)) +$$

$$\sum_{n\geqslant 3}(y\frac{\partial V_n}{\partial x} - x\frac{\partial V_n}{\partial y}) + \sum_{n\geqslant 3}\sum_{k\geqslant 2}\frac{\partial V_n}{\partial x}(P_k + h_k^1) +$$

$$\sum_{n\geqslant 3}\sum_{k\geqslant 2}(\frac{\partial V_n}{\partial y}(Q_k + h_k^2) + \frac{\partial V_n}{\partial z}(H_k + h_k^3)) =$$

$$\sum_{n\geqslant 3}(G_n - (x\frac{\partial V_n}{\partial y} - y\frac{\partial V_n}{\partial x})).$$

考察

$$x\frac{\partial V_3}{\partial y} - y\frac{\partial V_3}{\partial x} = G_3, \tag{6}$$

$$x\frac{\partial V_n}{\partial y} - y\frac{\partial V_n}{\partial x} = G_n,\ n \geqslant 4. \tag{7}$$

由G_n的定义可知, 式(7)右边关于V_n的阶次比左边低, 故用归纳法计算V_n时G_n可视为已知. 显然式(6)右边仅含u_1, 如果可选取u_1从式(6)中求出V_3, 则可先选取u_{n-2}确定G_n再由式(7)求出V_n.

假设已求出$u_1, \cdots, u_{n-3}$及$V_3, \cdots, V_{n-1}$, 下面讨论如何确定u_{n-2}及V_n.

设$V_n(x, y, z) = \sum\limits_{j=0}^{n}(\sum\limits_{i=0}^{j}\alpha_{i,j}^n x^i y^{j-i})z^{n-j}$, 则

$$x\frac{\partial V_n}{\partial y} - y\frac{\partial V_n}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=0}^{j-1}(j-i)\alpha_{i,j}^n x^{i+1}y^{j-i-1} -$$

$$\sum_{i=1}^{j} i\alpha_{i,j}^n x^{i-1}y^{j-i+1})z^{n-j}.$$

设$u_{n-2} = \sum\limits_{i+j+k=n-2}\gamma_{i,j,k}x^i y^j z^k$, 并视其系数为向量$\gamma$,

$$G_n = \sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{j}\beta_{i,j}^n(\gamma)x^i y^{j-i})z^{n-j},$$

则G_n是z的n次多项式, 并且其首项系数为$\beta_{0,0}^n(\gamma)$. 当γ已确定时, G_n的系数$\{\beta_{i,j}^n(\gamma)\}$可视为已知.

若对任何γ, $\beta_{0,0}^n(\gamma) \neq 0$, 则由$x\dfrac{\partial V_n}{\partial y} - y\dfrac{\partial V_n}{\partial x}$中$z$的最高项次数为$n-1$可知, 式(7)不能成立.

下设有γ, 使$\beta_{0,0}^n(\gamma) = 0$, 则由式(7)可得, 对任何$k(1 \leqslant k \leqslant n)$下式成立:

$$\left(k-i+1\right)\alpha_{i-1,k}^n - \left(i+1\right)\alpha_{i+1,k}^n =$$

$$\beta_{i,k}^n(\gamma),\ i = 0, 1, \cdots, k, \tag{8}$$

其中$\alpha^n_{i,k}=0(i<0$或$i>k)$.

对固定的n, k, 式(8)表示为k+1个元的线性方程组(将γ视为已知)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ k & 0 & -2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & 0 & -k \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^n_{0,k}\\ \alpha^n_{1,k}\\ \vdots \\ \alpha^n_{k-1,k}\\ \alpha^n_{k,k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta^n_{0,k}(\gamma)\\ \beta^n_{1,k}(\gamma)\\ \vdots\\ \beta^n_{k-1,k}(\gamma)\\ \beta^n_{k,k}(\gamma)\end{pmatrix}. \tag{9}$$

记系数矩阵为D_k, 则k为奇数时, $\det(D_k)=(k!!)^2$, 对确定的任何$\{\beta^n_{i,k}(\gamma)\}$的值, 式(9)唯一确定了一组$\{a^n_{i,k}\}$使式(8)成立. 当$k$为偶数(记为$k=2m$)时, $\det(D_k)=0$, 可将式(8)分成两组独立方程:

$$2\,(m-i+1)\,\alpha^n_{2(i-1),2m}-2i\alpha^n_{2i,2m}=\beta^n_{2i-1,2m}(\gamma),\ i=1,\cdots,m, \tag{10}$$

$$(2m-2i+1)\,\alpha^n_{2i-1,2m}-(2i+1)\,\alpha^n_{2i+1,2m}=\beta^n_{2i,2m}(\gamma),\ i=0,\cdots,m. \tag{11}$$

式(10)为具有m个线性方程, $(m+1)$个未知数$(\alpha^n_{0,2m},\alpha^n_{2,2m},\cdots,\alpha^n_{2m,2m})$的线性方程组, 其系数矩阵的秩为$m$.

由此可知, 它对任何满足$\beta^n_{0,0}(\gamma)=0$的γ即u_{n-2}总可求解出$(\alpha^n_{0,2m},\alpha^n_{2,2m},\cdots,\alpha^n_{2m,2m})$.

式(11)为具有$(m+1)$个线性方程, m个未知数$(\alpha^n_{1,2m},\alpha^n_{3,2m},\cdots,\alpha^n_{2m-1,2m})$的线性方程组, 其系数矩阵的秩为$m$.

若记线性方程组(11)的常数项为

$$\delta^n_m(\gamma)=\left(\beta^n_{0,2m}(\gamma),\beta^n_{2,2m}(\gamma),\cdots,\beta^n_{2m,2m}(\gamma)\right)^{\mathrm T},$$

增广矩阵为$C\left(\delta^n_m(\gamma)\right)$, 则

$$D^n_m(\gamma)=\det\left(C\left(\delta^n_m(\gamma)\right)\right)=(-1)^m\sum_{i=0}^{m}(2m-2i-1)!!\,(2i-1)!!\beta^n_{2i,2m}(\gamma).$$

若$D^n_m(\gamma)=0$, 则式(11)增广矩阵$C\left(\delta^n_m(\gamma)\right)$的秩也为$m$, 从而式(11)有解, 否则求如下线性方程组:

$$(2m-2i+1)\,\alpha^n_{2i-1,2m}-(2i+1)\,\alpha^n_{2i+1,2m}-C^i_m\lambda^n_m(\gamma)=\beta^n_{2i,2m}(\gamma),\ i=0,\cdots,m \tag{12}$$

的解$\left(\alpha^n_{1,2m},\alpha^n_{3,2m},\cdots,\alpha^n_{2m-1,2m},\lambda^n_m(\gamma)\right)$, 其中$C^i_m$为二项展开式系数.

经计算可得, 线性方程组(12)的系数行列式为$(-1)^{m+1}(2m)!!\neq 0$, 从而有唯一解.

求解式(12)中$\lambda^n_m(\gamma)$, 可得

$$\lambda^n_m(\gamma)=(-1)^{m+1}D^n_m(\gamma)/(2m)!!. \tag{13}$$

显然, 当$D^n_m(\gamma)\neq 0$时$\lambda^n_m(\gamma)\neq 0$.

综上所述, 选取γ即$u_{n-2}(n\geqslant 3)$后, 便可由G_n的系数$\{\beta^n_{i,k}(\gamma)\}$确定出$V_n$的全部系数$\{\alpha^n_{i,k}\}$.

根据以上的讨论, 得到下述结论:

引理 1 沿用以上的记号, 设

$$G_n-(x\frac{\partial V_n}{\partial y}-y\frac{\partial V_n}{\partial x})\neq 0,$$

$$G_k-(x\frac{\partial V_k}{\partial y}-y\frac{\partial V_k}{\partial x})=0,\ k<n,$$

并且2与n之间有l个偶数$2\leqslant 2n_1<\cdots<2n_l\leqslant n$, 则由式(13)确定的$l$个$\lambda$值$\lambda^n_1,\lambda^n_2,\cdots,\lambda^n_l$不全为零, 并且

$$G_n-(x\frac{\partial V_n}{\partial y}-y\frac{\partial V_n}{\partial x})=-\sum_{i=1}^{l}\lambda^n_i\,(x^2+y^2)^{n_i}\,z^{n-2n_i}.$$

事实上,

$$\begin{aligned}&G_n-(x\frac{\partial V_n}{\partial y}-y\frac{\partial V_n}{\partial x})=\\&\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=0}^{k}(\beta^n_{i,k}(\gamma)-(k-i+1)\alpha^n_{i-1,k}+\\&(i+1)\alpha^n_{i+1,k})x^iy^{k-i})z^{n-k}=\\&-\sum_{i=1}^{l}\lambda^n_i(\gamma)\,(\sum_{j=0}^{n_i}C^j_{n_i}x^{2j}y^{2n_i-2j})z^{n-2n_i}=\\&-\sum_{i=1}^{l}\lambda^n_i(\gamma)\,(x^2+y^2)^{n_i}\,z^{n-2n_i}.\end{aligned}$$

设$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, Lyapunov函数为$V=\dfrac12(x^2+y^2+z^2)+\sum\limits_{k=3}^{n}V_k$, 由引理1的结论可得, 如果$\beta^n_{0,0}(\gamma)=0$, 则有

$$\begin{aligned}\dot V=&(G_3-(x\frac{\partial V_3}{\partial y}-y\frac{\partial V_3}{\partial x}))+\cdots+\\&(G_n-(x\frac{\partial V_n}{\partial y}-y\frac{\partial V_n}{\partial x}))+\mathrm O(\rho^n)=\\&-\sum_{i=1}^{l}\lambda^n_i(\gamma)\,r^{2n_i}z^{n-2n_i}+\mathrm O(\rho^n).\end{aligned}$$

如果$\beta^n_{0,0}(\gamma)\neq 0$, 令$\lambda^n_0(\gamma)=-\beta^n_{0,0}(\gamma)$, $n_0=0$, 则有

$$\dot V=-\sum_{i=0}^{l}\lambda^n_i(\gamma)r^{2n_i}z^{n-2n_i}+\mathrm O(\rho^n).$$

4 局部光滑镇定的充分条件(Sufficient condition for the local smooth stabilization)

定理 1 设存在$u_1,u_2,\cdots,u_{n-2}$使得引理1的条件成立, 则系统(5)是局部渐近可镇定的, 如果存在γ使得$n_l=n/2$, $\lambda^n_0(\gamma)\neq 0$, 并且存在$\delta>0$, 使得$0<\rho<\delta$时,

$$W_0(r,z)=\sum_{i=0}^{l}\lambda^n_i(\gamma)\,r^{2n_i}z^{2(n_l-n_i)}>0.$$

证 令

$$V(x,y,z)=\frac12\left(x^2+y^2+z^2\right)+\sum_{k=3}^{n}V_k(x,y,z),$$

则由条件$n_l = n/2, \lambda_0^n(\gamma) \neq 0$和引理1可知

$$\dot{V} = -\sum_{i=0}^{l} \lambda_i^n(\gamma) r^{2n_i} z^{2(n_l-n_i)} + \mathrm{O}(\rho^n) = -W_0(r,z) + \mathrm{O}(\rho^n).$$

由$0 < \rho < \delta$时$W_0(r,z) > 0$可知, 存在正数$\delta_1(\delta_1 < \delta)$, 使得$0 < \rho < \delta_1$时,

$$\dot{V} = -W_0(r,z) + \mathrm{O}(\rho^n) < 0.$$

由此可知, $\dot{V}$在邻域$0 \leqslant \rho < \delta_1$内是负定的.

由Lyapunov稳定性定理可知, 光滑反馈控制律$u = \sum_{i=1}^{n-2} u_i$可局部渐近镇定系统(5).

注 1 除判别条件$n_l = 2n$是否成立外, 还需判别条件$\lambda_0^n(\gamma) \neq 0$, 这时反馈$u_{n-2}$也即$\gamma$的选取余地较大, 只需$\beta_{0,0}^n(\gamma) \neq 0$. 由于$\lambda_m^n(\gamma)$为$G_n$系数的线性函数, 而$G_n$系数为$u_{n-2}$系数的线性函数, 因此控制律参数设置只是一个线性方程组的求解问题.

注 2 在定理1的条件下, 控制律可如下递推构造: 由$\lambda_0^3 = 0$, $\lambda_1^3 = 0$确定G_3, u_1和V_3; 由$\lambda_0^4 = 0$, $\lambda_1^4 = 0$, $\lambda_2^4 = 0$确定G_4, u_2和V_4, $\cdots$; 由$\lambda_0^{n-1} = 0$, $\lambda_1^{n-1} = 0, \cdots, \lambda_{l_{n-1}}^{n-1} = 0$确定$G_{n-1}$, u_{n-3}和V_{n-1}; 最后由$\lambda_0^n \neq 0$, $\lambda_1^n = 0, \cdots, \lambda_{l_n}^n = 0$确定$G_n$和$u_{n-2}$.

注 3 关于二元多项式$W_0(r,z)$正定性的判别, 可参见文献[14]中注2.3的方法.

注 4 从引理1的条件中可知, 第3节中将f表示成$\sum_{n=2}^{\infty} f_n$, 只是一种形式上的处理,并不要求f是解析的, 只需将f展开到有限阶, 即要求f光滑即可.

5 示例(An example)

例 试确定控制律$u = (u^1, u^2, u^3)^{\mathrm{T}}$使下列系统渐近稳定:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + xy^2 + xu^1, \\ \dot{y} = -x + yu^2, \\ \dot{z} = zu^3. \end{cases} \tag{14}$$

选取$u_1 = (u_1^1, u_1^2, u_1^3)^{\mathrm{T}} = 0$, 则$h_2 = g_1 u_1 = 0$, $F_2 = (P_2 + h_2^1, Q_2 + h_2^2, H_2 + h_2^3)^{\mathrm{T}} = 0$, $G_3 = 0$. 取$V_3 = 0$, 使得$x\dfrac{\partial V_3}{\partial y} - y\dfrac{\partial V_3}{\partial x} = G_3$.

记$u_2 = (u_2^1, u_2^2, u_2^3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$h_3 = (xu_2^1, yu_2^2, zu_2^3)^{\mathrm{T}},$$
$$F_3 = (xy^2 + xu_2^1, yu^2, zu_2^3)^{\mathrm{T}},$$
$$G_4 = x^2y^2 + x^2u_2^1 + y^2u_2^2 + z^2u_2^3.$$

选取$u_2 = (-x^2, -y^2, -z^2)^{\mathrm{T}}$, 则

$$G_4 = -x^4 + x^2y^2 - y^4 - z^4.$$

此时$\beta_{0,0}^4 = -1 \neq 0$, 从而

$$x\frac{\partial V_4}{\partial y} - y\frac{\partial V_4}{\partial x} \neq G_4.$$

因此$n = 4, l = 2, n_1 = 1, n_2 = 2, n_l = n/2$.

经计算可得, $\lambda_0^4 = -\beta_{0,0}^4 = 1 \neq 0$, $\lambda_1^4 = 0$, $\lambda_2^4 = \dfrac{5}{8}$, 从而存在$\delta > 0$, 使得$0 < \rho < \delta$时,

$$W_0(r,z) = \frac{5r^4}{8} + z^4 > 0.$$

由第4节定理1可知, 系统(14)在控制律$u = (-x^2, -y^2, -z^2)^{\mathrm{T}}$作用下于$(0,0,0)$处局部渐近稳定.

事实上, 对于闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y + xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = -x - y^3, \\ \dot{z} = -z^3, \end{cases}$$

可取Lyapunov函数为

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{8}xy^3 - \frac{3}{8}x^3y.$$

由$\dot{V} = -(\dfrac{5r^4}{8} + z^4) + o(\rho^4)$可知, 系统(14)是局部可渐近镇定的.

6 总结(Conclusions)

本文分析了一类三维非线性临界控制系统的光滑控制律构造问题, 运用扩展的正则判别函数法, 通过线性系数关系的构造, 给出了控制律和闭环系统Lyapunov函数的构造方法, 从而得到了该系统局部渐近镇定的充分条件. 最后通过示例验证了所给方法的有效性.

本文的构造方法具有较小的保守性, 为研究一般临界控制系统的镇定性提供了可借鉴的方法.

在第5节的例子中, 若改选取控制律为$u = (0, -y^2, -z^2)^{\mathrm{T}}$, 则由$G_4 = x^2y^2 - y^4 - z^4$可知

$$x\frac{\partial V_4}{\partial y} - y\frac{\partial V_4}{\partial x} \neq G_4.$$

因此$n = 4, l = 2, n_1 = 1, n_2 = 2, n_l = n/2, \lambda_0^4 = 1$, $\lambda_1^4 = 0, \lambda_2^4 = 1/4$. 由

$$W_0(r,z) = \frac{1}{4}r^4 + z^4 > 0$$

可知, 系统(14)是局部可渐近镇定的. 或直接取Lyapunov函数为

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{4}xy^3 + \frac{1}{4}x^3y,$$

也可得到相同的结论.

值得一提的是该方法得以实现的前提是系统必须存在光滑控制律. 临界系统光滑控制律的存在性可应用文献[17]中受控中心流形的方法来判定.

参考文献(References):

[1] BACCIOTTI A. *Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems*[M]. Singapore: World Scientific, 1992.

[2] BROCKETT R W, MILLMAN R S, SUSSMANN H J. Asymptotic stability and feedback stabilization[M] //*Differential Geometric Control Theory*. Boston: Birkhauser, 1983.

[3] AEYELS D. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control[J]. *Systems & Control Letters*, 1985, 5(4): 289 – 294.

[4] 王联, 王慕秋. 非线性常微分方程稳定性分析[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1987.
(WANG Lian, WANG Muqiu. *Stability Analysis of Nonlinear Ordinary Differential Equation*[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1987.)

[5] 张芷芬, 丁同仁. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
(ZHANG Zhifen, DING Tongren. *Differential Eguation Stability Theory*[M]. Beijing: Science Press, 1985.)

[6] 李春文, 张平, 乔岩. 一类二维临界非线性系统的稳定性判别[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(6): 842 – 846.
(LI Chunwen, ZHANG Ping, QIAO Yan. Sufficient conditions for stability of a class of two-dimensional critical nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(6): 842 – 846.)

[7] 苗原, 李春文, 胡世文. 二维齐次高阶临界系统的稳定性判别算法[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(3): 430 – 433.
(MIAO Yuan, LI Chunwen, HU Shiwen. Stability determination algorithm for 2-dimension high order singular system[J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(3): 430 – 433.)

[8] 刘向东, 黄文虎. 非线性临界系统稳定性分析的中心流形方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1999, 31(6): 1 – 4.
(LIU Xiangdong, HUANG Wenhu. Center manifold method for stability analysis of nonlinear systems in critical cases[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 1999, 31(6): 1 – 4.)

[9] 倪郁东, 沈吟东. 二维非线性临界解析动态系统的局部渐近稳定性[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 179 – 182.
(NI Yudong, SHEN Yindong. Locally asymptotic stability of 2-dimension nonlinear analytic dynamic systems in critical cases[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 179 – 182.)

[10] 倪郁东, 费树岷, 沈吟东. 临界状态下二维仿射控制系统的局部光滑镇定[C] //2009中国控制与决策会议论文集, 纽约: IEEE出版社, 2009: 830 – 834.
(NI Yudong, FEI Shumin, SHEN Yindong. Local smooth stabilizability of 2-dimension nonlinear control systems in critical cases[C] //*Proceedings of 2009 Chinese Conference on Control and Decision*. New York: IEEE, 2009: 830 – 834.)

[11] FU J H, ABED E H. Families of Lyapunov functions for nonlinear systems in critical cases[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(1): 3 – 16.

[12] FU J H. On Lyapunov stability and normal forms of nonlinear systems with a nonsemisimple critical mode-part I: zero eigenvalue[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2000, 47(6): 838 – 849.

[13] FU J H. On Lyapunov stability and normal forms of nonlinear systems with a nonsemisimple critical mode-part II: imaginary eigenvalues pair[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2000, 47(6): 850 – 859.

[14] 倪郁东, 辛云冰, 沈吟东. 三维非线性临界解析动态方程的局部渐近稳定性[J]. 中国科学技术大学学报, 2007, 37(12): 1378 – 1382.
(NI Yudong, XIN Yunbing, SHEN Yindong. Local asymptotic stability of 3-dimension nonlinear analytic dynamic systems in critical cases[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2007, 37(12): 1378 – 1382.)

[15] ALEKSANDROV A Y, PLATONOV A V. Stability conditions for a class of nonlinear dynamical systems[C] //*Proceedings of 2005 International Conference on Physics and Control*. New York: IEEE, 2005. 8: 652 – 655.

[16] DAYAWANSA W P, MARTIN C F. Some Sufficient conditions for the asymptotic stabilizability of three dimensional homogeneous polynomial systems[C] //*Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1989, 2: 1366 – 1369.

[17] 吉英存, 高为炳. 受控中心流形与非线性临界镇定[J]. 控制理论与应用, 1993, 10(4): 447 – 450.
(JI Yingcun, GAO Weibing. Controlled center manifold and stabilization of nonlinear control systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1993, 10(4): 447 – 450.)

[18] LIAW D C, CHEN C H. Stabilization of nonlinear systems in compound critical cases[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, 130(2/3): 317 – 360.

作者简介:

倪郁东 (1963–), 男, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为非线性系统分析与设计、运动控制与优化, E-mail: niyudong888@126.com;

费树岷 (1961–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性控制系统分析与综合、时滞与切换控制系统分析与设计、工业过程控制, E-mail: smfei@seu.edu.cn.