

基于Delta算子的永磁直线同步电机非脆弱保性能速度控制器设计

林瑞全, 陈四连, 丁旭玮

(福州大学电气工程与自动化学院, 福建 福州 350108)

摘要: 利用Delta算子离散化系统采样周期是显式参数的特点, 基于Delta算子方法对永磁直线同步电机(PMLSM)不同采样周期下的非脆弱保性能速度控制器的统一化设计问题进行研究。以线性矩阵不等式(LMI)给出该控制器的存在条件。通过对PMLSM闭环系统极点的分析, 表明所设计的非脆弱保性能速度控制器不但能保证PMLSM在其对象参数和控制器参数同时发生范数有界摄动时闭环系统仍保持渐近稳定, 而且系统的二次型性能指标上界的数学期望值不超过某个给定的上界, 而不考虑控制器参数摄动情况所设计的控制器在其参数摄动时闭环系统将无法保持稳定。

关键词: 永磁直线同步电机; Delta算子; 非脆弱控制; 保性能控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Delta operator-based non-fragile guaranteed-cost speed controller for permanent magnet linear synchronous motor

LIN Rui-quan, CHEN Si-lian, DING Xu-wei

(College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou Fujian 350108, China)

Abstract: Based on Delta operator, in which the sampling period is an explicit variable, a unified design method of non-fragile guaranteed-cost speed controller for permanent magnet linear synchronous motor (PMLSM) under different sampling period is studied. The condition of existence of the controller is given in LMI form. In the pole analysis of the PMLSM, we find that even if the parameters of the PMLSM and the controller are subject to additive norm-bounded variations, the closed-loop system is still asymptotically stable, and the upper bound of the mathematical expectation of the cost function can be obtained as well. However, the closed-loop system will be unstable if the controller gain variations are not considered.

Key words: PMLSM; Delta operator; non-fragile control; guaranteed-cost control; LMI(linear matrix inequality)

1 引言(Introduction)

系统的不确定性会导致控制系统的性能指标恶化甚至导致控制系统的不稳定。于是有学者提出保性能的控制策略^[1], 其主要思想是对具有参数不确定的系统, 设计一个控制律, 使得闭环系统是鲁棒稳定, 而且不确定闭环系统的二次型性能指标不超过某个确定的上界。保性能控制理论的优点在于: 保证闭环系统鲁棒稳定的同时, 又保证了系统不确定性所引起的恶化后的性能指标小于某个上界值。该上界值使得人们对系统性能的恶化程度有了一定程度的了解。永磁直线同步电机(PMLSM)由于系统的非线性、耦合性、动子质量和粘滞摩擦系数变化、永磁体充磁的不均匀性、动子磁链分布的非正弦性、动

子槽内的磁阻的变化、环境温度和湿度的变化、电流时滞谐波等原因会造成原先建模的对象参数发生变化的情况^[2,3]。另外, 由于控制器实现时其参数发生摄动也是不可避免的, 如控制器有限字长计算机实现时会产生截断误差使得控制器参数偏离了原设计值而发生摄动^[4], 当控制器的参数发生摄动时, 会出现闭环系统的性能下降, 甚至导致闭环系统失去稳定性^[5~7]。因此, 对PMLSM进行保性能速度控制器设计时控制器参数的摄动问题也是不能忽略的。另外, 相比移位算子(传统z变换)描述的离散系统, 采用Delta算子描述的离散系统其采样周期是显式参数, 可以便于观察和分析采样周期对系统性能的影响^[8]。为此, 本文综合考虑: 1) PMLSM对象参数

不确定; 2) 控制器参数发生摄动; 3) 采样周期变化; 4) 对PMLSM进行保性能控制的情况, 利用Delta算子离散化系统的方法对PMLSM在不同采样周期下的非脆弱保性能速度控制器的统一化设计问题进行研究, 而且要确保PMLSM对象参数和控制器参数均发生摄动时还能够保证闭环系统渐近稳定并满足所期望的性能要求。

2 Delta算子系统非脆弱保性能控制器的设计(Design of non-fragile guaranteed-cost controller for Delta operator systems)

考虑由以下方程描述的一类Delta算子系统:

$$\begin{cases} \delta x(k) = (A_\delta + \Delta A_\delta)x(k) + (B_\delta + \Delta B_\delta)u(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入向量。 $\Delta A_\delta, \Delta B_\delta$ 为不确定实数矩阵函数, 它们表示了系统中随时间变化的参数不确定性, 满足

$$[\Delta A_\delta \ \Delta B_\delta] = [M]F_1[Y_1 \ Y_2]. \quad (2)$$

其中: M, Y_1, Y_2 分别为具有合适维数的已知实矩阵, F_1 为Lebesgue可测且满足 $F_1^T F_1 \leq I$.

定义 1 对于Delta算子系统(1), 定义二次型性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k)), \quad (3)$$

其中 $R_1, R_2 > 0$ 为给定的加权矩阵。

如果存在一个非脆弱状态反馈控制律

$$u(k) = \bar{K}x(k) = (K + \Delta K)x(k), \quad (4)$$

其中: K 为所设计的控制器参数, ΔK 为控制器参数发生的摄动量, 它具有加性范数有界形式, 而且满足

$$\Delta K = HFE. \quad (5)$$

其中: H, E 分别为具有合适维数的已知实矩阵, F 为Lebesgue可测且满足 $F^T F \leq I$, 使得闭环系统

$$\begin{aligned} \delta x(k) &= A_{\delta k}x(k) = \\ &((A_\delta + \Delta A_\delta) + (B_\delta + \Delta B_\delta)(K + \Delta K))x(k) \end{aligned} \quad (6)$$

对所有满足 $F^T F \leq I$ 的 F 和所有满足 $F_1^T F_1 \leq I$ 的 F_1 是渐近稳定且二次型性能指标 J 的值不超过某个确定的上界, 则称参数 K 为该Delta算子系统非脆弱保性能控制器参数。

定理 1 对于系统(1), 采用非脆弱状态反馈控制律(4)所得到的Delta算子闭环系统(6)是渐近稳定且二次型性能指标(3)具有一个性能上界 J^* 的充分

条件是存在正定对称矩阵 P , 使得下列矩阵不等式(7)成立:

$$\begin{bmatrix} PA_{\delta k} + A_{\delta k}^T P + R_1 + \bar{K}^T R_2 \bar{K} & \sqrt{T} A_{\delta k}^T \\ \sqrt{T} A_{\delta k} & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

此时, 二次型性能指标

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k)) \leq \\ J^* &= x_0^T P / T x_0. \end{aligned} \quad (8)$$

证 选取Lyapunov函数

$$V(k) = x^T(k)Px(k), \quad (9)$$

则有

$$\begin{aligned} \delta V(k) &= (V(k+1) - V(k))/T = \\ &(x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k))/T = \\ &x^T(k)(PA_{\delta k} + A_{\delta k}^T P + TA_{\delta k}^T PA_{\delta k})x(k). \end{aligned}$$

若

$$x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k) + \delta V(k) < 0,$$

则有

$$PA_{\delta k} + A_{\delta k}^T P + TA_{\delta k}^T PA_{\delta k} + R_1 + \bar{K}^T R_2 \bar{K} < 0. \quad (10)$$

根据Schur补引理^[8], 式(10)成立等价于式(7)成立. 由于

$$x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k) + \delta V(k) \geq 0,$$

当式(7)成立时有 $\delta V(k) < 0$, 也就是说当式(7)成立时Delta算子闭环系统(6)是渐近稳定. 另外, 若

$$x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k) + \delta V(k) < 0,$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k) + \delta V(k)) &= \\ \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k)) + (V(\infty) - V(0)) / T. \end{aligned}$$

由于 $V(\infty) \rightarrow 0$, 所以二次型性能指标

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k)) \leq \\ V(0)/T &= J^* = x_0^T P / T x_0. \end{aligned} \quad (11)$$

证毕.

定理 2 对于系统(1), 采用控制器参数摄动如式(5)所示的状态反馈控制律(4), 所得到的Delta算子闭环系统(6)是渐近稳定且二次型性能指标(3)具有性能上界 J^* 的充分条件是存在常数 $\lambda, \lambda_1 > 0$, 正定对称矩阵及矩阵 Q , 使得下列LMI(12)成立:

$$\begin{bmatrix} \psi & * & * & * & * & * & * & * \\ (A_\delta X + B_\delta Q) & -X & * & * & * & * & * & * \\ Q & 0 & -R_2^{-1} & * & * & * & * & * \\ X & 0 & 0 & -R_1^{-1} & * & * & * & * \\ \lambda M^T & \lambda\sqrt{T}M^T & 0 & 0 & -\lambda I & * & * & * \\ Y_1 X + Y_2 Q & 0 & 0 & 0 & -\lambda I & * & * & * \\ \lambda_1 (B_\delta H)^T & \lambda_1 (B_\delta H)^T & \lambda_1 H^T & 0 & 0 & \lambda_1 H^T Y_2^T & -\lambda_1 I & * \\ EX & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 I \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

此时控制器参数 $K = QX^{-1}$, 二次型性能指标 J 满足 $J \leq J^* = x_0^T P / Tx_0$. 式(12)中

$$\psi = (A_\delta X + B_\delta Q) + (XA_\delta^T + Q^T B_\delta^T).$$

从式(12)可以看出, 采样周期 T 是显式参数. 因此, 通过求解该LMI可以得出系统(1)在不同采样周期下的非脆弱保性能控制器参数.

证 把式(7)两边左乘和右乘矩阵

$$G = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (13)$$

得

$$\begin{bmatrix} \pi & \sqrt{T}A_{\delta k}^T \\ \sqrt{T}A_{\delta k} & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

式(14)中

$$\pi = A_{\delta k} P^{-1} + P^{-1} A_{\delta k}^T + P^{-1} R_1 P^{-1} \bar{K}^T R_2 P.$$

令

$$X = P^{-1}, \quad \bar{Q} = \bar{K}X,$$

式(14)进一步可等价于式(15)成立:

$$\begin{bmatrix} A_{\delta k} X + X A_{\delta k}^T & \sqrt{T} X A_{\delta k}^T & \bar{Q}^T & X \\ \sqrt{T} A_{\delta k} X & -X & 0 & 0 \\ \bar{Q} & 0 & -R_2^{-1} & 0 \\ X & 0 & 0 & -R_1^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

把 $A_{\delta k} = (A_{\delta k} + \Delta A_{\delta k}) + (B_{\delta k} + \Delta B_{\delta k}) \bar{K}$ 以及 $[\Delta A_{\delta k} \ \Delta B_{\delta k}] = [M][Y_1 \ Y_2]$ 代入式(15), 得

$$\begin{bmatrix} \Sigma & * & * & * \\ \sqrt{T}(A_\delta X + B_\delta \bar{Q}) & -X & * & * \\ \bar{Q} & 0 & -R_2^{-1} & * \\ X & 0 & 0 & -R_1^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega & * & * & * \\ \sqrt{T}(MF_1 Y_1 X + MF_1 Y_2 \bar{Q}) & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Sigma &= A_\delta X + B_\delta \bar{Q} + (A_\delta X + B_\delta \bar{Q})^T, \\ \Omega &= MF_1 Y_1 X + MF_1 Y_2 \bar{Q} + (MF_1 Y_1 X + MF_1 Y_2 \bar{Q})^T. \end{aligned}$$

根据文献[8]中的有关引理, 式(16)可进一步等价于

$$\begin{bmatrix} \Gamma & * & * & * & * & * \\ \mu & -X & * & * & * & * \\ \bar{Q} & 0 & -R_2^{-1} & * & * & * \\ X & 0 & 0 & -R_1^{-1} & * & * \\ \lambda M^T & \lambda\sqrt{T}M^T & 0 & 0 & -\lambda I & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Gamma &= A_\delta X + B_\delta \bar{Q} + X A_\delta^T + \bar{Q}^T B_\delta^T, \\ \mu &= A_\delta X + B_\delta \bar{Q}, \\ \nu &= Y_1 X + Y_2 \bar{Q}. \end{aligned}$$

假设控制器参数摄动形式如式(5)所示, 把 $\bar{Q} = \bar{K}X = KX + HFEX$ 代入式(17), 得

$$\begin{bmatrix} A & * & * & * & * & * \\ \alpha & -X & * & * & * & * \\ KX + HFEX & 0 & -R_2^{-1} & * & * & * \\ X & 0 & 0 & -R_1^{-1} & * & * \\ \lambda M^T & \lambda\sqrt{T}M^T & 0 & 0 & -\lambda I & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} A &= A_\delta X + B_\delta(KX + HFEX) + (X A_\delta^T (KX + HFEX)^T B_\delta^T), \\ \alpha &= A_\delta X + B_\delta(KX + HFEX), \\ \beta &= Y_1 X + Y_2(KX + HFEX). \end{aligned}$$

令 $Q = KX$, 再次根据文献[8]中的有关引理, 若式(18)成立可等价于式(12)成立. 证毕.

3 PMLSM不同采样周期下的非脆弱保性能速度控制器设计(Design of non-fragile guaranteed-cost speed controller for PMLSM under different sampling periods)

若对PMLSM作如下假设^[9]: 1) 忽略铁心饱和; 2) 不计涡流和磁滞损耗; 3) 动子上没有阻尼绕组, 永磁体也没有阻尼作用; 4) 反电动势是正弦信号. 电流内环采用磁场分量*i_d* = 0的控制策略, 取状态变量*x* = [x₁ x₂]^T, 其中: x₁为参考输入与实际被控对象的速度输出误差, x₂为速度输出误差的积分项, i_q看成是系统的输入*u*, PMLSM的速度为系统的输出, 根据文献[10,11], 可以得到PMLSM的Delta算子数学模型为:

$$\begin{cases} \delta x(k) = A_{\delta}x(k) + B_{\delta}u(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} \delta x(k) &= (x(k+1) - x(k))/T, \\ A_{\delta} &= (A_z - I)/T, \quad B_{\delta} = B_z/T, \\ A_z &= e^{AT}, \quad B_z = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau, \quad C = [1 \ 0], \\ A &= \begin{bmatrix} -B_{\nu}/m & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3\pi\lambda_{PM}/2\tau m \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

*m*为动子质量, *B_ν*为粘滞摩擦系数, λ_{PM} 为定子永磁体产生的励磁磁链, τ 为极距.

假设有一PMLSM, 其额定参数为^[12]: 动子质量*m* = 11.0 kg, 粘滞摩擦系数*B_ν* = 8.0 (N · s)/m, 电磁推力系数*K_f* = $3\pi\lambda_{PM}/2\tau$ = 28.5 N/A, 动子给定速度*v_n* = 1.0 m/s, 则当采样周期*T* = 0.005 s时, PMLSM的Delta算子模型参数为:

$$A_{\delta} = \begin{bmatrix} -0.7260 & 0 \\ 0.9982 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\delta} = \begin{bmatrix} 2.5862 \\ 0.0065 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

同时, 本文假设PMLSM对象参数摄动表达式(2)满足:

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

二次型性能指标的加权系数:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = 1. \quad (22)$$

控制器参数摄动表达式(5)满足:

$$H = [0.1 \ 0.5], \quad E = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

并且假设PMLSM状态变量*x* = [x₁ x₂]^T的初始状态*x₀*是一个满足*E[x₀ x₀]^T] = 1的零均值随机变量. 根据定理(2), 利用MATLAB中的LMI优化工具箱^[13]可得到采样周期*T* = 0.005 s时的PMLSM非脆弱保性能速度控制器参数的优化值为*

$$K = [-0.4389 \ -0.3412]. \quad (24)$$

此时, 二次型性能指标上界的最小值为

$$J^* = \text{tr}(P/T) = 20.5674. \quad (25)$$

若PMLSM对象参数和控制器参数发生如式(21)(22)所示的摄动, 当*F₁* = *I*, *F* = *I*时闭环系统极点为

$$[-1.2697 \ -0.1894]. \quad (26)$$

此时, 闭环系统极点位于圆心为(-1/*T*, 0)、半径为1/*T*的圆内, 根据Delta算子系统的稳定性判断依据, 闭环系统稳定. 若不考虑控制器参数摄动的情况, 此时可得到采样周期*T* = 0.005 s时的PMLSM非脆弱保性能速度控制器参数的优化值为

$$K = [-0.3495 \ -0.2531]. \quad (27)$$

同样, 若此时PMLSM对象参数和控制器参数也发生如式(21)(22)所示的摄动, 当*F₁* = *I*, *F* = *I*时闭环系统的极点则为

$$[-1.2353 \ 0.0113]. \quad (28)$$

此时, 闭环系统有一极点位于圆心为(-1/*T*, 0), 半径为1/*T*的圆外, 根据Delta算子系统的稳定性判断依据, 闭环系统不稳定. 也就是说, 不考虑控制器参数摄动所设计的PMLSM速度控制器在其参数发生摄动时PMLSM将不稳定, 更谈不上性能指标的满足. 由于定理(2)中采样周期是显式参数, 若采样周期的取值发生变化, 根据定理(2), 同样可以得到不同采样周期所对应的非脆弱保性能速度控制器参数.

4 结束语(Conclusion)

本文首先采用Lyapunov稳定性理论和Delta算子方法对不同采样周期下的非脆弱保性能速度控制器的统一化设计方法进行了研究, 以LMI形式给出了控制器存在的充分条件. 在此基础上, 对PMLSM的非脆弱保性能速度控制器进行设计. 由于非脆弱保性能速度控制器存在的充分条件中采样周期*T*是显式参数, 因此, 在得出PMLSM的Delta算子模型后, 利用本文的充分条件就可以求

解得到PMLSM在不同采样周期下的非脆弱保性能速度控制器参数。通过对PMLSM闭环系统极点的分析,可以看出在利用Delta算子方法对PMLSM进行保性能速度控制器统一化设计的同时,考虑控制器参数摄动的情况也是完全必要的。若不考虑控制器参数摄动所设计的控制器在其参数发生摄动时可能会造成系统的不稳定。

参考文献(References):

- [1] CHANG S S L, PENG T K C. Adaptive guaranteed-cost control of systems with uncertainty parameters[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474 – 483.
- [2] 叶云岳. 直线电机原理与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2000. (YE Yunyue. *Linear Motor Principle and Application*[M]. Beijing: China Machine Press, 2000.)
- [3] CHEUNG N C, CHEN Y R, WU J. H_∞ control of permanent magnet linear motor in transportation systems[C] //Proceeding of the Fifth International Conference on Electrical Machines and Systems. Beijing: World Publication Corporation, 2001: 706 – 709.
- [4] WU J, CHEN S, LI G. Shift and delta operator realizations for digital controllers with finite word length considerations[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2000, 147(6): 664 – 672.
- [5] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust, fragile, or optimal[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1098 – 1105.
- [6] LIN R Q, YANG F W, PENG R C. Observer-based H_∞ output feedback control with feedback gain and observer gain variations for Delta operator system[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2009, 7(2): 169 – 174.
- [7] LIEN C H, CHENG W C, TSAI C H. Non-fragile observer-based controls of linear system via LMI approach[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 32(4): 1530 – 1537.
- [8] LIN R Q, YANG F W, CHEN Q G. Design of robust non-fragile H_∞ -controller based on Delta operator theory[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2007, 5(4): 404 – 408.
- [9] 赵希梅, 郭庆鼎. 永磁直线同步电动机的非脆弱零相位 H_∞ 鲁棒跟踪控制[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(20): 132 – 136. (ZHAO Ximei, GUO Qingding. Variable gain zero phase H_∞ robust tracking control for permanent magnet linear synchronous motor[J]. *Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 2005, 25(20): 132 – 136.)
- [10] 林瑞全, 杨富文. 基于Delta算子理论的永磁直线同步电机非脆弱 H_∞ 速度伺服控制系统[J]. 电工技术学报, 2008, 23(4): 44 – 47. (LIN Ruiquan, YANG Fuwen. Non-fragile H_∞ speed servo control based on Delta operator for permanent magnet linear synchronous motor[J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2008, 23(4): 44 – 47.)
- [11] 李惠光, 武波, 李国友, 等. Delta算子控制及其鲁棒控制理论基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005. (LI Huiguang, WU Bo, LI Guoyou, et al. *Basic Theory of Delta Operator Control and Its Robust Control*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2005.)
- [12] 林瑞全. 基于Delta算子的非脆弱控制及其在永磁直线同步电机中的应用[D]. 福州: 福州大学, 2007. (LIN Ruiquan. *Non-fragile control and its application in PMLSM based on Delta operator*[D]. Fuzhou: Fuzhou University, 2007.)
- [13] 俞立. 鲁棒控制-LMI方法处理矩阵不等式[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. (YU Li. *Robust Control-LMI Approach*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

作者简介:

- 林瑞全** (1971—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为电机控制策略、Delta算子理论, E-mail: rqlin@fzu.edu.cn;
- 陈四连** (1984—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为电机控制策略;
- 丁旭玮** (1987—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为电机控制策略。