第 28 卷第 2 期
2011 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 2
Feb. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)02−0247−09

不确定系统混合H_2/H_∞鲁棒控制的直接迭代LMI方法

叶思隽, 王新民, 张清江, 李 俨

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710129)

摘要: 设计多胞型不确定系统的控制器时, 引入附加变量能够减小设计保守性, 但这会使线性矩阵不等式(LMI)的维数大大增加, 控制器难以求解. 本文阐述了一种基于直接迭代线性矩阵不等式(DILMI)方法的混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$鲁棒控制方法. 首先借助于仿射二次稳定理论将整个多胞型不确定集合的稳定性问题转化为该集合各顶点的稳定性问题. 利用参数依赖Lyapunov方法, 给出了一个保证系统鲁棒稳定, 并满足混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$性能指标的充分条件. 随后采用DILMI算法实现了Lyapunov变量和控制增益的解耦, 无需引入附加变量就能够求解充分条件中的非凸优化问题. 最后, 关于F-16多胞型模型的飞行仿真验证了该方法的有效性.

关键词: 多胞型不确定系统; 仿射二次稳定; 鲁棒控制; 混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$控制; 直接迭代线性矩阵不等式(DILMI)

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Direct iterative LMI-based approach of mixed H-two/H-infinity robust control for uncertain systems

YE Si-jun, WANG Xin-min, ZHANG Qing-jiang, LI Yan

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710129, China)

Abstract: For the controller design of polytopic uncertain systems, the additional variables method is effective to reduce conservativeness. However, this method makes the dimension of linear matrix inequality (LMI) higher. Motivated by the direct iterative linear matrix inequality (DILMI) approach, a mixed H-two/H-infinity robust control method for polytopic uncertain systems is proposed. First, based on the affine quadratic stability theory, it is proved that the stability of a polytopic uncertain system can be transformed into the stability of the system at vertices of the polytope. In the light of this perspective, a sufficient condition is derived from parameter-dependent Lyapunov approach to guarantee the robust stability and mixed H-two/H-infinity performance of the polytopic uncertain system. Then, a DILMI algorithm is developed for decoupling the Lyapunov variables and the controller gain. The algorithm solves the non-convex optimization problem of the sufficient condition without introducing any additional variables. Finally, simulation results based on the F-16 polytopic model are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: polytopic uncertain systems; affine quadratic stability; robust control; mixed H-two/H-infinity control; direct iterative linear matrix inequality (DILMI)

1 引言(Introduction)

近年来, 不确定系统的鲁棒稳定性成为控制系统分析与综合的一个重要内容. 其中, Lyapunov稳定性理论是分析系统鲁棒稳定性最为重要的工具. 它的核心内容之一就是通过构造合适的Lyapunov函数去保证系统二次稳定[1]. 然而, 二次稳定要求在整个不确定参数集合内, 存在一个公共的Lyapunov变量. 显然, 由此获得的稳定性条件具有较大的保守性. 为了减小这种保守性, Gahinet[2]提出了仿射二次稳定的概念来处理这类问题, 并将该方法扩展至H_∞性能分析. Liao[3]将文献[2]中的结果推广成满足鲁棒稳定和$\mathrm{LQ}/\mathrm{H}_\infty$性能指标的充分条件, 并借助于线性矩阵不等式(LMI)的方法, 求解多目标优化问题.

H_2范数和H_∞范数是最优控制理论中的2个重要性能度量指标. H_2控制适合分析系统的瞬态性能; H_∞控制能够保证系统存在不确定性和扰动情况下的鲁棒稳定性. 因此, 对系统性能和鲁棒性的双重要求促使Bernstein和Haddad在1989年第一次提出了混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$控制问题[4]. 在此基础上, Zhou[5]采用代数方法对不同输入信号情况下的系统混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$鲁棒性能进行了分析. Doyle在文献[6]中将混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$控制问题分解为2个相对独立的$\mathrm{H}_2$和$\mathrm{H}_\infty$控制问题, 并给出了控制器可解的充要条件. 但是, 这一条件依赖于耦合代数Riccati方程解的存在性. 虽

收稿日期: 2009−11−25; 收修改稿日期: 2010−03−19.

然已有多种求解耦合代数Riccati方程的方法, 但是, 当2个代数Riccati方程同时存在耦合, 控制器的计算则变得困难. 为解决这一问题, 文献[7, 8]利用凸优化理论, 将混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$控制问题转化为关于凸约束集和凸目标函数的凸优化问题. 然而, 这些文献并未给出凸优化问题的解法. 随着内点法的发展, LMI的方法成为求解多约束优化问题最强有力的工具. 包括混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$问题在内的很多控制问题都可以表达为LMI的形式加以求解. 但是, 该方法的主要缺陷是与系统性能紧密相关的Lyapunov变量和系统参数变量之间存在耦合, 设计出的控制器具有较大的保守性[9,10]. 因此, 通过引入松弛变量增加LMI自由度, 消除Lyapunov变量和系统参数变量之间耦合的方法[11~16]受到了极大关注. 然而, 随着松弛变量的引入, LMI表达式的维数变得很高. 为解决这一问题, He[17]提出了一种改进的LMI优化算法, 通过两步优化过程分别求解Lyapunov变量和控制器增益, 无需在LMI表达式中加入松弛变量. 但该算法没有考虑系统的不确定性, 文中的结果仅仅应用于二次稳定性和H_∞鲁棒性能分析.

本文针对一类多胞型不确定系统, 采用参数依赖Lyapunov函数, 得到了满足仿射二次稳定的LMI表达式. 该表达式使用不同的Lyapunov变量处理混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$优化问题, 降低了设计保守性. 在文献[17]的基础上, 给出了此类不确定系统的混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$鲁棒控制器设计的直接迭代线性矩阵不等式(DILMI)算法. 该方法无需增加LMI表达式的维数就能够实现Lyapunov变量和系统参数变量的解耦. 将解耦后的系统性能约束应用于多胞型不确定系统的所有顶点, 获得的控制器即可保证系统在整个不确定集合内满足鲁棒稳定性和混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$性能指标. 针对F-16多胞型模型, 选择类似Herbst机动的飞行仿真来验证上述方法所设计的控制器的有效性. 仿真结果表明, 飞机在翼面损伤和阵风干扰的情况下, 该控制器能够跟踪输入指令飞行, 具有较好的鲁棒性和动态性能.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下的多胞型不确定系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(\theta)x(t)+B(\theta)u(t)+G(\theta)w(t),\\ y(t)=C(\theta)x(t),\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$是状态变量, $u(t)\in\mathbb{R}^m$是控制输入, $w(t)\in\mathbb{R}^h$是干扰输入, $y(t)\in\mathbb{R}^p$是输出变量. 假设不确定矩阵$A(\theta)$, $B(\theta)$, $G(\theta)$, $C(\theta)$均可以表达为某些已知矩阵的凸组合, 即$(A(\theta),\ B(\theta),\ G(\theta),\ C(\theta))\in\Theta$, 其中

$$\begin{aligned}\Theta\triangleq\{&(A(\theta),B(\theta),G(\theta),C(\theta))|\\ &(A(\theta),\ B(\theta),G(\theta),C(\theta))=\\ &\sum_{i=0}^{N}(A_i,B_i,G_i,C_i)\theta_i;\ \theta_i\geqslant 0,\\ &\sum_{i=0}^{N}\theta_i=1;\ i=0,\cdots,N\},\end{aligned}\tag{2}$$

其中: (A_i,B_i,G_i,C_i)是已知的顶点矩阵, θ_i是不确定参数. 满足式(2)的不确定系统(1)称之为多胞型不确定系统.

在跟踪控制框架下, 假设控制器设计中所关注的输出信号$Sy(t)$能够无静差的跟踪参考信号$r(t)$, 即

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=0,\ \ e(t)=r(t)-Sy(t),\tag{3}$$

其中: $e(t)$是稳态跟踪误差, $S\in\mathbb{R}^{l\times P}$是已知的常数矩阵, 用来选择输出信号. 众所周知, 在控制器设计中引入跟踪误差的积分项能够有效的消除稳态跟踪误差[3]. 将跟踪误差的积分项$\int_0^t e(t)\mathrm{d}t$看成系统状态的一部分, 则系统(1)重构为如下所示的扩维系统:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}e(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -SC(\theta)\\ 0 & A(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_0^t e(t)\mathrm{d}t\\ x(t)\end{bmatrix}+\\ \qquad\begin{bmatrix}0\\ B(\theta)\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & G(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r(t)\\ w(t)\end{bmatrix},\\ y(t)=[0\ \ C(\theta)]\begin{bmatrix}\int_0^t e(t)\mathrm{d}t\\ x(t)\end{bmatrix}.\end{cases}\tag{4}$$

定义扩维状态$\bar{x}(t)=[(\int_0^t e(t)\mathrm{d}t)^{\mathrm{T}}\ \ x^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, 扩维干扰输入$v(t)=[(r^{\mathrm{T}}(t)\ \ w^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, 扩维输出$\bar{y}(t)=y(t)$. 系统(4)可以简化为如下的表达式:

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}(\theta)\bar{x}(t)+\bar{B}(\theta)u(t)+\bar{G}(\theta)v(t),\\ \bar{y}(t)=\bar{C}\bar{x}(t),\end{cases}\tag{5}$$

其中$(\bar{A}(\theta),\ \bar{B}(\theta),\ \bar{G}(\theta),\ \bar{C}(\theta))\in\Theta$, 系统参数矩阵如下所示:

$$\bar{A}_i=\begin{bmatrix}0 & -SC_i\\ 0 & A_i\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(l+n)\times(l+n)},$$

$$\bar{B}_i=\begin{bmatrix}0\\ B_i\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(l+n)\times m},\ \bar{C}_i=[0\ \ C_i]\in\mathbb{R}^{p\times(l+n)},$$

$$\bar{G}_i=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & G_i\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(l+n)\times(l+h)}.$$

显而易见, 如果控制器能够稳定扩维系统(5), 同样能够稳定初始系统(1). 而且, 该控制器能够保证设计者所关注的系统输出与参考输入之间的稳态误差为零.

3 混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$鲁棒控制器设计(Mixed $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ robust controller design)

本节将利用一种新的DILMI方法设计混合

H_2/H_∞鲁棒控制器, 并将其应用于飞行跟踪控制. 要求该控制器在整个不确定集合内满足:

1) 闭环系统鲁棒渐近稳定;

2) 最优化闭环系统的H_2范数性能指标, 同时满足H_∞范数上界.

假设系统在任一时刻的状态值都是可得的, 设计如下的无记忆状态反馈控制器:

$$u(t) = K\bar{x}(t) = K_{\mathrm{e}}\int_0^t e(t)\mathrm{d}t + K_{\mathrm{x}}x(t). \tag{6}$$

其中$K = [K_{\mathrm{e}}\ \ K_{\mathrm{x}}] \in \mathbb{R}^{m\times(l+p)}$是需要获得的控制器增益矩阵.

将式(6)代入式(5), 获得闭环扩维系统表达式:

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}(\theta) + \bar{B}(\theta)K)\bar{x}(t) + \bar{G}(\theta)v(t),\\ \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t).\end{cases} \tag{7}$$

根据闭环系统(7)对动态性能和鲁棒性的不同要求, 在系统中引入分别对应H_∞和H_2性能指标的被调输出$z_\infty(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$和$z_2(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$, 获得新的闭环系统:

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}(\theta) + \bar{B}(\theta)K)\bar{x}(t) + \bar{G}(\theta)v(t),\\ \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t),\\ z_\infty(t) = (C_\infty + D_\infty K)\bar{x}(t),\\ z_2(t) = (C_2 + D_2K)\bar{x}(t),\end{cases} \tag{8}$$

其中$C_2, D_2, C_\infty, D_\infty$是已知的加权矩阵.

在给出本文的主要结果之前, 首先介绍几个对结果推导有着重要意义的定义和引理. 其中, 对于任何矩阵M, $S(M)$定义为

$$S(M) = M + M^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

注 1　矩阵表达式中的星号表示对称矩阵的对称项.

定义 1[1]　混合H_2/H_∞约束

给定H_∞范数上界γ, 寻找一个状态反馈控制器增益K保证闭环系统渐进稳定的同时满足以下的优化问题:

$$\begin{cases}\min\ \ \|T_{z_2v}\|_2 =\\ \min\{\mathrm{tr}(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}T(\mathrm{j}\omega)T^{\mathrm{T}}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega)^{1/2}\},\\ \text{s.t. } \|T_{z_\infty v}\|_\infty = (\sup\limits_{\omega}(\sigma_{\max}(T(\mathrm{j}\omega)))) < \gamma,\end{cases} \tag{10}$$

其中: $T_{z_\infty v}$表示从$v(t)$到$z_\infty(t)$的传递函数, T_{z_2v}表示从$v(t)$到$z_2(t)$的传递函数. H_2和H_∞范数分别对应系统脉冲响应的总能量输出和系统频率响应的最大奇异值的峰值.

定义 2[2]　仿射二次稳定

考虑多胞型不确定系统(1), 如果存在$i+1$个正定实对称矩阵$P_0, \cdots, P_i$, 使得对于任意不确定参数向量$\theta = (\theta_0, \cdots, \theta_i)$的仿射Lyapunov函数, 有

$$V(x,\theta) = x^{\mathrm{T}}P(\theta)x > 0,\ \dot{V}(x,\theta) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0, \tag{11}$$

其中Lyapunov变量$P(\theta) = \theta_0P_0 + \theta_1P_1 + \cdots + \theta_iP_i$, 则系统(1)仿射二次稳定, 即渐近稳定.

定理 1　针对闭环系统(8), 给定正标量γ和λ, 如果存在对称正定矩阵$P(\theta)$, $Q(\theta)$和状态反馈混合H_2/H_∞控制器增益K, 满足下面的优化问题:

$$\min(\mathrm{tr}(Q(\theta)))\ \text{ s.t.}$$

$$\begin{bmatrix}(\bar{A}(\theta)+\bar{B}(\theta)K)^{\mathrm{T}}P(\theta)+P(\theta)(\bar{A}(\theta)+\bar{B}(\theta)K) & * & * \\ \bar{G}^{\mathrm{T}}(\theta)P(\theta) & -\gamma I & * \\ C_\infty + D_\infty K & 0 & -\gamma I\end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

$$(\bar{A}(\theta)+\bar{B}(\theta)K)^{\mathrm{T}}P(\theta)+P(\theta)(\bar{A}(\theta)+\bar{B}(\theta)K)+ (C_2+D_2K)^{\mathrm{T}}(C_2+D_2K) < 0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}Q(\theta) & \bar{G}^{\mathrm{T}}(\theta)P(\theta)\\ P(\theta)\bar{G}(\theta) & P(\theta)\end{bmatrix} > 0, \tag{14}$$

$$\mathrm{tr}(Q(\theta)) < \lambda^2, \tag{15}$$

则所得到的控制器保证闭环系统对于任意不确定参数向量$\theta = (\theta_0, \cdots, \theta_i)$仿射二次稳定, 并且满足定义1中的混合$H_2/H_\infty$约束.

根据定义1、定义2, H_∞范数有界实引理和文献[18]中的定理3.1.5, 易于证明定理1, 篇幅原因, 略去证明过程.

注 2　定理1中, 由于不确定参数向量θ的存在, 仿射Lyapunov函数$P(\theta)$和系统矩阵之间存在耦合. 该特性使得定理1中表述的优化问题非凸, 无法使用LMI的方法求解控制器. 因此, 借助以下的引理, 将不确定参数从定理1的表达式中分离出来, 得到一个保证系统在整个不确定集合内仿射二次稳定, 并满足混合H_2/H_∞性能指标的充分条件.

引理 1[2]　考虑一个关于不确定参数θ的仿射二次型函数

$$f(\theta_1,\cdots,\theta_K) = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i\theta_i + \sum_{i<j}\beta_{ij}\theta_i\theta_j + \sum_i \delta_i\theta_i^2, \tag{16}$$

其中θ和$\dot{\theta}$位于文献[2]中式(3)和式(5)描述的超长方体中. 假设$f(\cdot)$是复合凸的, 即

$$2\delta_i = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i^2}(\theta) \geqslant 0,\ i = 0,\cdots,K, \tag{17}$$

则$f(\cdot)$在整个超长方体中负定, 当且仅当$f(\cdot)$在超长方体的顶点上保持负定.

定理 2　考虑闭环系统(8), 对于给定的正标量γ_i和λ_i和足够小的正标量μ, 得到的控制器增益K能够保证闭环系统仿射二次稳定, 并且满足定义1中

的混合H_2/H_∞约束. 如果存在正定对称矩阵$P_{\infty i}$, P_{2i}, Q_i和满足如下的优化问题:

$\min[\mathrm{tr}(Q_0)]$ s.t.

$$\begin{bmatrix}(\bar{A}_i+\bar{B}_iK)^{\mathrm{T}}P_{\infty i}+P_{\infty i}(\bar{A}_i+\bar{B}_iK) & * & * \\ \bar{G}_i^{\mathrm{T}}P_{\infty i} & -\gamma_i I & * \\ C_\infty+D_\infty K & 0 & -\gamma_i I\end{bmatrix}<0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix}(\bar{A}_i+\bar{B}_iK)^{\mathrm{T}}P_{2i}+P_{2i}(\bar{A}_i+\bar{B}_iK) & * \\ C_2+D_2K & -I\end{bmatrix}<0, \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}Q_i & \bar{G}_i^{\mathrm{T}}P_{2i} \\ P_{2i}\bar{G}_i & P_{2i}\end{bmatrix}>0, \tag{20}$$

$$\mathrm{tr}(Q_i)<\lambda_i^2,\ i=0,\cdots,N, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)^{\mathrm{T}}(P_{\infty i}-P_{\infty 0})+(P_{\infty i}-P_{\infty 0})((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)+\mu I & * \\ (\bar{G}_i-\bar{G}_0)^{\mathrm{T}}(P_{\infty i}-P_{\infty 0}) & \mu I\end{bmatrix}>0, \tag{22}$$

$$((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)^{\mathrm{T}}(P_{2i}-P_{20})+(P_{2i}-P_{20})((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)+\mu I>0,\ i=1,\cdots,N. \tag{23}$$

证 考虑闭环扩维系统(8), 根据定义1, H_∞范数有界实引理和文献[18]中的定理3.1.5, 易证如果存在对应多胞形各顶点的对称正定矩阵$P_{\infty i}$, P_{2i}和Q_i满足定理2中的式(18)~(21), 则系统在每个顶点上渐近稳定, 并且满足定义1中的混合H_2/H_∞约束.

考虑参数依赖Lyapunov矩阵:

$$P_\infty(\theta)=\sum_{i=0}^{N}P_{\infty i}\theta_i,\ P_2(\theta)=\sum_{i=0}^{N}P_{2i}\theta_i,$$

参数依赖性能矩阵$Q(\theta)=\sum\limits_{i=0}^{N}Q_i\theta_i$, 由$\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i=1$可知

$$\theta_0=1-\sum_{i=1}^{N}\theta_i. \tag{24}$$

将上式分别代入$P_\infty(\theta)$, $P_2(\theta)$, $Q(\theta)$和系统矩阵, 可得:

$$P_\infty(\theta)=P_{\infty 0}+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(P_{\infty i}-P_{\infty 0}),$$

$$P_2(\theta)=P_{20}+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(P_{2i}-P_{20}),$$

$$Q(\theta)=Q_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(Q_i-Q_0),$$

$$A(\theta)=A_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(A_i-A_0),$$

$$B(\theta)=B_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(B_i-B_0),$$

$$G(\theta)=G_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(G_i-G_0).$$

将以上的表达式代入式(12)和(13), 可得:

$$f_\infty(\theta)=\begin{bmatrix}\mathrm{S}\{((A_0+\sum\limits_{i=1}^{N}\theta_i(A_i-A_0))+(B_0+\sum\limits_{i=1}^{N}\theta_i(B_i-B_0))K)(P_{\infty 0}+\sum\limits_{i=1}^{N}\theta_i(P_{\infty i}-P_{\infty 0}))\} & * & * \\ (G_0+\sum\limits_{i=1}^{N}\theta_i(G_i-G_0))^{\mathrm{T}}(P_{\infty 0}+\sum\limits_{i=1}^{N}\theta_i(P_{\infty i}-P_{\infty 0})) & -\gamma I & * \\ C_\infty+D_\infty K & 0 & -\gamma I\end{bmatrix}<0, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}f_2(\theta)=&((A_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(A_i-A_0))+(B_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(B_i-B_0))K)(P_{\infty 0}+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(P_{\infty i}-P_{\infty 0}))+\\&(P_{\infty 0}+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(P_{\infty i}-P_{\infty 0}))((A_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(A_i-A_0))+(B_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(B_i-B_0))K)^{\mathrm{T}}+\\&(C_2+D_2K)^{\mathrm{T}}(C_2+D_2K)<0.\end{aligned} \tag{26}$$

根据引理1, 为保证系统在整个不确定集合内渐近稳定, 针对不同的不确定参数, 分别对$f_\infty(\theta)$和$f_2(\theta)$求二次导, 得

$$\frac{\partial^2 f_\infty}{\partial\theta_i^2}(\theta)=\begin{bmatrix}((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)^{\mathrm{T}}(P_{\infty i}-P_0)+(P_{\infty i}-P_0)((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K) & * \\ (\bar{G}_i-\bar{G}_0)^{\mathrm{T}}(P_{\infty i}-P_0) & 0\end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial\theta_i^2}(\theta)=((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)^{\mathrm{T}}(P_{2i}-P_{20})+(P_{2i}-P_{20})((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)\geqslant 0. \tag{28}$$

显然, 对于足够小的正标量μ,

$$\begin{bmatrix}((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)^{\mathrm{T}}(P_{\infty i}-P_0)+(P_{\infty i}-P_0)[(\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K] & * \\ (\bar{G}_i-\bar{G}_0)^{\mathrm{T}}(P_{\infty i}-P_0) & 0\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}I & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}>0, \tag{29}$$

$$((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)^{\mathrm{T}}(P_{2i}-P_{20})+(P_{2i}-P_{20})((\bar{A}_i-\bar{A}_0)+(\bar{B}_i-\bar{B}_0)K)+\mu I>0. \tag{30}$$

因此, 式(29)(30)分别等价于定理2中的式(22)和(23). 证毕.

注 3 不同于文献[18]在控制器综合过程中使用同一个Lyapunov变量P, 定理2针对不确定集合不同的顶点采用不同的Lyapunov变量$P_{\infty i}$和P_{2i}, 减小了设计过程中的保守性. 同时, 定理2将不确定参数从定理1的表达式中分离出来, 使非凸优化问题转换为凸优化问题成为可能. 但是, 需要指出的是定理2中存在Lyapunov变量和控制器增益的耦合. 使得表达式(18)~(23)中存在非线性项, 无法使用LMI的方法求解控制器. 因此, 基于文献[17]的结果. 本文借助DILMI算法解决这一问题.

文献[17]采用互补线性化的方法求解初始控制器. 该方法虽然执行较为方便, 但在多参数线性化的过程中, 往往无解. 因此, 本文给出了如下的初始控制器求解方法.

定理 3 针对闭环系统(8), 给定正标量γ和λ, 如果存在对称正定矩阵X, W和状态反馈混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$控制器增益$K=ZX^{-1}$, 满足下面的优化问题:

$$\min[\ \mathrm{tr}(W_0)]$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix} X\bar{A}_i^{\mathrm{T}}+\bar{A}_iX+Z^{\mathrm{T}}\bar{B}_i^{\mathrm{T}}+\bar{B}_iZ & * & * \\ \bar{G}_i^{\mathrm{T}} & -\gamma_iI & * \\ C_\infty X+D_\infty Z & 0 & -\gamma_iI \end{bmatrix}<0, \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} X\bar{A}_i^{\mathrm{T}}+\bar{A}_iX+Z^{\mathrm{T}}\bar{B}_i^{\mathrm{T}}+\bar{B}_iZ & \bar{G}_i \\ \bar{G}_i^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix}<0, \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_2X+D_2Z \\ XC_2^{\mathrm{T}}+Z^{\mathrm{T}}D_2 & X \end{bmatrix}>0, \tag{33}$$

$$\mathrm{tr}(W_i)<\lambda_i^2, \tag{34}$$

则所得到的控制器保证闭环系统鲁棒稳定, 并且满足定义1中的混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$约束.

证 为实现变量替换, 令定理2中的Lyapunov变量$P_{\infty i}$和P_{2i}在所有多胞形顶点处均相等, 即

$$P_{\infty i}=P_{2i}=P,\ i=0,\cdots,N,$$

则式(18)~(20)分别等价于:

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}_i+\bar{B}_iK)^{\mathrm{T}}P+P(\bar{A}_i+\bar{B}_iK) & * & * \\ \bar{G}_i^{\mathrm{T}}P & -\gamma_iI & * \\ C_\infty+D_\infty K & 0 & -\gamma_iI \end{bmatrix}<0, \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}_i+\bar{B}_iK)^{\mathrm{T}}P+P(\bar{A}_i+\bar{B}_iK) & * \\ C_2+D_2K & -I \end{bmatrix}<0, \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bar{G}_i^{\mathrm{T}}P \\ P\bar{G}_i & P \end{bmatrix}>0. \tag{37}$$

对式(35)左右同乘以对角矩阵$[P^{-1}\ \ I\ \ I]$, 得

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(\bar{A}_i+\bar{B}_iK)^{\mathrm{T}}+(\bar{A}_i+\bar{B}_iK)P^{-1} & * & * \\ \bar{G}_i^{\mathrm{T}} & -\gamma_iI & * \\ C_\infty P^{-1}+D_\infty KP^{-1} & 0 & -\gamma_iI \end{bmatrix}<0. \tag{38}$$

将$P^{-1}=X$, $Z=KX$代入上式, 即得到式(31). 根据文献[18]中的定理3.1.5, 满足以下约束的控制器能够保证系统鲁棒稳定性和H_2性能:

$$\begin{bmatrix} X\bar{A}_i^{\mathrm{T}}+\bar{A}_iX+XK^{\mathrm{T}}\bar{B}_i^{\mathrm{T}}+\bar{B}_iKX & \bar{G}_i \\ \bar{G}_i^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix}<0, \tag{39}$$

$$\mathrm{tr}((C_2+D_2K)X(C_2+D_2K)^{\mathrm{T}})<\lambda_i^2. \tag{40}$$

将$Z=KX$代入分别代入式(39)(40), 可知式(39)(32)等价, 式(33)(34)能够保证式(40)成立. 于是, 式(31)~(34)能够保证系统在多胞形的各个顶点鲁棒稳定且满足混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$性能指标. 同时, 由于$P_{\infty i}=P_{2i}=P$, 可得$P_{\infty i}-P_{\infty 0}=0$, $P_{2i}-P_{20}=0$. 所以, 式(22)(23)在任何状态下均成立. 根据引理1和定义2, 式(31)~式(34)能够保证系统在整个多胞形上鲁棒稳定. 证毕.

DILMI算法

Step 1 选择合适的H_∞范数上界γ和H_2范数上界λ, 对于对称正定矩阵X和W, 求解定理3描述的优化问题, 得到初始的混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$控制器增益$K_{\mathrm{opt}}^0=Z_{\mathrm{opt}}X_{\mathrm{opt}}^{-1}$;

Step 2 令$K=K_{\mathrm{opt}}^0$, 求解定理2描述的优化问题, 得到初始Lyapunov变量$P_{\infty i}^0$和P_{2i}^0;

Step 3 在第j步迭代($j>0$),

1) 将$P_{\infty i}=P_{\infty i}^{j-1}$, $P_{2i}=P_{2i}^{j-1}$代入式(18)~(23), 求解定理2描述的优化问题, 得到第j步的控制器增益K_{opt}^j.

2) 将$K=K_{\mathrm{opt}}^j$代入式(18)~(23), 求解定理2描述的优化问题, 得到第j步的Lyapunov变量$P_{\infty i}^j$和P_{2i}^j;

Step 4 给定一个足够小的阈值σ, 若

$$|\mathrm{tr}(Q_0^j-Q_0^{j-1})|<\sigma,$$

输出的$K_{\mathrm{opt}}=K_{\mathrm{opt}}^j$作为混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$鲁棒控制器增益, 算法结束. 否则, 令$j=j+1$, 并返回Step 3.

注 4 DILMI算法无需引入松弛变量, 通过两步优化过程分别求解Lyapunov变量和控制器增益, 实现了对

Lyapunov变量和系统参数变量的解耦. 与松弛变量法相比, DILMI算法大大降低了LMI表达式的维数, 提高了运算效率, 减小了迭代次数. 该算法可以通过MATLAB LMI工具箱[18]实现.

4 飞行跟踪控制仿真实例(A flight tracking control example)

为了验证所设计控制器的动态性能和鲁棒性, 进行了类似Herbst机动的飞行仿真实验.

考虑包含翼面损伤的线性F-16飞机模型[3]:

$$\begin{cases} x(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) + G(\theta)w(t), \\ y(t) = C(\theta)x(t), \end{cases} \tag{41}$$

其中: $x(t) = [u, w, q, v, p, r]^{\mathrm{T}}$是状态变量, $y(t) = [q, \dot{\mu}_{\mathrm{rat}}, r_{\mathrm{stab}}, \alpha, \beta]^{\mathrm{T}}$是可测输出, $u(t) = [\delta_{\mathrm{h}}, \delta_{\mathrm{a}}, \delta_{\mathrm{r}}]^{\mathrm{T}}$是控制输入, $w(t)$是垂直阵风干扰. u, v, w, p, q, r, $\dot{\mu}_{\mathrm{rat}}$, r_{stab}, α, β, δ_{h}, δ_{a}, δ_{r}分别表示X轴、Y轴、Z轴的速度、滚转角速度、俯仰角速度、偏航角速度、稳轴滚转角速度、稳轴偏航角速度、迎角、侧滑角、平尾偏转角、副翼偏转角、方向舵偏转角. 参数矩阵A_i, B_i, C_i和$G_i (i = 0, \cdots, 3)$参见附录. $i = 0$代表平尾无损伤, $i = 1$表示存在25%的平尾损伤, $i = 2$表示存在50%的平尾损伤, $i = 3$表示存在75%的平尾损伤. 选择参考信号$r(t) = (\dot{\mu}_{\mathrm{rat}}, \alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$, 因为这几个状态变量与飞机的机动性能紧密相关, 跟踪这3个变量能够实现类Herbst机动动作.

仿真开始时的初始飞行状态为水平直线飞行, 高度为500 m, 马赫数为0.2. 在仿真的第5 s时, 做类似于Herbst机动的操纵, 增大飞机迎角并保持侧滑角不变, 即给定参考输入数值为$\dot{\mu}_{\mathrm{rat}} = 20(°)/\mathrm{s}$, $\alpha = 10°$, $\beta = 0°$. 随后, 在仿真的第15 s, 将飞机拉回初始飞行状态, 即$\dot{\mu}_{\mathrm{rat}} = 0(°)/\mathrm{s}$, $\alpha = 0°$, $\beta = 0°$, 并保持该状态不变.

选择如下的选择矩阵和权值矩阵:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ C_\infty = \begin{bmatrix} 5I_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times6} \\ 0_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times6} \end{bmatrix},$$

$$D_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5\times3} \\ 2I_{3\times3} \end{bmatrix}, \ C_2 = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times6} \\ 0_{3\times6} & \mathbf{0}_{3\times6} \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} \\ 0.1 \cdot I_{3\times3} \end{bmatrix}.$$

考虑到飞机通常运行在无故障状态下(状态0), 故障状态(状态1, 2, 3)只占运行时间的极小部分. 因此, 在控制器设计过程中选取状态0下的H_2性能为优化目标. 应用上节中的DILMI算法, 得到混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$鲁棒控制器增益

$$K\_\mathrm{DILMI} =$$

$$\left[\begin{matrix} -0.0178 & -19.1398 & 0.3361 & 3.5349 & 3.5349 \\ -10.3326 & -0.0102 & 2.3981 & 0.0011 & 0.0056 \\ 3.9373 & -0.0790 & 12.2147 & 0.0276 & 0.0247 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 270.7051 & -0.0056 & 0.0921 & 0.9999 \\ 0.1244 & -0.5877 & 41.5269 & 26.5869 \\ 1.5780 & -1.6894 & -19.4391 & 102.5391 \end{matrix}\right].$$

将得到的混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$鲁棒控制器$K$_DILMI和控制器$K$_LQR, K_NLMI, K_ILMI进行比较, 以验证该方法的有效性. 其中, 控制器K_LQR根据文献[19]中的标准LQR(linear quadratic regulator)方法获得, 控制器K_NLMI根据本文中DILMI优化算法中的步骤1获得, 控制器K_ILMI根据文献[16]中迭代算法获得. 不同于本文的DILMI优化算法, K_NLMI控制器使用同一个Lyapunov函数P求解多目标优化问题, 存在较大保守性, 无法获得局部最优解. 文献[16]通过引入额外的松弛变量求解控制器,导致LMI维数增大, 迭代次数大大增加. 如下表所示, K_NLMI控制器具有较大的保守性, 在所有飞行状态下H_2性能的最优值均大于K_ILMI和K_DILMI控制器. K_ILMI和K_DILMI控制器的H_2性能最优值基本相同, 但K_DILMI控制器求解算法的迭代次数远小于K_ILMI控制器.

表 1 3种基于LMI的控制算法的H_2性能比较

Table 1 The H_2 performance comparison of three control algorithms based on LMI

控制算法	状态0	状态1	状态2	状态3	迭代次数
NLMI	1.4835	6.8180	7.1138	7.0834	/
ILMI	1.2943	5.7905	5.7911	5.8240	28
DILMI	1.2959	5.7986	5.7959	5.8224	62

为尽可能的接近真实环境, 在仿真过程中加入了40%的系统参数摄动和6 m/s的垂直阵风干扰. 图1～4中的实线, 点线和虚线分别代表控制器K_LQR, K_NLMI和K_DILMI作用下的系统跟踪响应曲线. 在图1中, 当平尾无损伤时, 在3种控制器作用下的输出都能够很好的跟踪参考信号. 但控制器K_DILMI的调节时间更短, 超调量更小. 如图2和3所示, 当平尾损伤增加到25%和50%时, 控制器K_NLMI和K_LQR的控制效果出现一定下降, 特别是调节时间较长, 而控制器K_DILMI的控制效果变化不大. 在图4中, 当平尾损伤达到75%时, 控制器K_LQR无法稳定闭环系统, 跟踪响应曲线出现震荡. 控制器K_NLMI的控制效

果发生恶化, 出现了较大的超调量和不可接受的调节时间. 但是, 控制器K_DILMI作用下的关注输出依然能够较好的跟踪参考信号, 表现出较强的鲁棒性和较好的系统动态性能.

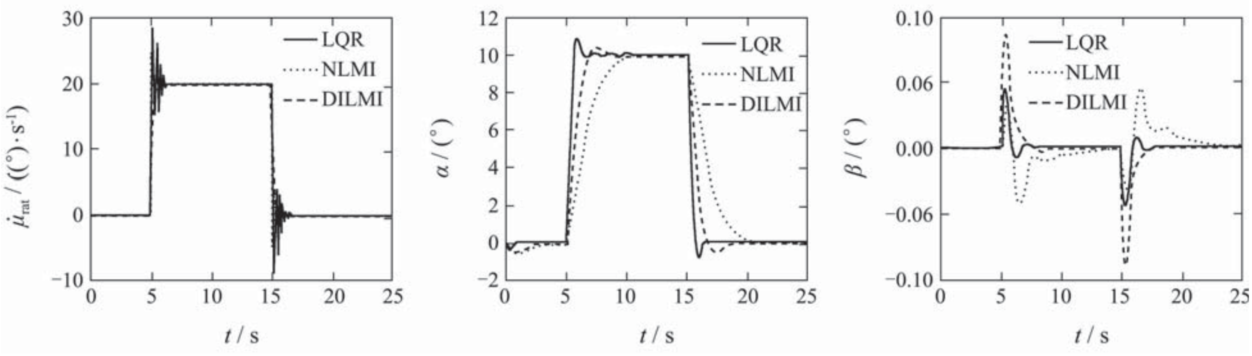

图 1 平尾无损伤时的系统跟踪响应曲线

Fig. 1 Response curves in health horizontal stabilator case

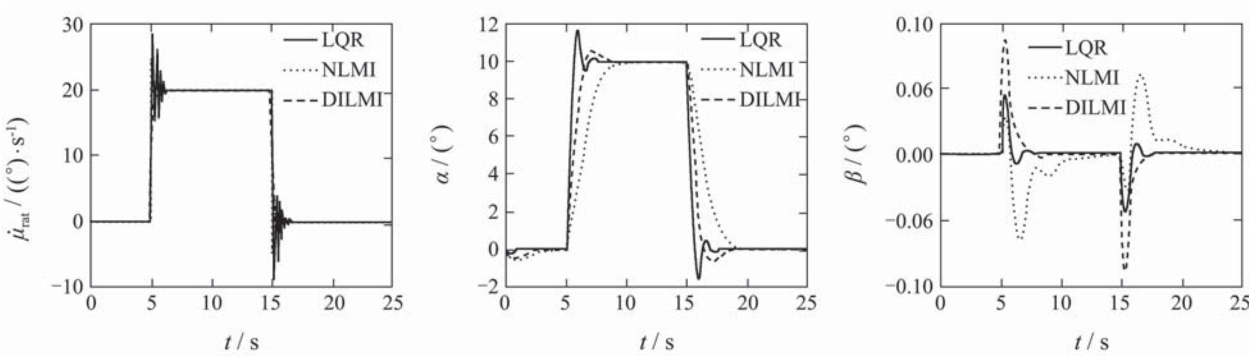

图 2 平尾损伤25%时的系统跟踪响应曲线

Fig. 2 Response curves of 25% loss of horizontal stabilator

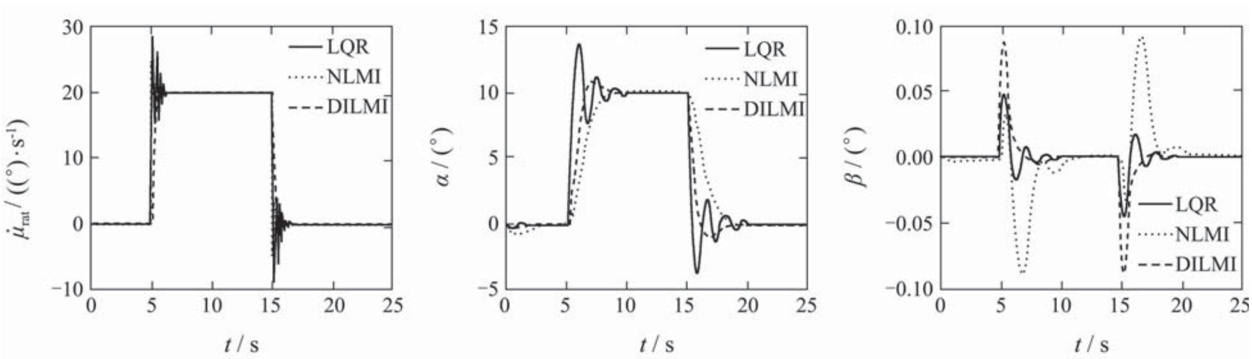

图 3 平尾损伤50%时的系统跟踪响应曲线

Fig. 3 Response curves of 50% loss of horizontal stabilator

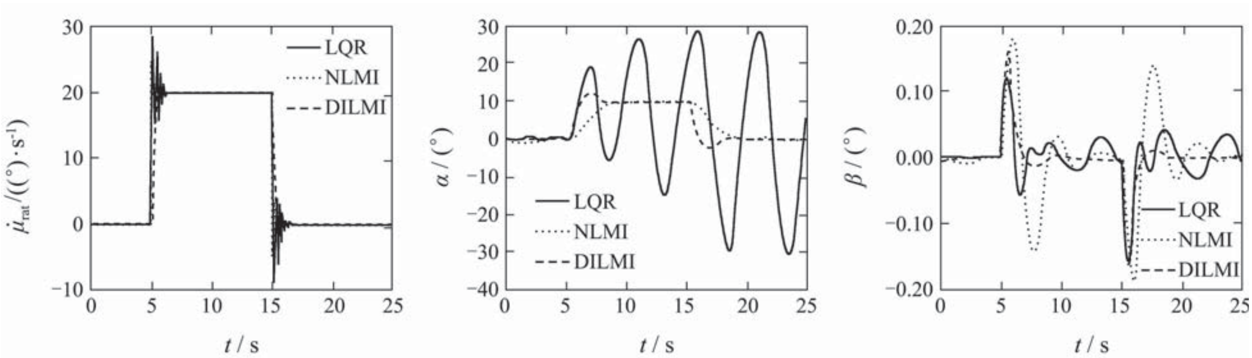

图 4 平尾损伤75%时的系统跟踪响应曲线

Fig. 4 Response curves of 75% loss of horizontal stabilator

5 结论(Conclusion)

针对一类多胞型不确定系统, 基于仿射二次稳定理论和参数依赖Lyapunov函数, 得到了混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$鲁棒控制器存在的充分条件, 并给出了求解该控制器的DILMI算法. 仿真结果表明, 与标准的LQR方法和普通的LMI方法相比, 该方法在保证系统鲁棒性的同时, 能够降低控制器设计的保守性, 提高系统的动态性能. 与引入松弛变量的LMI方法相比, 在不降低系统性能的情况下, 该方法能够提高计算效率、减少迭代次数、增强计算可达性.

参考文献(References):

[1] BOYD S, CHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[2] GAHINET P, APKARIAN P, CHILALI M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 436 – 442.

[3] LIAO F, WANG J L, YANG G H. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10(1): 76 – 89.

[4] BERNSTEIN D S, HADDAD W M. LQG control with an H_∞ performance bound: a Riccati equation approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(3): 293 – 305.

[5] ZHOU K M, GLOVER K, BODENHEIMER B, et al. Mixed $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ performance objectives I: robust performance analysis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(8): 1564 – 1574.

[6] DOYLE J, ZHOU K M, GLOVER K, et al. Mixed $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ performance objectives II: optimal control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(8): 1575 – 1587.

[7] SCHERER C W. Multiobjective $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1054 – 1062.

[8] ALIYU M D S. Robust mixed $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty[C] //*Proceedings of American Control Conference*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1999: 3367 – 3371.

[9] HALDER B, KAILATH T. LMI based design of mixed $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ controllers: the state feedback case[C] //*Proceedings of American Control Conference*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1999: 1866 – 1870.

[10] YANG C D, SUN Y P. Mixed $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ state-feedback design for microsatellite attitude control[J]. *Control Engineering Practice*, 2002, 10(9): 951 – 970.

[11] LEIBFRITZ F. An LMI-based algorithm for designing suboptimal static $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ output feedback controllers[J]. *SIAM Journal on Control Optimization*, 2001, 39(6): 1711 – 1735.

[12] 戴诗陆, 付俊, 赵军. 一类不确定系统的鲁棒可靠跟踪控制及其在飞行控制中的应用[J]. 自动化学报, 2006, 32(5): 738 – 745.
(DAI Shilu, FU Jun, ZHAO Jun. Robust reliable tracking control for a class of uncertain systems and its application to flight control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(5): 738 – 745.)

[13] ABERKANE S, PONSART J C, SAUTER D. Output-feedback $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ control of a class of networked fault tolerant control systems[J]. *Asian Journal of Control*, 2008, 10(1): 34 – 44.

[14] 陈雪芹, 耿云海, 张迎春, 等. 基于LMI的鲁棒容错控制及其在卫星姿态控制中的应用[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(1): 95 – 99.
(CHEN Xueqin, GENG Yunhai, ZHANG Yingchun, et al. LMI approach and application in satellite attitude control system[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(1): 95 – 99.)

[15] 欧阳高翔, 倪茂林, 孙承启. 视故障为结构不确定项的鲁棒可靠跟踪控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(1): 80 – 84.
(OUYANG Gaoxiang, NI Maolin, SUN Chengqi. Robust reliable tracking controller design when the fault is viewed as a structural uncertainty[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(1): 80 – 84.

[16] YE S J, ZHANG Y M, RABBATH C A, et al. An LMI approach to mixed $\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$ robust fault-tolerant control design with uncertainties[C] //*Proceedings of American Control Conference*. New York: IEEE, 2009: 5540 – 5545.

[17] HE Y, WANG Q G. An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(10): 1678 – 1683.

[18] 俞立. 鲁棒控制–线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU L. *Robust Control–LMI Approach* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[19] 周克敏, DOYLE J, GLOVER K. 鲁棒与最优控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
(ZHOU Kemin, DOYLE. J. C, GLOVER. K. *Robust and Optimal Control*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2002.)

附录(Appendix)

1) F-16飞机在无故障情况下的系统矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.0153 & 0.0481 & -5.9420 & 0.0021 & 0 & 0 \\ -0.0910 & -0.9568 & 138.3608 & 0.0163 & 0 & 0 \\ 0.0002 & 0.0046 & -1.0220 & -0.0005 & 0 & -0.0029 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2804 & 6.2667 & -151.1435 \\ 0 & 0 & 0.0003 & -0.1821 & -3.4192 & 0.6401 \\ 0 & 0 & 0.0025 & 0.0454 & -0.0304 & -0.4535 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0.0478 & 0 & 0 \\ -0.3444 & 0 & 0 \\ -0.1747 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0465 & 0.1205 \\ 0 & -0.6928 & 0.1237 \\ 0 & -0.0293 & -0.0587 \end{bmatrix},$$

$$G_0 = [0.0481 \ \ -0.9368 \ \ 0.0046 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 57.2958 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57.2468 & 2.3696 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.3696 & 57.2468 \\ -0.0155 & 0.3756 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3760 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) F-16飞机在遭受25%平尾损伤故障情况下的系统矩

阵

$$A_1=\begin{bmatrix}-0.0108 & 0.0245 & -5.9867 & 0.0020 & 0 & 0\\ -0.0927 & -0.7009 & 138.3548 & 0.0206 & 0 & 0\\ 0.0003 & 0.0006 & -1.0220 & -0.0006 & 0 & -0.0029\\ 0 & 0 & 0 & -0.2804 & 6.3143 & -151.1412\\ 0 & 0 & 0.0003 & -0.1424 & -3.4188 & 0.6489\\ 0 & 0 & 0.0025 & 0.0344 & -0.0236 & -0.4533\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}-0.0381 & 0 & 0\\ -0.3208 & 0 & 0\\ -0.1367 & 0 & 0\\ 0 & 0.0465 & 0.1205\\ 0 & -0.6928 & 0.1237\\ 0 & -0.0293 & -0.0587\end{bmatrix},$$

$$G_1=[0.0245\quad -0.7009\quad 0.0006\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 57.2958 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57.2460 & 2.3871\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.3871 & 57.2460\\ -0.0157 & 0.3756 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.3760 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

3) F-16飞机在遭受50%平尾损伤故障情况下的系统矩阵

$$A_2=\begin{bmatrix}-0.0069 & 0.0010 & -6.2046 & 0.0020 & 0 & 0\\ -0.0942 & -0.4528 & 138.3253 & 0.0256 & 0 & 0\\ 0.0005 & -0.0044 & -1.0221 & -0.0007 & 0 & -0.0029\\ 0 & 0 & 0 & -0.2802 & 6.5466 & -151.1298\\ 0 & 0 & 0.0003 & -0.1060 & -3.4157 & 0.6626\\ 0 & 0 & 0.0025 & 0.0231 & -0.0183 & -0.4531\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0.0255 & 0 & 0\\ -0.2150 & 0 & 0\\ -0.0912 & 0 & 0\\ 0 & 0.0467 & 0.1207\\ 0 & -0.6931 & 0.1236\\ 0 & -0.0293 & -0.0587\end{bmatrix},$$

$$G_2=[0.0010\quad -0.4528\quad -0.0044\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}},$$

$$C_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 57.2958 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57.2424 & 2.4720\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.4720 & 57.2424\\ -0.0162 & 0.3756 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.3760 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

4) F-16飞机在遭受75%平尾损伤故障情况下的系统矩阵

$$A_3=\begin{bmatrix}-0.0057 & 0.0208 & -8.4308 & 0.0022 & 0 & 0\\ -0.0961 & -0.1919 & 138.0127 & 0.0352 & 0 & 0\\ 0.0008 & 0.0090 & -1.0229 & -0.0011 & 0 & -0.0029\\ 0 & 0 & 0 & -0.2785 & 8.9169 & -150.9961\\ 0 & 0 & 0.0003 & -0.0839 & -3.3902 & 0.7401\\ 0 & 0 & 0.0025 & 0.0105 & -0.0260 & -0.4533\end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}0.0370 & 0 & 0\\ -0.0655 & 0 & 0\\ -0.0271 & 0 & 0\\ 0 & 0.0481 & 0.1222\\ 0 & -0.6958 & 0.1233\\ 0 & -0.0288 & -0.0587\end{bmatrix},$$

$$G_3=[0.0208\quad -0.1919\quad -0.0090\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}},$$

$$C_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 57.2958 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57.1983 & 2.3400\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.3400 & 57.1983\\ -0.0219 & 0.3753 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.3760 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

作者简介:

叶思隽　(1981—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为鲁棒控制、容错控制, E-mail: yesijun@gmail.com;

王新民　(1951—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为飞行控制、先进控制, E-mail: wxmin@nwpu.edu.cn;

张清江　(1977—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为鲁棒控制, E-mail: zhangqj@nwpu.edu.cn;

李　俨　(1973—), 男, 副教授, 主要研究方向为飞行控制、鲁棒控制、非线性系统控制, E-mail: liyan@nwpu.edu.cn.