第 28 卷第 2 期
2011 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 2
Feb. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)02−0261−05

多项式光滑的支持向量回归机

任　斌[1,2], 程良伦[1]

(1. 广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510090; 2. 东莞理工学院 电子工程学院, 广东 东莞 523808)

摘要: 光滑函数将不光滑的模型变为光滑模型, 改善支持向量回归机的回归性能和效率, 从而降低计算的复杂性. 寻找性能更好的光滑函数是研究光滑向量回归机的一个关键问题. 本文用级数展开的方法得出了ε–不敏感的支持向量回归机$|x|_\varepsilon^2$的一类新的光滑函数. 证明了这类函数的性能, 它能满足任意阶光滑的要求, 也能达到任意给定的逼近精度. 实验结果表明, 随着光滑阶数的提高, 逼近精度和回归性能也相应提高. 从而为支持向量回归机和相关研究领域提供了一类新的、性能更好的多项式光滑函数.

关键词: 支持向量回归机; ε–不敏感损失函数; 光滑; 多项式函数

中图分类号: TP311　　　**文献标识码**: A

Polynomial smoothing support vector regression

REN Bin[1,2], CHENG Liang-lun[1]

(1. Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong 510090, China;
2. Faculty of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan Guangdong 523808, China)

Abstract: Smoothing functions can transform the unsmooth support vector regressions into smooth ones, and thus better regression results can be obtained. It has been one of the key problems to seek a better smoothing function in this field for a long time. Using the series expansion, a new class of polynomial smoothing functions is proposed for the $|x|_\varepsilon^2$ function in ε-insensitive support vector regressions. Their important properties are then discussed. It is shown that the approximation accuracy and smoothness rank of polynomial functions can be as high as required. The experimental results show that as the smoothness rank of polynomial functions increases, the approximation accuracy and the regression performance are correspondingly improved. Therefore, the new class of polynomial functions provides better performance for smoothing the support vector regression.

Key words: support vector regression; ε-insensitive loss function; smoothing; polynomial function

1　引言(Introduction)

光滑函数可使原来不光滑模型变成光滑模型, 在一些重要的数学规划中得到了成功应用[1~5]. 特别是在分类问题和回归问题中获得了良好的效果[2,5~7].

将光滑函数用于回归问题, 就是要解决原回归模型中ε–不敏感损失函数平方不光滑的问题[6]. 按照解决分类问题的基本思路, 2005年Lee等人用p_ε^2–函数作为光滑函数, 对目标函数作光滑逼近, 提出了ε–不敏感的支持向量回归机模型ε–SSVR[6], 并采用了快速的Newton-Armijo算法求解. 结果表明, ε–SSVR的效果(回归性能和效率)比传统的LIBSVM[8]和SVM$^{\text{light}}$[9]算法好. 然而, 是否存在以及如何寻找性能更好的光滑函数, 则是人们期待解决的问题[1~3,5,6]. 为解决此问题, 文献[10]用插值函数, 给出了一类多项式光滑函数的一个递推公式和复合函数的方法, 提出了两步求的基本思路, 虽然理论上可行, 但实际应用时求出多项式函数的过程非常繁琐, 本文用函数的级数展开法给出此类光滑函数的通用公式, 经证明, 本文给出的光滑函数有更好的光滑性能, 可以满足任意阶光滑的要求, 而且可以达到任意给定的逼近精度, 从而为支持向量回归机提供了新的光滑函数, 实验的结果表明, 随着多项式光滑函数阶数的提高, 逼近精度和回归性能也相应提高.

2　支持向量回归机(Support vector regression)

为了便于分析, 本文也采用文献[10]的定义关于自变量x的ε–不敏感损失函数记为$|x|_\varepsilon$, $|x|_\varepsilon = \max\{0, |x| - \varepsilon\}$. ε–不敏感损失函数的平方记为$|x|_\varepsilon^2$.

数据集$S = \{(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, 令矩阵$A = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_m]$, x_i是一个n维向量, 每

收稿日期: 2009−12−17; 收修改稿日期: 2010−03−25.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60673132); 广东省自然科学基金资助项目(07117421); 省部产学研资助项目(2009B090300242).

个x_i对应有一个观测值y_i, 显然$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 即$S = \{(A_i, y_i)|A_i \in \mathbb{R}^n, y_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\cdots,m\}$. 目的是利用给定的数据集$S$, 训练出一个回归函数$f(x)$, 使$f(x)$能对新的输入$x$较准确地预测$y$. 采用的标准是$\varepsilon$–不敏感损失函数

$$|y-f(x)|_\varepsilon = \max\{0, |y-f(x)|-\varepsilon\}. \tag{1}$$

对于线性回归情形, $f(x) = w^{\mathrm{T}}x + b$, 其中: $w \in \mathbb{R}^n$是一个待定向量, b是一个待定常量. 对非线性回归的情形, 使用核技术, 可转化为线性回归来处理.

回归问题可以用下面的无约束最优化问题来表示[11]:

$$\min_{(w,b)\in\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{2}(w^{\mathrm{T}}w+b^2)+\frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m}|A_iw+b-y_i|_\varepsilon^2. \tag{2}$$

显然式(2)中$|x|_\varepsilon^2$不可导, 所以此目标函数不可导.

3 多项式光滑逼近函数及其性能(Polynomial smooth approximation function and properties)

引理 1[12] 对于$m = \dfrac{1}{2}$的二项展开式为

$$\sqrt{1+x} = \\ 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots = \\ 1+\frac{1}{2}x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(-x)^n,\ -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{3}$$

定理 1 ε–不敏感损失函数$|x|_\varepsilon$在$|x|\in[-\dfrac{1}{k}+\varepsilon, \dfrac{1}{k}+\varepsilon]$上可以展开成多项式级数, 即

$$|x|_\varepsilon = \frac{1}{2k}(\frac{1+k^2(|x|-\varepsilon)^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^n)+\frac{|x|-\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

证

$$|x|_\varepsilon = \max(0,|x|-\varepsilon) = \frac{||x|-\varepsilon|+(|x|-\varepsilon)}{2} = \\ \frac{|k(|x|-\varepsilon)|}{2k}+\frac{|x|-\varepsilon}{2} = \\ \frac{1}{2k}\sqrt{1+(k^2(|x|-\varepsilon)^2-1)}+\frac{|x|-\varepsilon}{2}.$$

由引理1知

$$|x|_\varepsilon = \frac{1}{2k}(\frac{1+k^2(|x|-\varepsilon)^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^n)+\frac{|x|-\varepsilon}{2}.$$

证毕.

定理 2 ε–不敏感损失函数$|x|_\varepsilon$的多项式逼近函数是

$$P_{n\varepsilon}(x,k) = \begin{cases} |x|-\varepsilon, & |x|\geqslant \dfrac{1}{k}+\varepsilon,\\ \dfrac{1}{2k}(\dfrac{1+k^2(|x|-\varepsilon)^2}{2}-\displaystyle\sum_{l=2}^{n}\dfrac{(2l-3)!!}{(2l)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^l)+\dfrac{|x|-\varepsilon}{2}, & -\dfrac{1}{k}+\varepsilon<|x|<\dfrac{1}{k}+\varepsilon,\\ 0, & |x|\leqslant -\dfrac{1}{k}+\varepsilon, \end{cases} \tag{5}$$

式中: n为正整数, $k>0$.

引理 2 若n次多项式函数$f(x)$在x_0处有前k阶导数都为零, 即$f^{(i)}(x_0) = 0(i = 0,1,2,\cdots,k)$. $k<n$, k,n为非负整数, 则$f(x)$有x_0的$k+1$重根.

证 设$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 则有

$$f^{(k)}(x) = 0,\ k = n+1, n+2, \cdots. \tag{6}$$

将$f(x)$展开成泰勒级数, 则

$$f(x) = \\ f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+ \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\cdots.$$

根据已知条件和式(6)可得

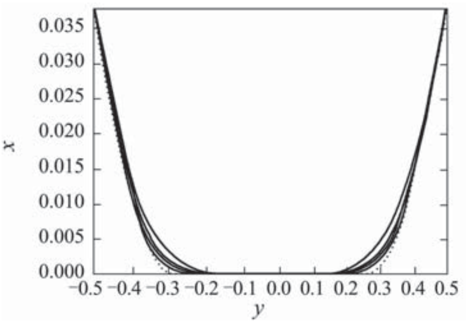
$$f(x) = \\ \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}+\frac{f^{(k+2)}(x_0)}{(k+2)!}(x-x_0)^{k+2}+ \\ \cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \\ (x-x_0)^{k+1}\cdot(\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}+\frac{f^{(k+2)}(x_0)}{(k+2)!}(x-x_0)+ \\ \cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k-1}).$$

证毕.

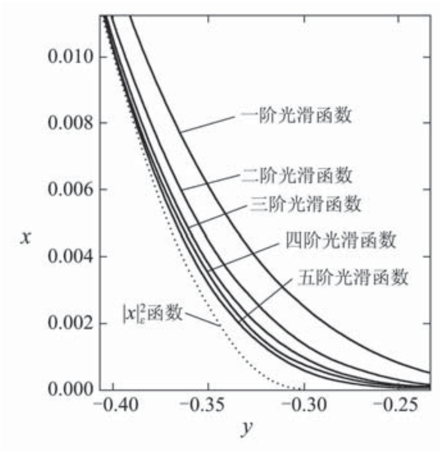
定理 3 令$P_{n\varepsilon}^2(x,k)$定义为ε–不敏感损失函数$|x|_\varepsilon$多项式逼近函数$P_{n\varepsilon}(x,k)$的平方, 则$P_{n\varepsilon}^2(x,k)$是$|x|_\varepsilon^2$的n阶逼近函数,

$$P_{n\varepsilon}^2(x,k) = \begin{cases} (|x|-\varepsilon)^2, & |x|\geqslant \dfrac{1}{k}+\varepsilon,\\ (\dfrac{1}{2k}(\dfrac{1+k^2(|x|-\varepsilon)^2}{2}-\displaystyle\sum_{l=2}^{n}\dfrac{(2l-3)!!}{(2l)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^l)+\dfrac{|x|-\varepsilon}{2})^2, & -\dfrac{1}{k}+\varepsilon<|x|<\dfrac{1}{k}+\varepsilon,\\ 0, & |x|\leqslant -\dfrac{1}{k}+\varepsilon. \end{cases} \tag{7}$$

当$k=5, \varepsilon=0.3$时, 5个光滑函数的对比图像如图1所示, $P^2_{n\varepsilon}(x,k)$随着n的增大, 对$|x|^2_\varepsilon$的逼近程度提高.



(a) $k=5, \varepsilon=0.3$时光滑函数逼近图



(b) $k=5, \varepsilon=0.3$时光滑函数逼近图

图 1 光滑函数逼近

Fig. 1 Smooth function approximation comparison chart

定理 4　$P^2_{n\varepsilon}(x,k)$函数由式(7)给出, 则:

1) $P^2_{n\varepsilon}(x,k)$关于x具有n阶光滑性, 即满足:

$$p^2_{n\varepsilon}(\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=\frac{1}{k^2},\ p^2_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,$$

$$\nabla p^2_{n\varepsilon}(\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=\frac{2}{k},\ \nabla p^2_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,$$

$$\nabla^2 p^2_{n\varepsilon}(\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=2,\ \nabla^n p^2_{n\varepsilon}(\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,$$

$$\nabla^2 p^2_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,$$

$$\nabla^n p^2_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,\ n\geqslant 3;$$

2) $p^2_{n\varepsilon}(x,k)\geqslant |x|^2_\varepsilon$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\max(p^2_{n\varepsilon}(x,k)-|x|^2_\varepsilon)=0$.

证　2)和3)容易证明, 现只证明1).

由公式(6)知:

$$p^2_{n\varepsilon}(\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=\frac{1}{k^2},\ p^2_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,$$

所以$P^2_{n\varepsilon}(x,k)$为连续函数.

对$|x|$求偏导数:

当$n\geqslant 1$时,

$$\nabla P_{n\varepsilon}(x,k)=\frac{k(|x|-\varepsilon)}{2}(1+\sum_{l=2}^{n}\frac{(2l-3)!!}{(2l-2)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^{l-1})+\frac{1}{2}, \tag{8}$$

$$\nabla P^2_{n\varepsilon}(x,k)=2P_{n\varepsilon}(x,k)\cdot\nabla P_{n\varepsilon}(x,k). \tag{9}$$

当$n\geqslant 2$时,

$$\nabla^2 P_{n\varepsilon}(x,k)=\frac{k}{2}(1+\sum_{l=2}^{n}\frac{(2l-3)!!}{(2l-2)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^{l-1})-\frac{k^3(|x|-\varepsilon)^2}{2}\sum_{l=2}^{n}\frac{(2l-3)!!}{(2l-4)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^{l-2}, \tag{10}$$

$$\nabla^2 P^2_{n\varepsilon}(x,k)=2P_{n\varepsilon}(x,k)\cdot\nabla^2 P_{n\varepsilon}(x,k)+2(\nabla P_{n\varepsilon}(x,k))^2. \tag{11}$$

当$n\geqslant 3$时,

$$\nabla^3 P_{n\varepsilon}(x,k)=\frac{k^5(|x|-\varepsilon)^3}{2}\sum_{l=2}^{n}\frac{(2l-3)!!}{(2l-6)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^{l-3}-\frac{3k^3(|x|-\varepsilon)}{2}\sum_{l=2}^{n}\frac{(2l-3)!!}{(2l-4)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^{l-2}, \tag{12}$$

$$\nabla^3 P^2_{n\varepsilon}(x,k)=2P_{n\varepsilon}(x,k)\nabla^3 P_{n\varepsilon}(x,k)+6\nabla P_{n\varepsilon}(x,k)\nabla^2 P_{n\varepsilon}(x,k). \tag{13}$$

当$n\geqslant 4$时,

$$\nabla^4 P_{n\varepsilon}(x,k)=3k^5(|x|-\varepsilon)^2\sum_{l=2}^{n}\frac{(2l-3)!!}{(2l-6)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^{l-3}-\frac{k^7(|x|-\varepsilon)^4}{2}\sum_{l=2}^{n}\frac{(2l-3)!!}{(2l-8)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^{l-4}-\frac{3k^3}{2}\sum_{l=2}^{n}\frac{(2l-3)!!}{(2l-4)!!}(1-k^2(|x|-\varepsilon)^2)^{l-2}, \tag{14}$$

$$\nabla^4 P^2_{n\varepsilon}(x,k)=2P_{n\varepsilon}(x,k)\nabla^4 P^{(}_{n\varepsilon}x,k)+8\nabla P^{(}_{n\varepsilon}x,k)\nabla^3 P_{n\varepsilon}(x,k)+6(\nabla^2 P_{n\varepsilon}(x,k))^2. \tag{15}$$

则有

$$\nabla p^2_{n\varepsilon}(\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=\frac{2}{k},\ \nabla p^2_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,$$

$$\nabla^2 p^2_{n\varepsilon}\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=2,\ \nabla^2 p^2_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,$$

$$\nabla^3 p^2_{n\varepsilon}(\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,\ \nabla^3 p^2_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,$$

$$\nabla^4 p^2_{n\varepsilon}(\pm(\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0,\ \nabla^4 p^3_{n\varepsilon}(\pm(-\frac{1}{k}+\varepsilon),k)=0.$$

所以$P^2_{n\varepsilon}(x,k)$在$n\geqslant 1$时一阶光滑, $n\geqslant 2$时二阶光滑, $n\geqslant 3$时三阶光滑, $n\geqslant 4$时四阶光滑.

用反证明法证明n阶光滑.

假设$P^2_{n\varepsilon}(x,k)$的$m+1$阶导数不连续, 则在$|x|=\pm\dfrac{1}{k}+\varepsilon$时,

$$\nabla^{(m+1)}P^2_{n\varepsilon}(x,k)\neq 0,\ \nabla^{(m)}P^2_{n\varepsilon}(x,k)=0,$$

根据引理2知, $\nabla^4 P^2_{n\varepsilon}(x,k)$分别有$x=\pm(\pm\dfrac{1}{k}+\varepsilon)$的$m-3$重根, 即$\nabla^4 P^2_{n\varepsilon}(x,k)$可以写为

$$a(x+\frac{1}{k}+\varepsilon)^{m-3}(x+\frac{1}{k}-\varepsilon)^{m-3}(x-\frac{1}{k}-\varepsilon)^{m-3}(x-\frac{1}{k}+\varepsilon)^{m-3}, \tag{16}$$

a为常数, 它的最高次幂为$4(m-3)$, 由公式(15)知$\nabla^4 P^2_{n\varepsilon}(x,k)$最高次幂为$4n-4$, 所以$4(m-3)=4n-4$, 即$n=m-2$, 因此, 前$n$阶导数都连续, $P^2_{n\varepsilon}(x,k)$具有n阶光滑性.

4 最优光滑因子及算法选取(Optimal smoothing factor and algorithm selection)

定义 1 任意给定逼近精度E, 如果光滑函数$P^2_{n\varepsilon}(x,k)$对$|x|^2_\varepsilon$的逼近满足$|P^2_{n\varepsilon}(x,k)-|x|^2_\varepsilon|\leqslant E$则称使得该式成立的光滑因子的取值为最优光滑因子, 记为$k_{\rm opt}(n,E)$.

按照定义1, 有$|P^2_{n\varepsilon}(x,k)-|x|^2_\varepsilon|\leqslant E$, 再由定理4中2)知: $P^2_{n\varepsilon}(x,k)-|x|^2_\varepsilon\leqslant E$. 因为$P^2_{n\varepsilon}(x,k)$对$|x|^2_\varepsilon$的逼近积分在$|x|=\varepsilon$时误差最大, 所以只要保证在$|x|=\varepsilon$时$P^2_{n\varepsilon}(x,k)-|x|^2_\varepsilon\leqslant E$成立即可, 将$|x|=\varepsilon$代入式(7), 并化简得到

$$k_{\rm opt}(n,E)\geqslant\frac{\dfrac{1}{2}-\sum\limits_{l=2}^{n}\dfrac{(2l-3)!!}{(2l)!!}}{2\sqrt{E}}. \tag{17}$$

算法选取:

由于$n\geqslant 2$时, $P^2_{n\varepsilon}(x,k)$具有二阶光滑性, 因此可以采用Newton-Armijo算法求解无约束最优化回归问题

$$\min_{(w,b)\in\mathbb{R}^{n+1}}\ \frac{1}{2}(w^{\rm T}w+b^2)+\frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m}p^2_{n\varepsilon}((A_iw+b-y_i),k). \tag{18}$$

5 实验(Experiment)

实验分为2个实验, 每个实验都是在AMD X4 620, 2 G内存, MATLAB7.0的环境中进行的.

实验 1 在区间$[-1,1]$均匀选择101个点作为输入数据, 观测值由$\sin c$函数产生

$$f(x)=0.5\cdot\frac{\sin(\dfrac{30}{\pi}x)}{\dfrac{30}{\pi}x}+\rho, \tag{19}$$

其中ρ是附加的高斯白噪声, 均值为0, 方差$\sigma=0.04$. 这是一个高度非线性回归问题. 设$\varepsilon=0.02$, $\mu=33$, $C=6$. 回归函数如图2, 数值结果见表1, 实验结果显示: 此多项式回归机具有良好的可靠性, 与ε-SSVR相比, 此模型的相对误差较小, 花CPU时间较短, 而且随着多项式回归机的光滑阶数的增大, 相对误差和CPU时间都越来越好.

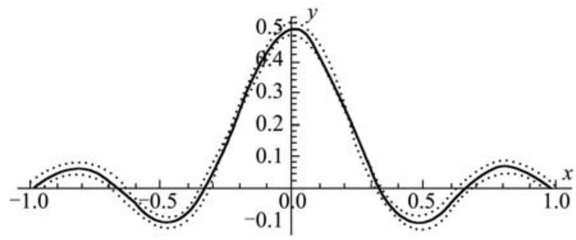


图 2 由光滑支持向量回归机产生的回归函数

Fig. 2 Regression function produced by smooth support vector regression

表 1 用$\sin c$函数的数值结果比较

Table 1 Numerical result for sin function

	ε-SSVR	ε-PSSVR			
		$(n=2)$	$(n=3)$	$(n=4)$	$(n=5)$
支持向量数	69	69	69	69	69
训练误差/%	0.0598	0.0576	0.0574	0.057	0.0567
测试误差/%	0.0598	0.0576	0.0574	0.0571	0.0569
CPU时间/s	0.032	0.026	0.024	0.023	0.022

实验 2 为了进一步检验此类光滑函数用于支持向量回归机的性能, 本文用UCI数据库的4个数据集做实验[13], UCI数据库是加州大学欧文分校提出的用于机器学习的数据库, 这个数据库目前共有187个数据集, 其数目还在不断增加, UCI数据集是一个常用的标准测试数据集.

实验结果见表2. 表中的每栏数据从上至下依次为10折训练误差, 10折测试误差, CPU时间.

结果显示, 随着多项式回归机的光滑阶数的增大, 预测的相对误差越来越小, CPU时间越来越短,

支持向量个数越来越少, 都优于ε-SSVR.

表 2 用10折交叉验证的数值结果比较
Table 2 Result comparison of 10-fold cross validation

	ε-SSVR	ε-PSSVR			
		$(n=2)$	$(n=3)$	$(n=4)$	$(n=5)$
	16.88	15.57	15.47	15.45	15.43
Heart	17.98	16.76	16.74	16.71	16.69
	0.296	0.278	0. 270	0.268	0266
	10.90	9.87	9.78	9.76	9.76
Breast	11.25	10.76	10.69	10.58	10.57
	0.302	0.260	0.249	0.246	0.245
	12.89	12.36	12.27	12.23	12.20
Kin-fh	12.96	12.46	12.40	12.36	12.35
	0.232	0.206	0. 202	0. 201	0.200
	18.98	17.63	17.61	17.59	17.57
Housing	19.86	18.76	18.74	18.71	18.69
	0.085	0.080	0.078	0.077	0.076

6 结论(Conclusion)

本文用函数的级数展开法成功地得到一类逼近ε–不敏感损失函数的平方的多项式光滑函数, 并给出了这类函数的通用公式, 证明了这类光滑函数有更好的光滑性能, 可以满足任意阶光滑的要求, 而且可以达到任意给定的逼近精度. 实验的结果表明, 随着多项式光滑函数除数的提高, 逼近精度和回归性能也相应提高, 都优于ε-SSVR. 从而为支持向量回归机和相关研究领域提供了一类新的、性能更好的多项式光滑函数.

参考文献(References):

[1] CHEN C, MANGASARIAN O L. A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems[J]. *Computational Optimization and Application*, 1996, 5(2): 97 – 138.

[2] 袁玉波, 严杰, 徐成贤. 多项式光滑的支撑向量机[J]. 计算机学报, 2005, 28(1): 9 – 17 .
(YUAN Yubo, YAN Jie, XU Chengxian. Polynomial smooth support vector (PSSVM)[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2005, 28(1): 9 – 17.)

[3] CHEN C, MANGASARIAN O L. Smoothing methods for convex inequalities and linear complementarity problems[J]. *Mathematical Programming*, 1995, 71(5): 51 – 69.

[4] MANGASARIAN O L, MUSICANT D R. Successive overrelaxation for support vector machines[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1999, 10(8): 1032 – 1037.

[5] LEE Y J, MANGASARIAN O L. SSVM: a smooth support vector machine for classification[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2001, 22(1): 5 – 21.

[6] LEE Y J, HSIEH W F, HUANG C M. SSVR: a smooth support vector machine for -insensitive regression[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2005, 17(5): 5 – 22.

[7] 胡根生, 邓飞其. 具有多分段损失函数的多输出支持向量机回归[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 711 – 714.
(HU Gensheng, DENG Feiqi. Multi-output support vector regression with piecewise loss function[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 711 – 714.)

[8] CHANG C C, LIN C J. LIBSVM: a library for support vector machines[EB/OL]2001. http://www.csie.ntu.edu.tw/∼cjlin/libsvm.

[9] PLATT J. Sequential minimal optimization: a fast algorithm for training support vector machines[C] //*Advances in Kernel Methods-Support Vector Learning*. Cambridge, MA: MIT Press, 1999. 185 – 208.

[10] 熊金志, 胡金莲, 袁华强, 等. 支持向量回归机的光滑函数及模型研究[J]. 模式识别与人工智能, 2008, 21(3): 273 – 279.
(XIONG Jinzhi, HU Jinlian, YUAN Huaqiang, et al. Smoothing functions for support vector regressions[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2008, 21(3): 273 – 279.)

[11] 邓乃扬, 田英杰. 数据挖掘的新方法——支持向量机[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(Deng Naiyang, Tian Yingjie. *New method in Data Mining: Support Vector Machine*[M]. Beijing: Science Press, 2004.)

[12] 同济大学编著. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.
(Tongji University. *Higher Mathematics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1996)

[13] University of California. The UC Irvine Machine Learning Repository[EB/OL]. 2010. http://archive.ics.uci.edu/ml/.

作者简介:

任　斌　(1975—), 男, 副教授, 博士研究生, 主要研究方向为自动化装备与系统、机器视觉、模式识别, E-mail: reb100@163.com;

程良伦　(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为自动化装备与系统、复杂系统建模与优化控制、智能与网络化系统控制, 通讯作者, E-mail: llcheng@gdut.edu.cn, 通讯作者.