

分数阶参数不确定系统的 PI^λ 控制器

梁涛年, 陈建军

(西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 利用求解分数阶参数不确定系统稳定域的方法, 设计了使分数阶参数不确定系统具有鲁棒性的分数阶 PI^λ 控制器. 首先采用Kharitonov理论, 将分数阶参数不确定系统分解成若干个参数确定的子系统, 然后用D分解方法分别求出在 PI^λ 控制器的控制下, 使各个子系统都取得较大稳定域的参数 λ 值. 再采用此 λ 值构建 PI^λ 控制器并计算各个子系统的稳定域. 各个子系统稳定域的交集即为参数不确定系统在 PI^λ 控制器控制下的稳定域. 同时证明了所构建的 PI^λ 控制器能稳定整个参数不确定系统组. 最后在稳定域内取控制器参数值, 便构成了所设计的 PI^λ 控制器. 文中采用实例对此设计方法进行验证, 并用所构建的 PI^λ 控制器对参数不确定系统组的各个子系统进行阶跃响应分析, 结果表明 PI^λ 控制器对参数不确定系统具有较强的鲁棒性.

关键词: 参数不确定系统; 稳定域; D分解法; PI^λ 控制器; Kharitonov理论

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Design of fractional order PI^λ controller for fractional order systems with uncertain parameters

LIANG Tao-nian, CHEN Jian-jun

(School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China)

Abstract: The paper presents a method for designing the robust fractional order PI^λ controller by computing the stability region of the fractional order system with uncertain parameter. Firstly, the Kharitonov theorem is adopted to decompose the original fractional order system with uncertain parameters into several subsystems with parameter certainties. Secondly, the D-decomposition technique is applied to compute the stability region of each subsystem to determine the parameter λ value which uniformly ensure a bigger stability region for all subsystem. Thirdly, with the parameter λ value, we design a fractional order PI^λ controller for each subsystem and computer its stability region. The intersection of the obtained stability regions is considered the stability region of the original system under the control of the designed PI^λ controller. This paper proves that the designed PI^λ controller stabilizes the original fractional order system with uncertain parameters. Finally, the fractional order PI^λ controller is constructed based on the control parameters in the stability region. The proposed method is illustrated by an example. The step response of each subsystem is analyzed when using this PI^λ controller. The result shows that fractional order PI^λ controller has stronger robustness for the fractional order system with uncertain parameters.

Key words: parameter uncertain system; stability region; D-decomposition technique; PI^λ controller; Kharitonov theorem

1 引言(Introduction)

PID控制器由于结构简单、鲁棒性强以及参数易于整定, 已成为工业控制领域中十分流行的控制器. 近年来, 越来越多的研究关注于控制对象或控制器是分数阶的情况, 这源于许多控制系统或真实的物理对象更适合于用任意阶的微分方程或积分方程表示^[1]. 为了提高PID控制系统的鲁棒性和系统响应性能, Dorcak^[2]提出了 PD^μ 控制器, Oustaloup^[3]提出了CRONE控制器, Podlubny^[4,5]提出了广义分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器, 包括任意积分阶次 λ 和任意微分阶次 μ . 分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器是传统整数阶PID控制器

的拓展, 而整数阶PID控制器可视为分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的特例.

目前, 对分数阶控制系统的研究主要集中于分数阶 PI^λ 或 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的设计、参数整定及稳定域的分析. 文献[6]采用对称优化的方法设计了位置控制系统的 PI^λ 控制器. 文献[7~9]根据控制系统的相角裕度和幅值裕度等条件, 采用不同的优化方法分别设计了鲁棒 PI^λ 或 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器. 文献[10]首先以敏感度函数最大值的方法得到任意阶次下分数阶控制器的增益参数, 然后再采用ISE方法选择合适的分数阶 PI^λ 控制器. 然而, 对系统稳定域的分析, 大多

数的研究都集中于对整数阶PID控制系统的稳定域的分析. 文献[11~13]采用稳定性边界轨迹曲线对传统的整数阶PI或PID控制器的稳定域在 (k_p, k_i) 平面内进行了分析. 文献[14]对分数阶系统采用一阶控制器, 对其稳定域进行了分析. 文献[15,16]对分数阶控制对象采用分数阶PI^λ或PI^λD^μ控制器, 对其稳定域在 (k_p, k_i) 平面内进行了分析. 然而, 在现实的世界中, 大多数的实际控制对象是不精确的, 这意味着控制对象存在着一定的不确定性. 因此, 在设计稳定性和鲁棒性的控制器时, 考虑系统的不确定性是必要的. 文献[17]采用Kharitonov理论将参数不确定系统分解, 并设计使其稳定的整数阶P, PI和PID控制器. 文献[18]根据Kharitonov理论分解区间参数不确定系统, 并利用稳定域分析的方法设计了整数阶PID控制器. 文献[19]对控制对象的参数和阶次具有区间性的分数阶系统, 首先采用Kharitonov理论分解成若干子系统, 然后再采用极点配置的方法分析了系统的稳定性, 并提出了Kharitonov理论在分数阶控制系统中的应用. 文献[20]以状态空间的形式对具有区间参数不确定性的分数阶线性时不变系统的稳定性进行了分析, 并给出了相应的稳定性测试过程. 文献[21]对分数阶区间参数线性系统建立了稳定性的必要和充分条件. 从上述文献中可见, 对参数不确定系统的稳定域问题的分析, 目前主要集中于整数阶PID控制器, 而尚未发现对于参数具有区间不确定和阶次具有参数不确定的分数阶系统, 采用PI^λ控制器对其稳定域进行分析, 并设计其控制器.

本文对具有参数区间不确定和阶次具有不确定的分数阶系统, 首先采用Kharitonov方法^[19,22], 将参数不确定系统转化为若干个参数确定的子系统, 然后根据D分解方法分别求取在PI^λ控制器控制下各个子系统的稳定域, 再在各个子系统寻找使各个子系统都获得较大稳定域的参数λ值, 然后以获得的λ值作为PI^λ控制器的参数, 并以此参数构建PI^λ控制器, 用所构建的PI^λ控制器计算各个子系统的稳定域, 各个子系统稳定域的交集, 便是分数阶参数不确定系统的稳定域. 因此, 可求出使分数阶参数不确定系统稳定的PI^λ控制器各个参数的范围. 最后, 文中给出实例, 通过构建其稳定域, 获得了PI^λ控制器各个参数的取值范围, 由此设计了PI^λ控制器, 并对参数不确定分数阶控制系统进行阶跃响应分析.

2 参数不确定系统及分数阶PI^λ控制器

(Parameter uncertain system and fractional order PI^λ controller)

2.1 参数不确定分数阶系统(Parameter uncertain fractional order system)

一般情况下, 工业控制过程中大多数系统的模

型都含有不确定因素. 对参数不确定分数阶系统, 除了其参数具有不确定性外, 控制对象的阶次也可能是区间值, 即系统的阶次在分数阶建模或数值拟合时, 其阶次也可能存在一定的不确定性. 其控制框图如图1所示. 其中: $r(t)$ 为系统输入, $e(t)$ 为误差信号, $u(t)$ 为控制信号, $y(t)$ 为系统输出, $C(s)$ 为分数阶PI^λ控制器的传递函数, $G(s)$ 为分数阶参数不确定系统.

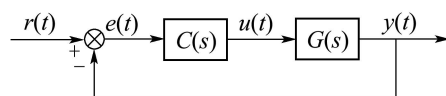


图1 分数阶闭环控制系统

Fig. 1 Fractional order close loop control system

分数阶参数不确定系统数学模型是具有任意实数阶的传递函数(即传递函数的阶次可以是整数阶也可以是分数阶), 且传递函数的参数和阶次可以是不确定性参数或确定性参数. 由此, 分数阶参数不确定系统的传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \cdots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} = \sum_{r=0}^m b_r s^{\beta_r} / \sum_{h=0}^n a_h s^{\alpha_h}, \quad (1)$$

其中: $b_r \in [\underline{b}_r, \bar{b}_r]$, $\beta_r \in [\underline{\beta}_r, \bar{\beta}_r]$, $a_h \in [\underline{a}_h, \bar{a}_h]$, $\alpha_h \in [\underline{\alpha}_h, \bar{\alpha}_h]$. 同时 $a_h, b_r, \beta_m > \cdots > \beta_1 > \beta_0$ 且 $\alpha_n > \cdots > \alpha_1 > \alpha_0$ 都是任意实数.

2.2 分数阶PI^λ控制器(Fractional order PI^λ controller)

分数阶PI^λ控制器的传递函数具有如下的形式:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda}, \quad 0 < \lambda < 2. \quad (2)$$

它具有3个可调的参数(k_p, k_i, λ), 比传统的PI控制器 $\lambda = 1$ 多了一个可调参数. H_∞ 控制器是典型的高阶控制器, 对其控制系数的变化比较敏感, 而分数阶PI^λ控制器是一个低阶的控制器, 它对于自身参数的变化不敏感, 对被控对象参数的变化具有较强的鲁棒性.

3 分数阶参数不确定系统PI^λ控制器设计 (Design PI^λ controller for fractional order parameter uncertain system)

对图1所示的单位负反馈控制系统, 本文的目的是求出分数阶参数不确定系统组 $G(s)$ 在分数阶PI^λ控制器的控制下的稳定域, 以设计其控制器. 分数阶控制系统的输出可表达为

$$y(t) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} r(t). \quad (3)$$

上式中的分母被称为分数阶参数不确定闭环控制系统的特征方程式组. 将式(1)(2)代入式(3), 则特征方程式组可表示为如下形式:

$$P(s; k_p, k_I, \lambda) = s^\lambda D(s) + (k_p s^\lambda + k_I)N(s). \quad (4)$$

根据Kharitonov理论^[22]和文献[19]中对分数阶参数不确定系统分解为若干个子系统的方法. 为此, 式(1)的分子 $N(s)$ 和分母 $D(s)$ 可用Kharitonov多项式表示为 $N^i(s)$ 和 $D^f(s)$, $i, f = 1, 2, 3, 4$, 即

$$\begin{cases} N^1(s) = \underline{b}_0 s^{\bar{\beta}_0} + \underline{b}_1 s^{\bar{\beta}_1} + \bar{b}_2 s^{\bar{\beta}_2} + \bar{b}_3 s^{\bar{\beta}_3} + \dots, \\ N^2(s) = \underline{b}_0 s^{\bar{\beta}_0} + \bar{b}_1 s^{\bar{\beta}_1} + \underline{b}_2 s^{\bar{\beta}_2} + \underline{b}_3 s^{\bar{\beta}_3} + \dots, \\ N^3(s) = \bar{b}_0 s^{\bar{\beta}_0} + \underline{b}_1 s^{\bar{\beta}_1} + \underline{b}_2 s^{\bar{\beta}_2} + \bar{b}_3 s^{\bar{\beta}_3} + \dots, \\ N^4(s) = \bar{b}_0 s^{\bar{\beta}_0} + \bar{b}_1 s^{\bar{\beta}_1} + \underline{b}_2 s^{\bar{\beta}_2} + \underline{b}_3 s^{\bar{\beta}_3} + \dots \end{cases} \quad (5a)$$

和

$$\begin{cases} D^1(s) = \underline{a}_0 s^{\bar{\alpha}_0} + \underline{a}_1 s^{\bar{\alpha}_1} + \bar{a}_2 s^{\bar{\alpha}_2} + \bar{a}_3 s^{\bar{\alpha}_3} + \dots, \\ D^2(s) = \underline{a}_0 s^{\bar{\alpha}_0} + \bar{a}_1 s^{\bar{\alpha}_1} + \underline{a}_2 s^{\bar{\alpha}_2} + \underline{a}_3 s^{\bar{\alpha}_3} + \dots, \\ D^3(s) = \bar{a}_0 s^{\bar{\alpha}_0} + \underline{a}_1 s^{\bar{\alpha}_1} + \underline{a}_2 s^{\bar{\alpha}_2} + \bar{a}_3 s^{\bar{\alpha}_3} + \dots, \\ D^4(s) = \bar{a}_0 s^{\bar{\alpha}_0} + \bar{a}_1 s^{\bar{\alpha}_1} + \underline{a}_2 s^{\bar{\alpha}_2} + \underline{a}_3 s^{\bar{\alpha}_3} + \dots \end{cases} \quad (5b)$$

对式(1)所描述的分数阶参数不确定系统组, 令

$$G(s) = \{G_{if}(s) | G_{if}(s) = \frac{N^i(s)}{D^f(s)}, i, f = 1, 2, 3, 4\}. \quad (6)$$

因此, 由Kharitonov理论分解的任意分数阶子系统 $G_{if}(s)$ 的特征方程可表示为如下通用形式:

$$P_{if}(s; k_p, k_I, \lambda) = s^\lambda D^f(s) + (k_p s^\lambda + k_I)N^i(s) = \sum_{h=0}^n [\hat{a}_h s^{\hat{\alpha}_h + \lambda}] + \sum_{r=0}^m [\hat{b}_r s^{\hat{\beta}_r} \times (k_p s^\lambda + k_I)], \quad (7)$$

其中 $\hat{a}_h, \hat{b}_r$ 以及 $\hat{\alpha}_h$ 和 $\hat{\beta}_r$ 分别表示任意参数确定子系统 $G_{if}(s)$ 的参数.

定理1 若 $G(s)$ 是一个分数阶参数不确定系统组. 如果整个分数阶参数不确定系统组 $G(s)$ 被一个特殊的分数阶PI $^\lambda$ 控制器稳定, 那么当且仅当这个组中每一个子系统 $G_{if}(s) \in G(s)$ 能被这个特殊的分数阶PI $^\lambda$ 控制器所稳定.

证 由式(4)可知, 整个分数阶参数不确定控制系统的特征方程可表述为

$$\begin{aligned} P_{if}(s; k_p, k_I, \lambda) = \\ s^\lambda D^f(s) + (k_p s^\lambda + k_I)N^i(s) = \\ F_1(s)D(s) + F_2(s)N(s), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $F_1(s) = s^\lambda$ 和 $F_2(s) = k_p s^\lambda + k_I$.

根据广义Kharitonov理论^[23], 如果多项式 $F(s) =$

$(F_1(s), F_2(s))$ 能使 $K(s) = (N(s), D(s))$ 多项式组中的每一个多项式 $K_{if}(s) = (N^i(s), D^f(s))$ Hurwitz稳定, 则 $F(s)$ 能使 $K(s)$ 多项式组Hurwitz稳定, 即

$$P(s) = \langle F(s), K(s) \rangle = F_1(s)D(s) + F_2(s)N(s)$$

是Hurwitz稳定的. 此相当于, 如果整个分数阶参数不确定系统的特征方程式组 $P(s; k_p, k_I, \lambda)$ 是稳定的, 则需每一个子特征方程式 $P_{if}(s; k_p, k_I, \lambda)$, $i, f = 1, 2, 3, 4$ 为Hurwitzw稳定. 因此, 当且仅当 $G(s)$ 中的每一个参数确定的分数阶子系统 $G_{if}(s)$ 被同一个分数阶PI $^\lambda$ 控制器稳定时, 则分数阶参数不确定系统组 $G(s)$ 能被这个分数阶PI $^\lambda$ 控制器稳定. 采用文献[15, 16]中的方法, 先找到使 $G(s)$ 中每一个子系统 $G_{if}(s)$ 都取得较大稳定域的参数 λ 值, 然后以这个参数构建分数阶PI $^\lambda$ 控制器, 用此控制器求取各个子系统的稳定域, 而各个子系统稳定域的交集为参数不确定系统的稳定域, 即为分数阶PI $^\lambda$ 控制器的参数域. 在此参数域内取分数阶PI $^\lambda$ 控制器的参数所构建的控制器, 则能使整个分数阶参数不确定系统组 $G(s)$ 稳定. 证毕.

对于具有参数 λ, k_p 和 k_I 的分数阶PI $^\lambda$ 控制器, 若使 $G(s)$ 组中的每一个子系统的特征方程 $P_{if}(s; k_p, k_I, \lambda)$ 的根都在复平面的左侧, 则闭环系统是BIBO (bound-input bound-output)稳定的. 由于引入了积分阶次, 而使得寻找分数阶PI $^\lambda$ 控制器的参数以测试闭环系统的稳定性是繁琐的. 为了避免繁重的稳定性测试工作, 需建立特征方程 $P_{if}(s; k_p, k_I, \lambda)$ 参数空间的稳定域 $S_f(C(s)G_{if}(s))$. 稳定域 $S_f(C(s)G_{if}(s)) \in \Psi$ 是分数阶PI $^\lambda$ 控制器参数空间的一个区域, 即参数空间 Ψ 可表为

$$\Psi = \{(k_p, k_I, \lambda) : k_p \in [0, \infty), k_I \in [0, \infty), \lambda \in [0, 2)\}. \quad (9)$$

每一组参数 $(k_p, k_I, \lambda) \in S_f(C(s)G_{if}(s))$, 使得特征方程 $P_{if}(k_p, k_I, \lambda)$ 等于零的根都有负实部. 因此, 任意子系统稳定域 $S_f(C(s)G_{if}(s))$ 的确定对设计分数阶PI $^\lambda$ 控制器是一项重要的工作, 是构建参数不确定系统稳定域的基础.

本文采用D分解方法^[24, 25]对 $G(s)$ 中的任意子系统构建其稳定域 $S_f(C(s)G_{if}(s))$. 由于控制器参数 k_p, k_I, λ 所构成的参数空间 $\Psi \in \mathbb{R}^3$ 可通过D分解法被分割成不同的稳定性区域 $D(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, 而 $D(k)$ 包含所有使各个子系统的特征方程式(7)稳定的点. 因此, D分解的边界集被定义如下:

$$\partial D \equiv \partial D_0 \cup \partial D_\infty \cup \partial D_{j\omega}, \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} \partial D_0 \equiv \{(k_p, k_I, \lambda) \in \Psi : P_{if}(0; k_p, k_I, \lambda) = \\ k_I = 0\}, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\partial D_{j\omega} \equiv \{(k_p, k_I, \lambda) \in \Psi : P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda) = 0, \forall \omega \in (0, \infty)\}, \quad (11b)$$

$$\partial D_\infty \equiv \{(k_p, k_I, \lambda) \in \Psi : P_{if}(\infty; k_p, k_I, \lambda) = 0\}. \quad (11c)$$

上式中: ∂D_0 , ∂D_∞ 和 $\partial D_{j\omega}$ 分别是实根边界(RRB) $D(0)$ 、无限根边界(IRB) $D(\infty)$ 以及复根边界(CRB) $D(\omega)$, 它们是一系列 D 分解边界的子集, 如 $\partial D(0) \in \partial D$.

稳定域 $S_f(C(s)G(s))$ 包含所有使 $G(s)$ 稳定的分数阶PI $^\lambda$ 控制器的参数值, 使式(1)稳定的所有分数阶PI $^\lambda$ 控制器的参数域如下:

$$S_f(C(s)G(s)) = S_f(C(s)G_{11}(s)) \cap S_f(C(s)G_{12}(s)) \cdots S_f(C(s)G_{if}(s)), \quad i, f = 1, 2, 3, 4. \quad (12)$$

将稳定域 $S_f(C(s)G_{if}(s))$ 的稳定性边界理论应用在特征方程式(7), 并通过式(11a)得实根边界(RRB), 它被描述为一条直线, 其方程式为

$$P_{if}(0; k_p, k_I, \lambda) = \hat{b}_0 k_I = 0 \Leftrightarrow k_I = 0. \quad (13)$$

在上式中, 对于每一个子系统 $G_{if}(s)$ 所表示的传递函数中, $s^{\beta_0} = 1$. 实根边界(RRB)的获得是通过把 $s^{\beta_0} = 1$ 和 $s = 0$ 代入式(7), 并使式(7)等于零所得到. 其中 $\hat{b}_0$ 为任意子系统的零次幂项的系数.

通常情况下, 复根边界(CRB)的构建是通过把 $s = j\omega$ 代入特征方程式(7)中获得. 对于 $(k_p, k_I, \lambda) \in \partial D_{j\omega}$, 存在 $\omega \in \infty$, 因此通过 $P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda) = 0$ 得到如下关系式:

$$\begin{aligned} P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda) = & \sum_{h=0}^n [\hat{a}_h (j\omega)^{\hat{\alpha}_h + \lambda}] + \\ & \sum_{r=0}^m [(k_p \hat{b}_r (j\omega)^{\hat{\beta}_r + \lambda} + k_I \hat{b}_r (j\omega)^{\hat{\beta}_r})] = \\ & \Re(P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda)) + \\ & j\Im(P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda)) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\Re(P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda))$ 和 $\Im(P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda))$ 分别代表特征方程式的实部与虚部.

对于复数 $(\sigma + j\rho)^\delta$ 的非整数阶次幂的计算, 可利用下式:

$$\begin{aligned} (\sigma + j\rho)^\delta = & \sqrt[\delta]{\sigma^2 + \rho^2} [\cos(\delta \tan^{-1}(\frac{\rho}{\sigma})) + \\ & j \sin(\delta \tan^{-1}(\frac{\rho}{\sigma}))], \end{aligned} \quad (15)$$

式中: σ 为实部, ρ 为虚部, 而 δ 为复数的非整数阶次幂. 对式(14)中的 j^δ 项, 通过式(15)可表示为

$$j^\delta = \cos(\frac{\pi}{2}\delta) + j \sin(\frac{\pi}{2}\delta). \quad (16)$$

因此, 特征方程式 $P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda) = 0$ 可表示如下:

$$\begin{aligned} P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda) = & \sum_{h=0}^n [\hat{a}_h \omega^{(\hat{\alpha}_h + \lambda)} (\cos(\frac{\pi}{2}(\hat{\alpha}_h + \lambda)) + \\ & j \sin(\frac{\pi}{2}(\hat{\alpha}_h + \lambda)))] + \\ & \sum_{r=0}^m [k_p \hat{b}_r \omega^{(\hat{\beta}_r + \lambda)} (\cos(\frac{\pi}{2}(\hat{\beta}_r + \lambda)) + \\ & j \sin(\frac{\pi}{2}(\hat{\beta}_r + \lambda)))] + \\ & \sum_{r=0}^m [k_I \hat{b}_r \omega^{\hat{\beta}_r} (\cos(\frac{\pi}{2}\hat{\beta}_r) + j \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\beta}_r))] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

使分数阶控制系统的特征方程式(17)的实部与虚部分别等于零, 则得到

$$\begin{aligned} \Re(P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda)) = & \sum_{h=0}^n [\hat{a}_h \omega^{(\hat{\alpha}_h + \lambda)} \cos(\frac{\pi}{2}(\hat{\alpha}_h + \lambda))] + \\ & \sum_{r=0}^m [k_p \hat{b}_r \omega^{(\hat{\beta}_r + \lambda)} \cos(\frac{\pi}{2}(\hat{\beta}_r + \lambda)) + \\ & k_I \hat{b}_r \omega^{\hat{\beta}_r} \cos(\frac{\pi}{2}\hat{\beta}_r)] = 0, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \Im(P_{if}(j\omega; k_p, k_I, \lambda)) = & \sum_{h=0}^n [\hat{a}_h \omega^{(\hat{\alpha}_h + \lambda)} \sin(\frac{\pi}{2}(\hat{\alpha}_h + \lambda))] + \\ & \sum_{r=0}^m [k_p \hat{b}_r \omega^{(\hat{\beta}_r + \lambda)} \sin(\frac{\pi}{2}(\hat{\beta}_r + \lambda)) + \\ & k_I \hat{b}_r \omega^{\hat{\beta}_r} \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\beta}_r)] = 0. \end{aligned} \quad (18b)$$

解方程式(18a)和(18b), 可得到分数阶PI $^\lambda$ 控制器的参数为

$$k_p = \frac{1}{\omega^\lambda \sin(\frac{\pi}{2}\lambda)} \frac{A_1(\omega)B_3(\omega) - B_1(\omega)A_3(\omega)}{A_3^2(\omega) + B_3^2(\omega)}, \quad (19)$$

$$k_I = \frac{1}{\omega^\lambda \sin(\frac{\pi}{2}\lambda)} \frac{A_1(\omega)B_2(\omega) - B_1(\omega)A_2(\omega)}{A_3^2(\omega) + B_3^2(\omega)}. \quad (20)$$

其中:

$$A_1(\omega) = \sum_{h=0}^n [\hat{a}_h \omega^{(\hat{\alpha}_h + \lambda)} \cos(\frac{\pi}{2}(\hat{\alpha}_h + \lambda))], \quad (21a)$$

$$A_2(\omega) = \sum_{r=0}^m [\hat{b}_r \omega^{(\hat{\beta}_r + \lambda)} \cos(\frac{\pi}{2}(\hat{\beta}_r + \lambda))], \quad (21b)$$

$$A_3(\omega) = \sum_{r=0}^m [\hat{b}_r \omega^{\hat{\beta}_r} \cos(\frac{\pi}{2}\hat{\beta}_r)], \quad (21c)$$

$$B_1(\omega) = \sum_{h=0}^n [\hat{a}_h \omega^{(\hat{\alpha}_h + \lambda)} \sin(\frac{\pi}{2}(\hat{\alpha}_h + \lambda))], \quad (21d)$$

$$B_2(\omega) = \sum_{r=0}^m [\hat{b}_r \omega^{(\hat{\beta}_r + \lambda)} \sin(\frac{\pi}{2}(\hat{\beta}_r + \lambda))], \quad (21e)$$

$$B_3(\omega) = \sum_{r=0}^m [\hat{b}_r \omega^{\hat{\beta}_r} \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\beta}_r)]. \quad (21f)$$

当 ω 从0到 ∞ 变化时,利用式(19)(20)可在 (k_p, k_I) 平面上可绘制出复根边界(CRB).

对于每一个 $G_{if}(s)$,当 $\hat{\alpha}_n = \hat{\beta}_m$ 时无穷根边界(IRB)能够通过式(1)被计算出来.那么通过式(19)(20)获得的稳定域是必定是一条直线,其表达为

$$k_p = -\hat{a}_n/\hat{b}_m. \quad (22)$$

大多数情况下,在被控系统的传递函数中往往是分子的阶次大于分子的阶次.在这种情况下,它的无穷根边界(IRB)是不存在的.当实根边界(RRB)和无穷根边界(IRB)依据特殊条件不存在时,复根曲线(CRB)把整个 (k_p, k_I) 平面分割成为稳定区域与不稳定区域.在稳定区域,特征方程不存在右半复平面的根,而在不稳定区域,则特征方程存在一个或多个左半复平面的根.因此,稳定区域与不稳定区域的判别可通过文献[26]提供的方法进行判别.

现将本文给出的分数阶参数不确定系统分数阶 PI^λ 控制器的设计步骤归纳如下:

Step 1 首先根据Kharitonov理论把分数阶参数不确定系统分解成若干个参数确定的子系统.

Step 2 求取每一个子系统在分数阶 PI^λ 控制器控制下的稳定域: a) 确定实根边界RRB和无穷根边界IRB的存在性; b) 根据公式(19)和(20),固定 $\lambda = 1$ 值,得到 k_p, k_I 方程,从而获得复根曲线(CRB); c) 对于任何 $\lambda (\lambda \in (0, 2))$ 值,在同一个 (k_p, k_I) 平面内,获得无穷根直线(IRB)、实根直线(RRB)以及复根曲线(CRB). d) 确定在不同 λ 情况下的分数阶 PI^λ 控制器的稳定域; e) 选择使系统处于较大稳定域情况下的 λ 值;

Step 3 重复Step 2,直到计算出在分数阶 PI^λ 控制器控制下使各个子系统都获得较大稳定域的 λ 值;

Step 4 以此 λ 值作为分数阶 PI^λ 控制器的积分阶次;

Step 5 以获得的分数阶 PI^λ 控制器求解各子系统的稳定域,并使各子系统的稳定域相交,其交集即为分数阶参数不确定系统的稳定域,即分数阶 PI^λ 控制器的参数集.在此参数集上取值,便构建了所设计的分数阶 PI^λ 控制器.

4 算例(Example)

考虑文献[19]中的电子散热器分数阶传递函数

$$G(s) = \frac{k}{as^L + b}. \quad (23)$$

假设参数不确定性来自 a, L 和 k .最初假设所有的参数固定,且参数具有以下的名义值:

$$k = 1, a = 39.69, b = 0.598, L = 1.26.$$

考虑参数 a, k 和 L 分别在其名义值的20%, 25%以及10%的范围内变化,即有

$$k \in [\underline{k}, \bar{k}] = [0.8, 1.2],$$

$$a \in [\underline{a}, \bar{a}] = [27.78, 51.60],$$

$$L \in [\underline{L}, \bar{L}] = [1.31, 1.39].$$

根据Kharitonov理论,该参数不确定系统可转化为如下8个参数确定的子系统:

$$\begin{cases} G_{11}(s) = \frac{\underline{k}}{\bar{a}s^{\bar{L}} + b}, G_{12}(s) = \frac{\underline{k}}{\bar{a}s^{\underline{L}} + b}, \\ G_{13}(s) = \frac{\underline{k}}{\underline{a}s^{\bar{L}} + b}, G_{14}(s) = \frac{\underline{k}}{\underline{a}s^{\underline{L}} + b}, \\ G_{21}(s) = \frac{\bar{k}}{\bar{a}s^{\bar{L}} + b}, G_{22}(s) = \frac{\bar{k}}{\bar{a}s^{\underline{L}} + b}, \\ G_{23}(s) = \frac{\bar{k}}{\underline{a}s^{\bar{L}} + b}, G_{24}(s) = \frac{\bar{k}}{\underline{a}s^{\underline{L}} + b}, \end{cases} \quad (24)$$

则任意分数阶子系统的闭环特征方程可描述为

$$\begin{cases} P_{if}(s; k_p, k_I, \lambda) = (\hat{a}s^{\hat{L}} + b) + \hat{k}(k_p + k_I s^{-\lambda}), \\ i = 1, 2, f = 1, 2, 3, 4, \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\hat{a}, \hat{k}, \hat{L}$ 分别表示任意子系统的参数.

分数阶 PI^λ 控制器设计的目的是在分数阶 PI^λ 控制器的控制下求取参数不确定系统的稳定域,进而获得分数阶 PI^λ 控制器的参数集,并使得分数阶 PI^λ 控制器在参数集内取值对于8个参数确定的子系统亦稳定.根据方程式(19)(20),在 (k_p, k_I) 平面内可确定出复根边界曲线(CRB).由于 $s^{\beta_0} = 1$,所以实根边界(RRB) $k_I = 0$ 与复根边界(CRB)可在 (k_p, k_I) 平面上构成了系统的稳定性区域. $\lambda = 1$ 是最简单的情况,此时系统是一个整数阶PI控制器.取 $\lambda = 1$ 并由方程式(19)(20),将相应的复根曲线(CRB)和实根直线(RRB)绘制在 (k_p, k_I) 平面内,见图2.

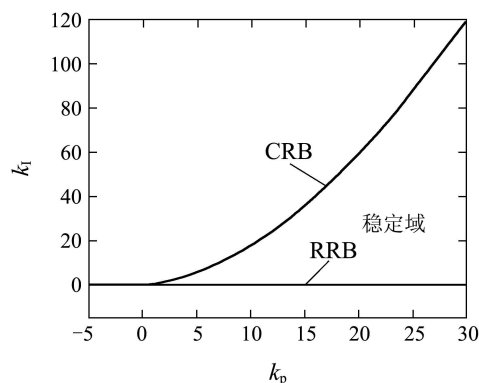


图2 整数阶PI控制器的稳定域

Fig. 2 Stability region of integer order PI controller

从图2中可以看出,整个参数平面被分成了3个不同的区域,即左上的CRB区域、CRB和RRB之间的区

域以及RRB以下的区域. 通过文献[26]中提出的测试方法, 在3个区域中任选一点进行测试, 发现系统的稳定域为CRB曲线与RRB直线包围部分. 在包围区域内的所有点, 都使得名义传递函数式(23)所构成的特征方程稳定.

对于分数阶参数不确定系统转化为参数确定的8个子系统后, 当分数阶 PI^λ 控制器的阶次参数 λ 在 $0 < \lambda < 2$ 的范围内变化时, 获得在分数阶 PI^λ 控制器的控制下各个子系统的稳定域图, 如图3和图4所示. 由于8个子系统的稳定域趋势基本一致, 故选其中两个图予以说明. 从图3和图4可以看出, 对于分数阶 PI^λ 控制器, 随着 λ 的减小, 系统的稳定域有逐渐增大的趋势. 当 $\lambda = 0.8$ 或 $\lambda < 0.8$ 之后, 都能使系统获得较大的稳定域. 因此, 取 $\lambda = 0.8$ 作为分数阶 PI^λ 控制器的积分因子, 即可得到分数阶 $PI^{0.8}$ 控制器. 另外, 可根据实际情况和对控制性能的要求, 可以在 $0 < \lambda < 0.8$ 的范围内取值, 可以获得满足不同控制性能要求的分数阶 PI^λ 控制器. 以 $PI^{0.8}$ 控制器分别计算各个子系统稳定域, 而各个子系统稳定域的交集就是参数不确定系统的稳定域. 其稳定域交集如图5所示.

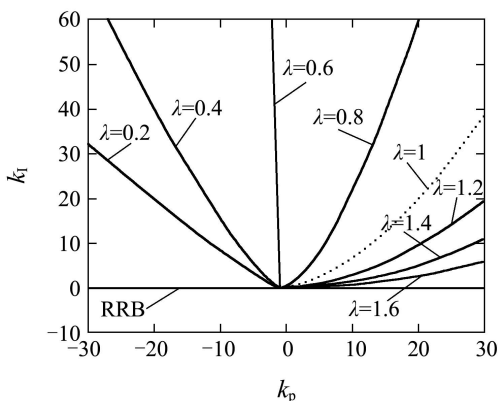


图3 G_{11} 子系统 PI^λ 控制器稳定域

Fig. 3 Stability region of G_{11} for PI^λ controller

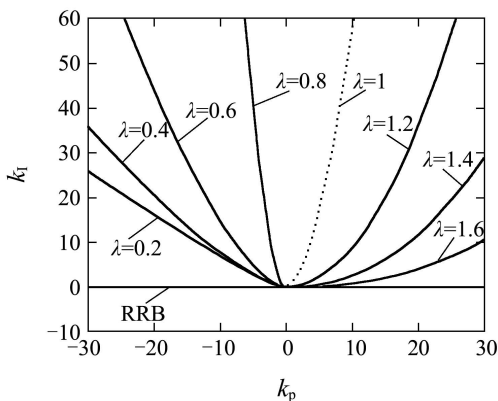


图4 G_{23} 子系统 PI^λ 控制器稳定域

Fig. 4 Stability region of G_{23} for PI^λ controller

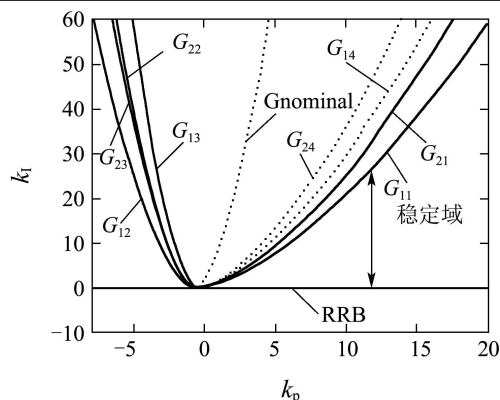


图5 分数阶 $PI^{0.8}$ 控制器的稳定域

Fig. 5 Stability region of $PI^{0.8}$ controller

从图5可以看出, 用分数阶 $PI^{0.8}$ 控制器求取的分数阶参数不确定系统的稳定域为各个子系统稳定域的交集. 即分数阶参数不确定系统组的稳定域为 G_{11} 的复根曲线(CRB)与实根直线(RRB)之间所包围的部分, 它也是分数阶 PI^λ 控制器的参数集. 在此参数集内取值, 可确定 PI^λ 控制器的参数 k_p 和 k_i . 图6为取 $k_p = 10$ 和 $k_i = 0.5$, 采用 $PI^{0.8}$ 控制器对名义系统和8个子系统分别进行单位阶跃响应分析的结果. 从图中可见, 各个子系统响应曲线都在名义参数系统响应曲线附近波动, 且各个子系统很快地趋于稳定, 超调量较小, 响应时间较短. 这表明所设计的分数阶 PI^λ 控制器对分数阶参数不确定系统有较强的鲁棒性和稳定性. 图6中的Gnominal指的是名义参数传递函数 $G(s)$ 的曲线, 即 $G(s)$ 取名义参数值为 $k = 1$, $a = 39.69$, $b = 0.598$, $L = 1.26$ 时的单位阶跃曲线.

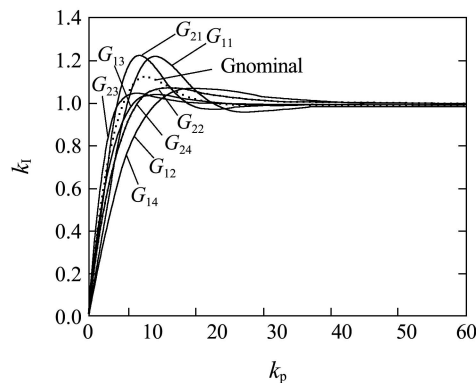


图6 子系统 $PI^{0.8}$ 控制器单位阶跃响应曲线

Fig. 6 Step response of each sub-plant for $PI^{0.8}$ controller

5 结论(Inclusion)

本文对分数阶参数不确定控制对象, 给出了一种简单而有效的方法计算所有分数阶 PI^λ 控制器参数集的方法, 并设计了鲁棒性分数阶 PI^λ 控制器. 通过所设计的分数阶 PI^λ 控制器对各个子系统和名义系统进行阶跃响应可以看出, 各个子系统的阶跃响

应曲线都在名义参数阶跃响应曲线的上下波动,且系统的超调量小,稳定性较好,且由此设计的分数阶 PI^λ 控制器表现出了对分数阶参数不确定系统较强的鲁棒性。

参考文献(References):

- [1] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations*[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [2] DORCAK L. *Numerical models for simulation the fractional-order control system*[EB/OL]. Kosice, Slovak Republic: The Academy of Science Institute of Experimental Physics, 1994. <http://arxiv.org/abs/math/0204108>.
- [3] OUSTALOUP A. *La Dérivation non Entière*[M]. Paris: HERMES, 1995.
- [4] PODLUBNY I. Fractional-order system and controllers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.
- [5] PODLUBNY I, DORCAK L, KOSTIAL I. On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and-controllers[C] // *Proceeding of the 36th Conference on Decision & Control*. New York: IEEE, 1997: 4985 – 4990.
- [6] MAIONE G, LINO P. New tuning rules for fractional PI^α controllers[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 49(1/2): 251 – 257.
- [7] CHEN Y Q, DOU H F, VINAGRE B M, et al. A robust tuning method for fractional order PI controllers[C] // *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications*. Porto, Portugal: Hindawi Publishing Corporation, 2006: 19 – 21.
- [8] FELIU BATLLE V, RIVAS PÉREZ R, SANCHEZ RODRIGUEZ L. Fractional robust control of main irrigation canals with variable dynamic parameters[J]. *Control Engineering Practice*, 2007, 15(6): 673 – 686.
- [9] MONJE C A, CALDERON A J, VINAGRE B M, et al. On fractional PI^λ controllers: some tuning rules for robustness to plant uncertainties[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 38(1/4): 369 – 381.
- [10] BHASKARAN T, CHEN Y Q, XUE D YÜ. Practical tuning of fractional order proportional and integral controller(i): tuning rule development[C] // *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference*. Las Vegas, Nevada: Design Engineering Division and Computers and Information in Engineering Division, 2007, 5: 1245 – 1258.
- [11] TAN N, KAYA I, ATHERTON D P. Computation of stabilizing PI and PID controllers[C] // *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications*. New York: IEEE, 2003, 2: 876 – 881.
- [12] LI J H, LI P K. Stability region analysis of PID controllers for time-delay systems[C] // *Proceeding of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*. New York: Elsevier Science, 2006: 2219 – 2223.
- [13] TAN N, KAYA I, YEROGLU C, et al. Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus[J]. *Energy Conversion and Management*, 2006, 47(18/19): 3045 – 3058.
- [14] HAMAMCI S E, KANTHABHABHA P, VAITHIYANATHAN K. Computation of all stabilizing first order controllers for fractional-order systems[C] // *Proceedings of the 27th Chinese Control Conference*. Beijing: Beijing University Aeronautics & Astronautics Press, 2008, 3: 123 – 128.
- [15] HAMAMCI S E. Stabilization using fractional-order PI and PID controllers[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 51(1/2): 329 – 343.
- [16] HAMAMCI S E. An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(10): 1964 – 1969.
- [17] HO M T, DATTA A, BHATTACHARYYA S P. Design of P, PI and PID controllers for interval plants[C] // *Proceedings of the 1998 American Control Conference*. New York: IEEE, 1998, 4: 2496 – 2501.
- [18] HUANG Y J, WANG Y J. Robust PID tuning strategy for uncertain plants based on the Kharitonov theorem[J]. *ISA Transactions*. 2000, 39: 419 – 431.
- [19] PETRAS I, CHEN Y Q, VINAGRE B M, et al. Stability of linear time invariant systems with interval fractional orders and interval coefficients[C] // *Proceedings of International Conference on Computation Cybernetics*. Vienna, Austria: Elsevier Science, 2005: 1 – 4.
- [20] YANG Q C, HYO SUNG AHN, PODLUBNY I. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(10): 2611 – 2618.
- [21] HYO SUNG AHN, YANG Q C. Necessary and sufficient stability condition of fractional order interval linear systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2985 – 2988.
- [22] KHARITONOV V L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of system of linear differential equations[J]. *Differential Equations*, 1978, 14(11): 1483 – 1485.
- [23] BHATTACHARYYA S P, CHAPPELLAT H, KEEL L H. *Robust Control: The Parametric Approach*[M]. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1995.
- [24] HWANG Chyi, HWANG Juh-Haur, LEU Jeng-Fan. Tuning PID controllers for time-delay processes with maximizing the degree of stability[C] // *Proceedings of the 5th Asian Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2004, 1: 466 – 471.
- [25] CHENG Y C, HWANG C. Stabilization of unstable first-order time-delay systems using fractional-order PD controllers[J]. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 2006, 29(2): 241 – 249.
- [26] HWANG Chyi, CHENG Yi-Cheng. A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems[J]. *Automatica*, 2006, 42(5): 825 – 831.

作者简介:

梁涛年 (1977—), 男, 博士研究生, 研究方向为机电智能控制系统, E-mail: LTN_99@126.com;

陈建军 (1951—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能结构及控制, E-mail: jjchen@xidian.edu.cn.