文章编号: 1000−8152(2011)07−0973−06

用外包集逼近预测控制的最大终端状态集

王亚锋[1,2], 张友安[1], 孙富春[2], 刘华平[2]

(1. 海军航空工程学院 自动控制系, 山东 烟台 264001; 2. 清华大学 计算机科学与技术系, 北京 100084)

摘要: 为了增大模型预测控制的终端状态集, 设计了一种迭代逼近法, 得到了一个最大终端状态集的外包集序列. 从理论上证明了当迭代次数趋于无穷步时, 此外包集序列逐渐收敛至最大终端状态集. 此序列中的外包集, 采用支持向量机作为分类工具依次从状态空间中分离得到. 设计了一个基于阈值的终止函数, 当前后两个外包集满足终止条件时, 终止迭代, 并将后面的一个外包集作为终端状态集的估计, 阈值越小, 迭代次数越大, 此外包集对最大终端状态集的逼近精度越高. 最后, 将此终端状态集估计应用于预测控制, 仿真结果验证了本文方法的可行性.

关键词: 模型预测控制; 终端代价函数; 终端状态集; 支持向量机

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Using enclosing sets to approach the maximal terminal state region in model predictive control

WANG Ya-feng[1,2], ZHANG You-an[1], SUN Fu-chun[2], LIU Hua-ping[2]

(1. Department of Automatic Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China;
2. Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: To enlarge the terminal state region of the model predictive control(MPC), we design an iterative method and obtain an enclosing sets sequence for the maximal terminal state region. We prove that, when the iteration step goes to infinity, the enclosing sets sequence converges to the maximal terminal state region. The enclosing sets in the sequence are extracted one by one from the state space by using support vector machine(SVM) classifier. A stop-function based on a threshold is designed. When two consecutive enclosing sets satisfy the stop condition, the iteration will be terminated and the latter one will be considered the estimated terminal state region. The smaller the threshold, the greater the iteration times and the higher the precision of this enclosing set approaching to the maximal terminal state region will be. Finally, the estimated terminal state region is applied to MPC and the simulation results show the feasibility of the method proposed in this paper.

Key words: model predictive control; terminal cost function; terminal state region; support vector machine

1　引言(Introduction)

模型预测控制可以解释为用有限时域优化逼近最优控制的无限时域优化的一种次优控制算法. 这种逼近需要解决一个关键问题: 稳定性. 对于最优控制, 只要无限时域优化存在可行解即可保证其稳定性; 对于预测控制, 则需要附加条件以保证其闭环稳定性, 常见方法有3种[1]: 终端状态集约束(包括终端零约束), 代表有文献[2,3]; 终端代价函数, 代表有文献[4,5]; 两者结合使用, 代表有文献[6,7]. 其中, 采用终端代价函数的方法虽说在优化中没有附加终端状态约束, 但其终端状态会自动进入某个特定区域, 以保证闭环系统的稳定性. 所有满足系统约束且最终可被引导至平衡点的初始状态集称为可稳定域(即吸引域).

对于预测控制来说, 增大其吸引域有两种方法: 增大预测步长、增大终端状态集. 其中, 预测步长的加大会增加在线优化的计算负担, 增长控制律的求取时间, 降低预测控制的时效性. 因而, 以增大终端状态集为途径来扩大吸引域吸引了很多学者的目光, 代表性的有文献[7～12]. 文献[7]用了一个椭球集作为预测控制的终端状态集; 文献[8]用饱和控制的稳定域作为预测控制的终端状态集; 文献[9]构造了逐渐减小的终端状态集序列, 在此基础上, 采用收缩预测控制以保证闭环稳定性; 文献[10]通过在优化中引入松弛终端约束增大预测控制的吸引域; 文献[11]采用多面体描述终端状态集; 文献[12]将整个状态空间分类为两部分: 一部分可称之为线性反馈不可稳定域; 另一部分称之为线性反馈可稳定域, 即

收稿日期: 2010−01−04; 收修改稿日期: 2010−07−13.
基金项目: 国家自然科学基金杰出青年基金资助项目(60625304); 国家自然科学基金资助项目(90716021, 60621062); 国家重点基础研究发展计划资助项目(2007cb311003, 2009cb724002).

是说此域内的所有点都可用线性反馈控制律引导至平衡点. 作者将线性反馈可稳定域作为预测控制的终端状态集, 并采用支持向量机对其进行估计. 文献[12]没有将终端状态集局限于椭球或多面体形式, 对一些系统而言, 其所得结果要大许多.

但是, 上述文献所采用的方法本质上都基于同一个思想: 事先给定某一控制律(如线性反馈控制、饱和控制等), 再计算出与此控制律相对应的可稳定域, 并将此稳定域用作预测控制的终端状态集. 这种方法比较保守, 得到的终端状态集也没有达到最大化.

本文受文献[12]的启发, 采用支持向量机将整个状态空间分类为两个区域, 一个区域内的所有点都满足终端状态集需要满足的条件, 另一个区域不满足. 首先整理出为保证闭环系统稳定终端状态集需要满足的两个基本条件: 终端代价函数的李雅普诺夫特性、不变集特性. 接着, 设计了一种迭代逼近的方法, 并且证明了当迭代至无穷次数时, 所得到的状态区域就是最大的终端状态集. 最后, 采用支持向量机对每一步迭代计算的过渡状态集进行集合近似估计. 由于不可能迭代计算到无穷步, 所以笔者得到的状态域本质上只是最大终端状态集的一个外包集, 这是本文的一个不足之处.

2 终端状态集需要满足的两个基本条件(Two basic conditions the terminal state region should meet)

考虑如下离散系统模型:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \tag{1}$$

其中: $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$分别为系统在采样时刻k的状态和输入; $f(\cdot,\cdot)$为关于x_k, u_k的非线性连续函数, 满足$f(0,0) = 0$. 系统的状态和输入约束为$x_k \in X$, $u_k \in U$, 满足X和U都是紧的, 且都包含原点.

预测控制的优化问题$P(x_k)$可描述成

$$\begin{cases} \min\limits_{u(i,x_k)\in U} J(u,x_k) = \\ \sum\limits_{i=0}^{N-1} q(x(i,x_k),\ u(i,x_k)) + F(x(N,x_k)), \\ \text{s.t. } x(i+1,x_k) = f(x(i,x_k),u(i,x_k)), \\ \qquad x(i+1,x_k) \in X,\ u(i,x_k) \in U, \\ \qquad x(N,x_k) \in X_\mathrm{f},\ i = 0,\cdots,N-1, \end{cases} \tag{2}$$

其中: $x(0,x_k) = x_k$, x_k表示优化起始点; N为预测步长; X_f(满足$0 \in X_\mathrm{f}$, 且为闭集)为终端状态约束集; $F(\cdot)$为终端代价函数, 满足$F(0) = 0$, $F(x) \geqslant \alpha(\|x\|)$, $\alpha(\cdot)$是K函数($\alpha: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$连续且严格递增, 且满足$\alpha(0) = 0$).

定义 $J^*(x_k)$ 为 $J(u,x_k)$ 的极小值, $u^*(x_k) = \{u^*(0,x_k),\cdots,u^*(N-1,x_k)\}$为其最优输入轨迹, $x^*(x_k) = \{x^*(1,x_k),\cdots,x^*(N,x_k)\}$为相应的最优状态轨迹. 实际控制中, 只将$u^*(0,x_k)$作用于实际系统, 下一时刻的输入由下一时刻的优化给出, 如此反复, 即可得到预测控制律 $u_\mathrm{RH} = \{u^*(0,x_k), u^*(0,x_{k+1}),\cdots\}$.

若终端状态集X_f满足式(1)(2)两个条件, 即可保证预测控制系统的闭环稳定性, 如引理1所示.

引理 1 定义$\Gamma_N := \{x \in X | x^*(N,x) \in X_\mathrm{f}\}$, 对任意的$x \in \Gamma_N$,如果X_f满足两个条件:

C1) $F(\cdot)$的李雅普诺夫特性. 对任意的$x \in X_\mathrm{f}$, 都有$F(x) \geqslant \min\limits_{u\in U}\{q(x,u) + F(f(x,u))\}$.

C2) 不变集特性. 对任意的$x \in X_\mathrm{f}$, 有$f(x,u) \in X_\mathrm{f}$, $x \in X$, $u \in U$.

则采用滚动预测控制律u_RH可使x最终收敛到零.

引理1由文献[1]中整理而来, 具体证明可查阅文献[1].

Γ_N称为预测控制的吸引域. 如前所述, 要扩大Γ_N, 有两种途径: 增长预测步长N、扩大终端状态集X_f. 其中, 增长预测步长会增加在线优化的计算负担, 因此, 本文以第2种途径为研究对象. 定义$X_{\mathrm{f,max}}$为满足条件C1)C2)且最大的X_f, 本文要解决的问题即可描述为: 针对系统(1), 对于给定的终端代价函数$F(\cdot)$, 估计出与其对应的$X_{\mathrm{f,max}}$.

3 最大终端状态集的迭代逼近策略(The strategy of approaching to the maximal terminal state region iteratively)

至今, 已有很多相关文献对X_f的构造提出了切实可行的方法, 但是, 如前所述, 这些方法很多都是事先给定某一控制律$u = k(x)$(如线性反馈控制、饱和控制等), 再计算出与此控制律相应的终端状态集X_f, 使对任意点$x \in X_\mathrm{f}$满足: $F(x) \geqslant q(x,k(x)) + F(f(x,k(x)))$, 且$k(x)\in U$, $f(x,k(x)t) \in X_\mathrm{f}$.

这种方法对X_f的构造比较保守, 并没有在最大程度上逼近$X_{\mathrm{f,max}}$.

本文直接从条件C1)C2)出发构造X_f. X_f可定义为

$$X_\mathrm{f} := \{x \in X | F(x) \geqslant F^*_{X_\mathrm{f}}(x)\}, \tag{3}$$

其中$F^*_{X_\mathrm{f}}(x) = \min F_{X_\mathrm{f}}(x)$是下述优化问题的解:

$$\begin{aligned} &\min_{u\in U}\ F_{X_\mathrm{f}}(x) = q(x,u) + F(f(x,u)), \\ &\text{s.t. } f(x,u) \in X_\mathrm{f}. \end{aligned} \tag{4}$$

显然, 在X_f未知时, 对某一点$x \in X$, 直接依据式(3)(4)是无法判别其是否属于X_f的, 难点就在于优化

问题(4)中的状态约束用到了X_{f}本身. 为避免这个问题, 本文采用迭代逼近的方法对X_{f}进行估计, 首先给出一个最初估计$X_{\mathrm{f}}^0 \supseteq X_{\mathrm{f}}$, 借由$X_{\mathrm{f}}^0$得到一个更精确的估计$X_{\mathrm{f}}^1$, 如此反复, 依次得到$X_{\mathrm{f}}^2, X_{\mathrm{f}}^3, \cdots$, 满足$X_{\mathrm{f}}^0 \supseteq X_{\mathrm{f}}^1 \supseteq \cdots \supseteq X_{\mathrm{f}}^j \supseteq X_{\mathrm{f}}$. 随着$j$的增大时, X_{f}^j逐渐收敛到某一集合$X_{\mathrm{f}}^{+\infty}$, 此$X_{\mathrm{f}}^{+\infty}$即是X_{f}的最终估计. 逼近过程如图1所示.

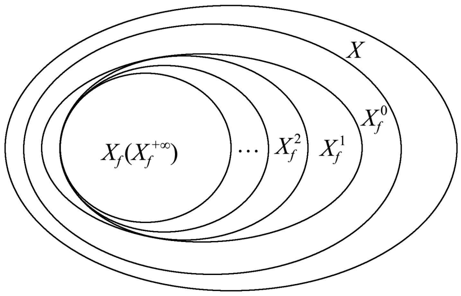

图 1 终端状态约束集的逼近示意图

Fig. 1 The map of approaching the maximal terminal state region

图1中, X_{f}^0的定义为

$$X_{\mathrm{f}}^0 := \{x \in X | F(x) \geqslant F^*_{X_{\mathrm{f}}^0}(x)\}, \tag{5}$$

其中$F^*_{X_{\mathrm{f}}^0}(x)$是下述优化问题的解:

$$\begin{aligned} &\min_{u \in U} F_{X_{\mathrm{f}}^0}(x) = q(x,u) + F(f(x,u)), \\ &\text{s.t. } f(x,u) \in X. \end{aligned} \tag{6}$$

类似地, X_{f}^1的定义为

$$X_{\mathrm{f}}^1 := \{x \in X | F(x) \geqslant F^*_{X_{\mathrm{f}}^1}(x)\}, \tag{7}$$

$F^*_{X_{\mathrm{f}}^1}(x)$是下述优化问题的解:

$$\begin{aligned} &\min_{u \in U} F_{X_{\mathrm{f}}^1}(x) = q(x,u) + F(f(x,u)), \\ &\text{s.t. } f(x,u) \in X_{\mathrm{f}}^0. \end{aligned} \tag{8}$$

以此类推, X_{f}^j的定义为

$$X_{\mathrm{f}}^j := \{x \in X | F(x) \geqslant F^*_{X_{\mathrm{f}}^j}(x)\}, \tag{9}$$

$F^*_{X_{\mathrm{f}}^j}(x)$是下述优化问题的解:

$$\begin{aligned} &\min_{u \in U} F_{X_{\mathrm{f}}^j}(x) = q(x,u) + F(f(x,u)), \\ &\text{s.t. } f(x,u) \in X_{\mathrm{f}}^{j-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

定理1为X_{f}^j的收敛性提供了理论依据.

定理 1　对于式(9)中定义的X_{f}^j, 当$j \to +\infty$时, 有$X_{\mathrm{f}}^j \to X_{\mathrm{f,max}}$.

证明采用反证法.

步骤 1　假设存在$X_{\mathrm{spo}} \supset X_{\mathrm{f,max}}$, 使得$j \to +\infty$时, $X_{\mathrm{f}}^j \to X_{\mathrm{spo}}$. 则有对任意的$x \in X_{\mathrm{spo}}$, 都满足$F(x) \geqslant \min\limits_{u \in U}\{q(x,u) + F(f(x,u))\}$, 且$f(x,u) \in X_{\mathrm{spo}}$, 这与$X_{\mathrm{f,max}}$是满足这两个条件的最大集矛盾.

步骤 2　假设存在$X_{\mathrm{spo}} \subset X_{\mathrm{f,max}}$, 使得$j \to +\infty$时, $X_{\mathrm{f}}^j \to X_{\mathrm{spo}}$. 则存在$0 \leqslant N < +\infty$, 使得$X_{\mathrm{f}}^N \supseteq X_{f,\max}$, 且$X_{\mathrm{f}}^{N+1} \subset X_{f,\max}$. 取任意点

$$x \in X_{f,\max} \backslash X_{\mathrm{f}}^{N+1},$$

显然, x满足

$$F(x) \geqslant \min_{u \in U}\{q(x,u) + F(f(x,u))\},$$

且$f(x,u) \in X_{f,\max} \subseteq X_{\mathrm{f}}^N$. 又因$x \in X_{\mathrm{f}}^N$, 故$x$满足$X_{\mathrm{f}}^{N+1}$的定义, 即$x \in X_{\mathrm{f}}^{N+1}$, 显然矛盾.

注 1　实际计算过程中, 因时间有限, 是无法计算到$j \to +\infty$的. 若迭代到$j = N_{\mathrm{stop}}$步时, $X_{\mathrm{f}}^{N_{\mathrm{stop}}}$与$X_{\mathrm{f}}^{N_{\mathrm{stop}}-1}$很接近(基本重合), 即可将$X_{\mathrm{f}}^{N_{\mathrm{stop}}}$作为对$X_{f,\max}$的最终估计. 可以看出, $X_{\mathrm{f}}^{N_{\mathrm{stop}}}$本质上只是$X_{f,\max}$的一个外包集, 将$X_{\mathrm{f}}^{N_{\mathrm{stop}}}$作为终端状态集求取预测控制的吸引域可能会包含进来一些本不属于吸引域的状态点, 这是本文方法的一个不足之处.

注 2　本文所采用的逼近策略是由大到小, 即由整个状态空间向最大终端状态集逼近. 相反的, 可采用一种思想与此类似但逼近却由小到大的策略, 即由最大终端状态集的一个已知子集向其逼近的迭代策略, 得到越来越大的子集. 这种方法得到的状态区域比最大终端状态集要小, 对系统稳定性没有影响. 这里只给出其思想策略, 不再对其方法进行详述, 有兴趣的读者可自行设计.

鉴于支持向量机在低样本数情况下也有很好的寻优能力, 选用支持向量机作为集合估计工具, 依次估计出$X_{\mathrm{f}}^0, X_{\mathrm{f}}^1, \cdots, X_{\mathrm{f}}^j$. 具体思路为采用支持向量机寻找确定每一个集合的最优分割面, 由此最优分割面从状态空间中依次分离出$X_{\mathrm{f}}^0, X_{\mathrm{f}}^1, \cdots, X_{\mathrm{f}}^j$.

4　支持向量机(The support vector machine)

支持向量机是统计学习理论中最年轻的部分, 其目标是在有限样本情况下得到一个最优分割面. 对于非线性问题, 支持向量机将其通过非线性变换转换到高维的特征空间, 在高维空间中构造线性判别函数来实现原空间中的非线性判别函数.

以将X分成A与$X \backslash A$两类, 即从X中估计A为例. 从X中抽取任意点, 并对每一个$x_i \in A$, 引入变量$y_i = +1$; 类似地, 对每一个$x_i \in X \backslash A$, 引入变量$y_i = -1$. 定义$I^+ := \{i : y_i = +1\}$, $I^- := \{i : y_i = -1\}$. 采用支持向量机在A与$X \backslash A$之间找到一个最优分割面$O(x) := w \cdot \phi(x) + b = 0$, 满足$O(x) \geqslant 0$的点属于$A$, 否则属于$X \backslash A$. $O(x)$可由下面的优化问题求取:

$$\begin{cases} \min\limits_{\alpha} \ \dfrac{1}{2} \sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j \phi(x_i) \cdot \phi(x_j) - \sum\limits_i \alpha_i, \\ \text{s.t. } \sum\limits_i \alpha_i y_i = 0, \\ \qquad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant C, \forall i \in I^+;\ \alpha_i \geqslant 0, \forall i \in I^-, \end{cases} \tag{11}$$

其中内积$\phi(x)\cdot\phi(x_j)$可由下述高斯核函数代替:

$$\phi(x)\cdot\phi(x_i)= \\ \ker(x_i,x)=\exp(-\frac{\|x-x_i\|^2}{2\sigma^2}). \tag{12}$$

关于支持向量机的研究, 有大量文献可参阅, 但其超出本文范围, 本文不作详细介绍. 此处, 本文以从X估计出$X_{\rm f}^0$为例, 简单介绍用支持向量机进行集合估计的原理.首先, 通过求解式(6)描述的非线性优化得到与每一个x_i对应的y_i, 并将所有训练样本$\{x_i,y_i\}$输入支持向量机; 支持向量机通过求解式(12), 得到与每一个$\{x_i,y_i\}$对应的a_i; 最后, 支持向量机由训练样本中选取出P_0个支持向量, 并由此P_0个支持向量确定估计$X_{\rm f}^0$所需的最优分割面

$$O^0(x)=\sum_{i=1}^{P_0}w_i\cdot\ker(x_i,x)+b, \tag{13}$$

其中: $w_i=\alpha_iy_i$表示权重系数, $b=-\sum\limits_{i}^{P_0}\alpha_i$表示分类阈值. 得到$O^0(x)$后, $X_{\rm f}^0$即可由其表示为$X_{\rm f}^0\triangleq\{x\in X|O^0(x)\geqslant 0\}$.

5 最大终端状态集的外包估计(The estimation of enclosing sets approaching to the maximal terminal state region)

如前所述, 最大终端状态集$X_{\rm f,max}$的估计是个渐近的逼近过程, 首先估计$X_{\rm f}^0$, 再依次估计$X_{\rm f}^1$, $X_{\rm f}^2$, $\cdots$, 当$X_{\rm f}^j$与$X_{\rm f}^{j-1}$很接近时,即可将$X_{\rm f}^j$作为$X_{\rm f,max}$的最终估计. 用支持向量机对这些过渡状态集进行估计首先要解决训练样本的获取问题.

5.1 训练样本的获取(Obtaining the training samples)

以估计$X_{\rm f}^0$为例, 抽取任意点$x_i\in X$, y_i的判别如下:

如果$F(x_i)\geqslant F^*_{X_{\rm f}^0}(x_i)$, 则$y_i=+1$;

否则, $y_i=-1$.

其中$F^*_{X_{\rm f}^0}(x_i)$是优化式(6)的极值.

得到训练样本后, 将其输入支持向量机, 得到最优分割面$O^0(x)=0$, 最终确定$X_{\rm f}^0$, 即$X_{\rm f}^0\triangleq\{x\in X|O^0(x)\geqslant 0\}$.

5.2 终端状态集的逼近(Approaching to the terminal state region)

以$X_{\rm f}^0$为基础, 可对$X_{\rm f}^1$进行估计. 类似地, 抽取任意点$x_i\in X_{\rm f}^0$, 判别与其对应的y_i.

如果$F(x_i)\geqslant F^*_{X_{\rm f}^1}(x_i)$, 则$y_i=+1$; 否则, $y_i=-1$.

同理, 将训练样本输入支持向量机可得到最优分割面$O^1(x)=0$, 如此反复, 得到一系列的$O^j(x)=0$.

当$j=N_{\rm stop}$时, 若满足

$$\sum_{i=1}^{P_{N_{\rm stop}}}\|O^{N_{\rm stop}}(x_i)-O^{N_{\rm stop}-1}(x_i)\|\leqslant\varepsilon P_{N_{\rm stop}}, \tag{14}$$

即可认为$X_{\rm f}^{N_{\rm stop}}$与$X_{\rm f}^{N_{\rm stop}-1}$比较接近, 并将$X_{\rm f}^{N_{\rm stop}}$作为对$X_{\rm f,max}$的最终估计. 其中: $x_i\in X_{{\rm sup},N_{\rm stop}}$, $X_{{\rm sup},N_{\rm stop}}$表示$j=N_{\rm stop}$时的支持向量集, $P_{N_{\rm stop}}$表示$j=N_{\rm stop}$时的支持向量个数, ε为某一设定的阈值, 其值越小, $X_{\rm f}^{N_{\rm stop}}$对$X_{\rm f,max}$的逼近越准确. 最终, $X_{\rm f,max}$可用其外包集来近似估计为$X_{\rm f,max}\triangleq\{x\in X|O^{N_{\rm stop}}(x)\geqslant 0\}$.

注 3 采用式(14)来判断两个集合比较接近的依据是: 状态集本身由其最优分类面确定, 而以支持向量机为工具进行分类得到的最优分类面本质上是一个函数表达式, 这个函数表达式的参数由其所选取的支持向量确定, 换句话说不同的最优分类面的函数值在其支持向量处是最敏感的. 因此, 两个集合是否接近可以简单的用两个分类函数在其中一个分类面所选取的支持向量处的差值的范数来判断. 所以, 式(14)中用到的支持向量集也可以用$X_{{\rm sup},N_{\rm stop}-1}$.

综上所述, 采用本文方法求取预测控制终端状态集的步骤可整理如下:

Step 1 设置SVM的训练样本数以及循环终止阈值ε.

Step 2 导入循环$j=0,1,2,\cdots$, 用SVM求取最优分割面$O^j(x)=0$, 确定$X_{\rm f}^j$: $X_{\rm f}^j\triangleq\{x\in X_{\rm f}^{j-1}|O^j(x)\geqslant 0\}$, 当$j=0$ 时, $X_{\rm f}^{-1}=X$. 用SVM求取最优分割面$O^j(x)$ 的步骤如下:

Step 2.1 求取训练样本. 抽取任意点$x_i\in X_{\rm f}^{j-1}$ (当$j=0$ 时, 则抽取任意点$x_i\in X$); 并判断与x_i对应的y_i, 其判断方法如下:

如果$F(x_i)\geqslant F^*_{X_{\rm f}^j}(x_i)$, 则$y_i=+1$;

否则, $y_i=-1$.

其中$F^*_{X_{\rm f}^j}(x_i)$ 是下述优化的极值.

$\min\limits_{u\in U}\ F_{X_{\rm f}^j}(x)=q(x,u)+F(f(x,u))$,

s.t. $f(x,u)\in X$.

Step 2.2 将训练样本输入支持向量机. 将由Step 2.1中求取的每一对x_i, y_i输入支持向量机.

Step 2.3 求取最优分割面$O^j(x)=0$, 确定$X_{\rm f}^j$. 支持向量机从所有的训练样本中抽取出P_j个支持向量, 并将P_j个支持向量x_i和与之对应的权重系数w_i以及分类阈值b一并输出. 保存这些数据, 由式(15)确定最优分割面$O^j(x_i)=0$.

$$O^j(x)=\sum_{i=1}^{P_j}w_i\cdot\ker(x_i,x)+b, \tag{15}$$

其中: P_j为支持向量个数, w_i为支持向量x_i所对应的

权重系数, b为分类阈值, $\ker(x_i,x)$为核函数, 其形式如式(12)所示. 得到$O^j(x_i)$后, X_f^j即可描述为

$$X_\mathrm{f}^j \triangleq \{x \in X_\mathrm{f}^{j-1} | O^j(x) \geqslant 0\}.$$

Step 3 判断是否满足循环终止条件. 当$j = N_\mathrm{stop}$时, 若满足

$$\sum_{i=1}^{P_{N_\mathrm{stop}}} \|O^{N_\mathrm{stop}}(x_i) - O^{N_\mathrm{stop}-1}(x_i)\| \leqslant \varepsilon P_{N_\mathrm{stop}}.$$

跳出循环.

Step 4 获取终端状态集的最终估计

$$X_{f,\max} \triangleq X_\mathrm{f}^{N_\mathrm{stop}} = \{x \in X | O^{N_\mathrm{stop}}(x) \geqslant 0\}.$$

以上即为求取终端状态集的具体步骤, 当终端状态集确定后, 式(2)表示的优化问题即可描述为

$$\begin{cases} \min\limits_{u(i,x_k)\in U} J(u,x_k) = \\ \sum\limits_{i=0}^{N-1} q(x(i,x_k),u(i,x_k)) + F(x(N,x_k)), \\ \text{s.t. } x(i+1,x_k) = f(x(i,x_k),u(i,x_k)), \\ \quad x(i+1,x_k) \in X,\ u(i,x_k) \in U, \\ \quad O^{N_\mathrm{stop}}(x(N,x_k)) \geqslant 0. \end{cases} \tag{16}$$

式(16)中: $O^{N_\mathrm{stop}}(x)$是$j = N_\mathrm{stop}$时的最优分类函数, 其形式为

$$O^{N_\mathrm{stop}}(x) = \sum_{i=1}^{P_{N_\mathrm{stop}}} w_i \cdot \ker(x_i,x) + b. \tag{17}$$

注 4 $O^{N_\mathrm{stop}}(x)$的获取是一个离线计算过程, 并不参与到预测控制的在线优化中, 因此对时间并没有特别高的要求, 这也是可以采用支持向量机对其进行迭代逼近的原因. 但是, 可以看出, 由最优分类面$O^{N_\mathrm{stop}}(x)$确定的终端状态集并不一定是凸的, 这会导致在预测控制的在线优化计算中, 计算量偏大, 计算时间偏长. 如何在此终端状态集内求取一个最大凸集作为新的终端状态集将是笔者的下一步研究方向.

注 5 如式(17)所示, 采用本文方法求取的终端状态集只与其最优分类函数相关, 而最优分类函数的复杂度与其用到的支持向量个数相关. 支持向量个数与迭代次数之间并不存在必然联系, 因此, 最终得到的终端状态集不会随着迭代次数的增加越发复杂.

6 算例仿真(The simulation example)

将文献[7, 12]中的模型离散化后用作本文仿真模型:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T\mu \\ T\mu \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} T(1-\mu) & 0 \\ 0 & -4T(1-\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} u_k,$$

其中: $\mu = 0.5$; 状态约束与输入约束分别为$X = \{x | \|x\|_1 \leqslant 4\}$, $U = \{u | |u| \leqslant 2\}$; 采样时间$T = 0.1\,\mathrm{s}$; 预测步长$N = 3$. 文献[7, 12]中, 代价函数取二次型性能指标: $q(x,u) = x^\mathrm{T}Q_0x + u^\mathrm{T}R_0u$, $Q_0 = 0.5I$, $R_0 = 1$. 离散形式的代价函数需将其乘以采样时间, 即$Q = TQ_0$, $R = TR_0$; 终端代价函数$F(x) = x^\mathrm{T}Px$, $P = [345\ \ 300; 300\ \ 345]$.

对于支持向量机来说, 训练样本数的选取很重要, 太小则精度不高, 太大则计算量大. 本文经过多次仿真试验, 将训练样本数选定为3000, 计算量较小且精度与更大样本数的精度相差无几. 首先, 选取3000个任意点, 再对每一个点x_i, 判别其相应的y_i, 最后, 将$\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $i = 1, \cdots, 3000$, 两组数据输入支持向量机, 得到最优分类面.

式(13)中, 高斯核函数的参数选取为$\sigma = 1$, 判别不等式(14)中的阈值设置为$\varepsilon = 1$. 仿真结果显示, 迭代至$j = 15$时, 已经满足

$$\sum_{i=1}^{P_{15}} \|O^{15}(x_i) - O^{14}(x_i)\| \leqslant 1 \cdot P_{15}.$$

此时, 即可认为X_f^{15}与X_f^{14}已经很接近, 并将X_f^{15}作为$X_{\mathrm{f},\max}$的最终估计. 整个逼近过程如图2所示.

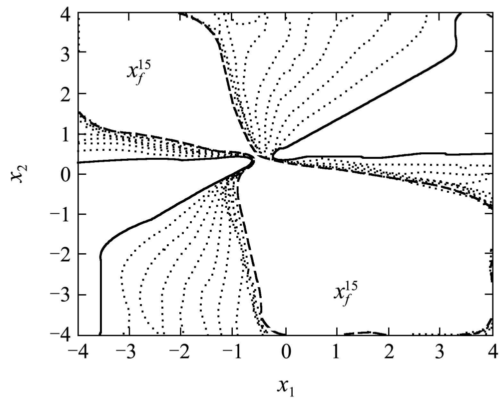

图 2 $X_{\mathrm{f},\max}$的逼近过程

Fig. 2 The process of approaching $X_{f,\max}$

图2中: 实线表示分离X_f^0的最优分类面, 虚点线表示分离X_f^j的最优分类面, 划线表示分离X_f^{15}的最优分类面. 确定$O^{15}(x)$时用到的支持向量个数为$P_{15} = 33$. 保存这33个支持向量及其对应的权重系数w_i以及分类阈值b(因篇幅所限, 这里就不一一给出), 代入式(17), 即可得到X_f^{15}的近似描述:

$$X_\mathrm{f}^{15} \triangleq \{x \in X | \sum_{i=1}^{P_{N_\mathrm{stop}}} w_i \cdot \ker(x_i,x) + b \geqslant 0\}.$$

X_f^{15}便可将作为优化问题(式(16)所示)中的终端状态集约束.

取任意点$x \in \Gamma_3$(理论上, $\Gamma_3 \supset X_{\rm f}^{15}$. 但本例中, Γ_3与$X_{\rm f}^{15}$非常接近, 因此, 任意选$x \in X_{\rm f}^{15}$), 观察其收敛性.

图3中: 实线表示文献[7]给出的终端约束集, 虚点线表示文献[12]给出的终端约束集, 本文的终端约束集用划线表示, 点划线是状态点的收敛曲线. 可以看出, 这5个状态点都可被引导至平衡点, 而且采用本文方法得到的终端约束集比文献[7, 12]的结果都大.

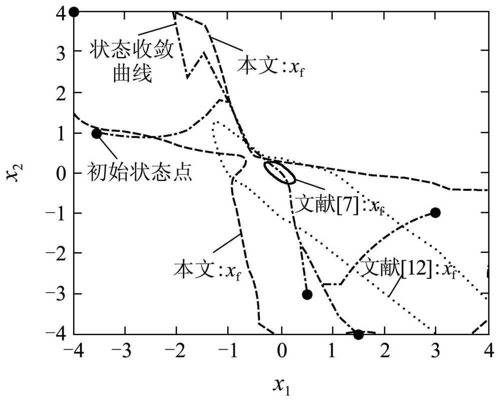

图 3 状态收敛曲线

Fig. 3 The convergence curves of states

7 结论(Conclusion)

在终端代价函数给定的情况下, 以终端状态集需要满足的条件为基础, 采用迭代方法构造出一个状态集序列. 首先以整个状态空间为约束条件, 以终端代价函数的李雅普诺夫特性为判别依据, 从系统状态空间中分离出一个初始状态集, 再以此初始状态集作为下一轮求解中的约束条件, 得到一个新的状态集, 又以此新状态集作约束条件得到另一个状态集, 如此反复, 使得每一轮的状态集逐渐满足不变集特性. 从理论上证明了随着迭代次数的增加, 状态集序列逐渐收敛于最大终端状态集. 以支持向量机为分类工具从状态空间中依次分离出此状态集序列, 设计了迭代终止函数, 当相邻两个状态集满足终止条件时, 停止迭代, 得到一个最大终端状态集的外包. 最后, 通过仿真算例验证了吸引域内状态点的收敛性.

参考文献(References):

[1] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.

[2] MAYNE D Q, HANNAH MICHALSKA. Receding horizon control of nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(7): 814 – 824.

[3] MICHALSKA H, MAYNE D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(11): 1623 – 1633.

[4] LIMON D, ALAMO T, SALAS F, et al. On the stability of constrained MPC without terminal constraint[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 832 – 836.

[5] ALI JADBABAIE, JOHN HAUSER. On the stability of receding horizon control with a general terminal cost[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 674 – 678.

[6] OLIVEIRA KOTHARE S L DE, MORARI M. Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(6): 1053 – 1071.

[7] CHEN H, ALLGOWER F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability[J]. *Automatica,* 1998, 34(10): 1205 – 1217.

[8] DONA J A DE, SERON M M, MAYNE D Q, et al. Enlarged terminal sets guaranteeing stability of receding horizon control[J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 47(1): 57 – 63.

[9] LIMON D, ALAMO T, CAMACHO E F. Enlarging the domain of attraction of MPC controllers[J]. *Automatica*, 2005, 41(4): 629 – 635.

[10] GONZáLEZ A H, ODLOAK D. Enlarging the domain of attraction of stable MPC controllers, maintaining the output performance[J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 1080 – 1085.

[11] CANNON M, DESHMUKH V, KOUVARITAKIS B. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets[J]. *Automatica*, 2003, 39(8): 1487 – 1494.

[12] ONG C J, SUI D, GILBERT E G. Enlarging the terminal region of nonlinear model predictive control using the support vector machine method[J]. *Automatica*, 2006, 42(6): 1011 – 1016.

作者简介:

王亚锋 (1982—), 男, 博士研究生, 从事预测控制理论研究, E-mail: wyfyxy@sina.com;

张友安 (1963—), 男, 博士生导师, 从事专家系统的研究, E-mail: zhangya63@sina.com;

孙富春 (1964—), 男, 博士生导师, 从事神经网络与人工智能的研究, E-mail: fcsun@mail.tsinghua.edu.cn;

刘华平 (1976—), 男, 副教授, 从事神经网络与人工智能的研究, E-mail: hpliu@mail.tsinghua.edu.cn.