

文章编号: 1000-8152(2011)03-0329-06

超差特征量指标约束下的离散系统待机控制

陈 益¹, 薄煜明¹, 邹卫军¹, 陈清华²

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏南京 210094; 2. 南京理工大学 计算机科学与技术学院, 江苏南京 210094)

摘要: 由目标跟踪过程中出现的实际情形提出一类新的离散系统待机控制问题。将系统跟踪中断(控制失败)概率这一关键性指标转化为一组由滞留时间、超差时间以及随机穿越周期等构成的超差特征量指标集的约束; 推导出带状目的域下超差特征量指标的解析表达式, 研究了其与区域极点指标之间的相容性条件; 当上述指标相容时, 利用线性矩阵不等式(LMI), 采用差分进化算法(DE)对待机控制策略进行满意优化求解; 最后通过一个算例验证了所提方法的有效性。

关键词: 待机控制; 超差特征量指标; 差分进化算法; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Opportunity-awaiting control for linear discrete-time systems with constraints on exceeding tolerance characteristic indices

CHEN Yi¹, BO Yu-ming¹, ZOU Wei-jun¹, CHEN Qing-hua²

(1. College of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

2. College of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: Based on the practical situation in target tracking process, an opportunity-awaiting control scheme for a class of linear discrete-time systems with constraints on exceeding tolerance characteristic (ETC) indices is put forward. First, the tracking interruption (control failure) probability is transformed to a set of ETC indices including the residence time, exceeding tolerance time and the random passage period time. Secondly, formulas of the ETC indices on the zonal target area are derived, and the consistency of the circular pole index and ETC indices is analyzed. When the above indices are consistent, a differential evolution (DE) algorithm is employed together with linear matrix inequality(LMI) method to find a satisfactory control strategy. Finally, a numerical example is presented to illustrate the proposed method.

Key words: opportunity-awaiting control; exceeding tolerance characteristic index; differential evolution algorithm; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

实际工程中的控制系统, 常常是一类具有目的域的控制系统, 所谓目的域是指: 雷达跟踪系统中具有针状或扇状的波束、光电跟踪系统中的图像跟踪视窗、空中加油系统的受油漏斗截面等。这类控制系统的特点是, 当且仅当被控量被引入设定的目的域, 才认为满足控制要求, 并可执行预定的控制任务; 否则, 认为控制是无效的。因此, 在设计该类系统的控制策略时, 不仅要满足常规的性能指标要求(如快速性、系统精度、对结构摄动及外扰的鲁棒性等), 还必须考虑被控量对期望区域的滞留和随机穿越特性。国内外已有一些学者对此展开了研究, 文献[1, 2]分别讨论了力场系统和机械系统环境下滞留时间的统计特性和求解问题, 但未涉及控制问题; 文献[3]针对Hamiltonian系统在白噪声作用下的最优滞留时间控制问题进行了研究, 文献[4, 5]给出了最优滞留时

间控制问题的对称解, 并考虑了随机混杂系统最优滞留时间的控制问题, 但上述文献中的目标函数仅仅是要求被控量在目的域内的滞留时间均值尽可能大, 因而还是属于单指标的优化课题, 且当被控量对目的域出现穿越时, 无法进行求解。

满意控制^[6]认为, 实际控制过程中追求的不应是满足某种单一指标的唯一最优或次优解, 而是多个性能指标相容区域内尽可能大的控制策略解集。文献[7]依据这一思想, 将滞留时间、待机时间和随机穿越周期等待机性能指标纳入满意控制的目标函数集中, 首次提出了待机控制的概念和基本命题, 为随机控制与估计问题的研究开创出一个崭新的方向; 文献[8, 9]分别讨论了二维矩形和椭圆形目的域下的待机控制问题, 分析了期望指标集的相容性, 并给出了反馈控制策略的求取方法; 文献[10]基于边界穿越定理, 研究了待机特征量指标约束下的满意PID控

制问题。随着满意待机控制理论研究的深入，需要将越来越多实用且能充分表征实际系统性能的指标纳入期望指标集，此时若仍然沿用以上文献中常见的矩阵分解-广义逆以及线性矩阵不等式(LMI)方法求解将会遇到很大困难，因此探寻有效求取满意控制策略的方法也十分必要。

本文在现有待机控制理论研究成果的基础上，深入考虑一类跟踪系统中出现的实际情形：以光电图像跟踪系统为例，一旦目标进入跟踪视窗(目的域)内，即可通过图像取差器获取目标相对于光轴的高低和方位角，从而确定目标坐标；而目标一旦离开跟踪视窗，就意味着目标的丢失。此时，若目标重新进入跟踪视窗的等待时间不长，则可以用外推值替补丢失的目标信息以维持跟踪，谓之跟踪过程的有效恢复，否则即为跟踪失败。因此，本文以降低跟踪中断(控制失败)概率为出发点，首次将一组以超差特征量指标集描述的、基于超差时间和频率的概率特征量纳入离散系统待机指标集中进行研究，进一步丰富了满意待机控制问题的内涵。

2 超差特征量指标的相关概念(Concepts of the exceeding tolerance characteristic indices)

首先简单回顾待机控制中的有关术语^[7]，在此基础上引出超差特征量指标的基本概念。

设 $\{Z(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ 是采样间隔为 T 的离散随机序列， $\Omega(k)$ 为与 $Z(k)$ 同维的目的域。

定义1 若 $Z(k) \in \Omega(k)$ ，则称 $Z(k)$ 为滞留(非超差)状态；反之，若 $Z(k) \notin \Omega(k)$ ，称 $Z(k)$ 为超差(漏检)状态。假使 $Z(k)$ 为控制系统的误差序列，由于目的域 $\Omega(k)$ 的存在，将使得控制任务成功与失败的时机交替出现。以一维随机序列为例，其对水平直线带 $\Omega = [a_d \ a_u]$ 的穿越过程如图1所示。

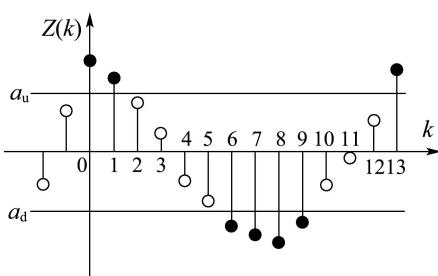


图1 一维随机序列对目的域的穿越过程

Fig. 1 Random passage process on zonal target area

为便于叙述，记滞留状态为“0”、超差状态为“1”，作示性函数：

$$\Psi(k) = \begin{cases} 0, & Z(k) \in \Omega(k), \\ 1, & Z(k) \notin \Omega(k). \end{cases} \quad (1)$$

定义2 若 $\Psi(k) = 1$ 且 $\Psi(k+1) = 0$ ，称 k 时刻为负穿越时刻；而若 $\Psi(k) = 0$ 且 $\Psi(k+1) = 1$ ，则称 k 时刻为正穿越时刻。

定义3 正穿越时刻与下一个负穿越时刻之间的时间间隔为超差时间，记为 T_{out} ；负穿越时刻与下一个正穿越时刻之间的时间间隔为非超差时间，又称滞留时间，记为 T_{in} 。

定义4 相邻的超差时间与滞留时间组成一个随机穿越周期，记为 T_{ch} ，显然 $T_{ch} = T_{out} + T_{in}$ 。

对于一个样本函数，所有的 T_{in} 、 T_{out} 和 T_{ch} 构成了滞留时间序列 $\{T_{in,i}\}$ 、超差时间序列 $\{T_{out,i}\}$ 以及穿越周期序列 $\{T_{ch,i}\}$ ， $i = 1, 2, \dots$ 。显然，它们均为离散随机变量序列，统称为离散随机穿越序列。

以 $N_{ad}T$ 表示系统的允许超差时间。对于实际跟踪系统而言，一旦出现超差，一般可以由一段时间的有效外推维持跟踪；而只有当 $T_{out} > N_{ad}T$ 时，才认为跟踪中断(控制失败)。因此，跟踪中断概率 $P\{T_{out} > N_{ad}T\}$ 是跟踪系统中的一项关键性指标，其可以转化为一组超差特征量指标的约束：

$$\begin{cases} P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\} > P_{ch,ad}, \\ P\{T_{out} \leq N_{ad}T \mid T_{ch} > N_{ad}T\} > P_{out,ad}. \end{cases} \quad (2)$$

式中： $P_{ch,ad}$ 、 $P_{out,ad}$ 为满足系统设计指标要求的允许概率值。上式的直观意义在于：被控对象的随机穿越周期 T_{ch} 以满足系统设计指标要求的概率值小于 $N_{ad}T$ ；当此条件不被满足时，要求超差时间 T_{out} 小于 $N_{ad}T$ 的概率值达到系统设计要求指标。满足此要求的控制系统，即使出现超差，也能通过有效的外推技术使跟踪过程以满足系统设计指标要求的概率得到有效恢复，从而降低了跟踪中断概率，改善了控制品质。

3 待机控制问题的描述(Descriptions of the opportunity-awaiting control problem)

跟踪系统往往由一个两自由度(方位和高低)旋转平台构成，通常情况下，方位与高低控制系统是解耦的。由于系统的稳定性和结构特征与输入信号无关，因此对给定运动的跟踪问题和调节问题总是可以用统一的方法来研究，现不失一般性，考虑其中一个解耦子系统的调节问题：

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bu(k) + Dw(k), \\ x(k) = (1, 0, 0, \dots, 0)X(k) = C_1X(k), \\ x(k-1) = (0, 1, 0, \dots, 0)X(k) = C_2X(k). \end{cases} \quad (3)$$

式中： $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ， $D \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 为已知常数阵， $w(k)$ 为零均值单位白噪声序列，其强度 $W > 0$ 。为便于推导，此处已将系统的状态变量规范为

$$X(k) = [x(k) \ x(k-1) \ \dots \ x(k-n+1)]^T.$$

假设 (A, B) 可稳, (A, D) 可扰。对于线性定常系统而言, 常常通过把极点配置在某个特定的区域内, 从而确保闭环系统具有期望的暂态性能。因此, 本文待机控制的设计目的是求取状态反馈控制律:

$$u(k) = GX(k), G \in \varphi, \quad (4)$$

使得闭环系统

$$X(k+1) = (A + BG)X(k) + Dw(k) \quad (5)$$

同时满足如下性能指标:

- 1) 闭环系统极点 $\Lambda(A_c) \subset F(q, r)$;
- 2) $P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\} > P_{ch, ad}$;
- 3) $P\{T_{out} \leq N_{ad}T \mid T_{ch} > N_{ad}T\} > P_{out, ad}$.

其中: φ 为给定的有界矩阵集, 通常由控制器件的物理特性确定; $A_c = A + BG$; $F(q, r)$ 表示复平面上单位圆内中心在 $q + j0$ 、半径为 r 的圆盘($0 \leq |q| + r < 1$)。

定义 5 给定圆盘 $F(q, r)$ 以及允许超差时间 $N_{ad}T$, 若存在反馈增益阵 $G \in \varphi$, 使得性能指标1)~3)同时满足, 则称超差特征量指标集与圆形极点区域指标 $F(q, r)$ 相对于系统(5)是相容的, 简称超差特征量指标与极点指标相容。

4 主要结果(Main results)

设 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为各态历经、零均值、相邻两点间相关系数为 r_x 、方差为 σ_x^2 的正态随机序列, 由其分布的平稳不变性可知: 在任意采样瞬时, $x(k)$ 在目的域内外的概率是保持不变的, 即

$$\begin{cases} P\{x(k) \in \Omega\} = \alpha_0 = \int_{x(k) \in \Omega} f[x(k)]dx(k), \\ P\{x(k) \notin \Omega\} = \alpha_1 = \int_{x(k) \notin \Omega} f[x(k)]dx(k). \end{cases} \quad (6)$$

其中 $f[x(k)]$ 为 $x(k)$ 的概率密度函数:

$$f[x(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{x^2(k)}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (7)$$

从宏观上看, $x(k)$ 在任意时刻位于目的域内外的概率是不变的; 但在微观上, 每个采样瞬时 $x(k)$ 均会在不同区域间发生转移。

定义 6 由 k 时刻到 $k+1$ 时刻, $x(k)$ 在目的域内外的概率转移系数为^[11]

$$P\{x(k+1) \in \Omega \mid x(k) \in \Omega\} = P_{00}[x(k)], \quad (8a)$$

$$P\{x(k+1) \notin \Omega \mid x(k) \in \Omega\} = P_{01}[x(k)], \quad (8b)$$

$$P\{x(k+1) \in \Omega \mid x(k) \notin \Omega\} = P_{10}[x(k)], \quad (8c)$$

$$P\{x(k+1) \notin \Omega \mid x(k) \notin \Omega\} = P_{11}[x(k)]. \quad (8d)$$

若记 $x(k)$ 的条件概率密度函数为

$$f[x(k+1) \mid x(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - r_x^2)\sigma_x}} \exp\left\{-\frac{[x(k+1) - r_x x(k)]^2}{2\sigma_x^2(1 - r_x^2)}\right\}. \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)中细心推导, 不难得出带状目的域 $\Omega = [a_d \ a_u]$ 下4个概率转移系数的表达式:

$$\begin{aligned} P_{00}(x) = & \frac{1}{\alpha_0} \int_{a_d}^{a_u} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} [\Phi(\frac{a_u - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x}) - \\ & \Phi(\frac{a_d - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x})] \exp\left[-\frac{x^2(k)}{2\sigma_x^2}\right] dx(k), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P_{01}(x) = & \frac{1}{\alpha_0} \int_{a_d}^{a_u} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} [1 + \Phi(\frac{a_d - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x}) - \\ & \Phi(\frac{a_u - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x})] \exp\left[-\frac{x^2(k)}{2\sigma_x^2}\right] dx(k), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_{10}(x) = & \frac{1}{\alpha_1} \left\{ \int_{-\infty}^{a_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} [\Phi(\frac{a_u - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x}) - \right. \\ & \left. \Phi(\frac{a_d - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x})] \exp\left[-\frac{x^2(k)}{2\sigma_x^2}\right] dx(k) + \right. \\ & \left. \int_{a_u}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} [\Phi(\frac{a_u - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x}) - \right. \\ & \left. \Phi(\frac{a_d - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x})] \exp\left[-\frac{x^2(k)}{2\sigma_x^2}\right] dx(k) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_{11}(x) = & \frac{1}{\alpha_1} \left\{ \int_{-\infty}^{a_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} [1 + \Phi(\frac{a_d - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x}) - \right. \\ & \left. \Phi(\frac{a_u - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x})] \exp\left[-\frac{x^2(k)}{2\sigma_x^2}\right] dx(k) + \right. \\ & \left. \int_{a_u}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} [1 + \Phi(\frac{a_d - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x}) - \right. \\ & \left. \Phi(\frac{a_u - r_x x(k)}{\sqrt{1 - r_x^2}\sigma_x})] \exp\left[-\frac{x^2(k)}{2\sigma_x^2}\right] dx(k) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx$.

显然,

$$P_{00}(x) + P_{01}(x) = 1,$$

$$P_{10}(x) + P_{11}(x) = 1,$$

$$\alpha_0 P_{01}(x) = \alpha_1 P_{10}(x).$$

引理 1 超差时间 T_{out} 、滞留时间 T_{in} 和随机穿越周期 T_{ch} 分别服从以下分布^[11]:

$$P\{T_{out} = mT\} = P_{10}(x)P_{11}^{m-1}(x), \quad (14)$$

$$P\{T_{in} = mT\} = P_{01}(x)P_{00}^{m-1}(x), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} P\{T_{ch} = nT\} = \\ \frac{P_{10}(x)P_{01}(x)}{P_{00}(x) - P_{11}(x)} \cdot [P_{00}^{n-1}(x) - P_{11}^{n-1}(x)], \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $m \geq 1, n \geq 2$.

定理1 对于给定的允许超差时间 $N_{ad}T$, 超差特征量指标集的解析表达式分别为

$$\begin{aligned} P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\} = \\ \frac{P_{10}(x)P_{01}(x)}{P_{00}(x) - P_{11}(x)} \{[1 - P_{00}^{N_{ad}-1}(x)] \frac{P_{00}(x)}{P_{01}(x)} - \\ [1 - P_{11}^{N_{ad}-1}(x)] \frac{P_{11}(x)}{P_{10}(x)}\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} P\{T_{out} \leq N_{ad}T | T_{ch} > N_{ad}T\} = \\ 1 - \frac{P_{11}^{N_{ad}}(x)}{1 - P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\}}. \end{aligned} \quad (18)$$

证 将超差时间的分布式(14)对 $m = 1$ 到 $m = N_{ad}$ 求和, 即

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_{ad}} P\{T_{out} = mT\} = P\{T_{out} \leq N_{ad}T\} = \\ P_{10}(x) \frac{1 - P_{11}^{N_{ad}}(x)}{1 - P_{11}(x)} = 1 - P_{11}^{N_{ad}}(x). \end{aligned} \quad (19)$$

同理, 对随机穿越周期分布由 $n = 2$ 到 $n = N_{ad}$ 求和, 可得式(17).

再由式(2)有

$$\begin{aligned} P\{T_{out} \leq N_{ad}T | T_{ch} > N_{ad}T\} = \\ \frac{P\{T_{out} \leq N_{ad}T\} - P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\}}{1 - P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\}}, \end{aligned} \quad (20)$$

代入式(17)和式(19), 即可得到式(18). 证毕.

显然, 对于固定目的域边界 $\Omega = [a_d \ a_u]$ 的平稳正态过程 $x(k)$ 而言, 式(17)(18)的值可由常数 σ_x, r_x 唯一确定.

定理2 闭环系统(5)存在反馈增益阵 $G \in \varphi$ 使得性能约束1)~3)同时满足, 当且仅当存在正定矩阵 Q, P , 使得不等式(21)~(23)及等式(24)成立:

$$P_{ch,ad} - P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\} < 0, \quad (21)$$

$$P_{out,ad} - P\{T_{out} \leq N_{ad}T | T_{ch} > N_{ad}T\} < 0, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & A_c Q - qQ \\ Q A_c^T - qQ & -rQ \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$$A_c P A_c^T + DWD^T = P. \quad (24)$$

其中: $\sigma_x^2 = C_1 P C_1^T, r_x = C_1 P C_2^T \cdot \sigma_x^{-2}$.

证 由文献[12], 闭环系统(5)满足性能指标1)的充分必要条件是不等式(23)成立; 再依据离散Lyapunov稳定性理论及定理1不难得出上述定理的剩余结论. 证毕.

可以看出, 对于任意给定的反馈增益阵 $G \in \varphi$,

不等式(23)退化为LMI, 但其未必有正定解 Q . 为此, 引入松弛变量^[13] t , 并记 η 为闭环系统(5)渐近稳定时反馈增益阵 G 的取值范围.

定理3 存在反馈增益阵 $G \in \varphi \cap \eta$, 使得闭环系统(5)同时满足性能指标1)~3)的充分必要条件是约束优化问题(25)~(27)存在可行解 $Q > 0$ 及 $t^*(G) < 0$:

$$t^*(G) = \min t,$$

s.t.

$$P_{ch,ad} - P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\} < t, \quad (25)$$

$$P_{out,ad} - P\{T_{out} \leq N_{ad}T | T_{ch} > N_{ad}T\} < t, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & A_c Q - qQ \\ Q A_c^T - qQ & -rQ \end{bmatrix} < tI. \quad (27)$$

证 充分性显然成立, 再证必要性. 假设存在状态反馈 $G^* \in \varphi \cap \eta$ 使得性能约束1)~3)同时满足, 由定理2可知对于任取的 $t_0 < 0$, 存在充分小的正数 λ , 使得

$$P_{ch,ad} - P\{T_{ch} \leq N_{ad}T\} - \lambda t_0 < 0,$$

$$P_{out,ad} - P\{T_{out} \leq N_{ad}T | T_{ch} > N_{ad}T\} - \lambda t_0 < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & A_c^* Q - qQ \\ Q A_c^{*T} - qQ & -rQ \end{bmatrix} - \lambda t_0 I < 0$$

存在正定解 Q , 其中 $A_c^* = A + BG^*$. 因此, $(\lambda t_0, G^*, Q)$ 是约束优化问题(25)~(27)的一个可行解, 显然有 $t^*(G) \leq \lambda t_0 < 0$. 证毕.

推论1 闭环系统(5)存在反馈增益阵 $G \in \varphi \cap \eta$ 使得性能指标1)~3)同时满足, 其充分必要条件是下确界 $\bar{t} = \inf_{G \in \varphi \cap \eta} t^*(G) < 0$.

显然, 上述推论中的优化问题是非凸的, 很难用单一的LMI方法求解. 随机搜索算法(包括遗传算法、模拟退火算法等)因其具有的较强全局搜索能力和收敛速度, 成为处理该类问题的一种有效解法, 本文结合差分进化算法(DE)^[14]和内点法对优化问题(25)~(27)进行求解, 具体步骤如下:

Step 1 令 $j = 0$, 在 $\varphi \cap \eta$ 内随机初始化种群 $G_p^j = [G_1^j \ G_2^j \ \dots \ G_{N_p}^j]$, N_p 为种群规模; 种群个体 $G_i^j = [G_{i,1}^j \ G_{i,2}^j \ \dots \ G_{i,n_d}^j]$ 用于描述优化变量 G , n_d 为 G 的维数;

Step 2 对 j 时刻的每一个个体 G_i^j , 计算函数值 $t^*(G_i^j)$. 此时, 不等式(25)~(27)退化为一组LMI, 可以应用成熟的内点法(如MATLAB中LMI工具箱的 mincx 函数)进行求解.

若 $t^*(G_i^j) < 0$ 或 $j > j_{max}$ (j_{max} 为最大进化代数), 结束迭代, 且若 $t^*(G_i^j) < 0$ 则此时 G_i^j 是一个使闭环系统(5)同时满足性能指标1)~3)的状态反馈增益; 否

则, 转Step 3;

Step 3 依据式(28)产生变异个体:

$$V_i^{j+1} = G_{r_1}^j + F(G_{r_2}^j - G_{r_3}^j). \quad (28)$$

式中: $r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, \dots, N_p\}$ 是随机选择的3个互不相同的整数, 且与 i 不同; F 为比例因子, 经验取值范围为 $[0.4, 1]$, 此处为改善DE算法的鲁棒性和有效性, 取 $F = a + b \cdot \text{rand}(0, 1)^{[15]}$, 其中 $\text{rand}(0, 1)$ 表示 $[0, 1]$ 之间均匀分布的随机数, a, b 是大于零的实数, 且 $a + b < 1$;

Step 4 利用式(29)对父代个体 G_i^j 和变异个体 V_i^{j+1} 进行交叉, 生成实验个体 U_i^{j+1} :

$$U_{i,k}^{j+1} = \begin{cases} V_{i,k}^{j+1}, & \text{rand}(0, 1) \leq Cr \text{ 或 } k = r(i), \\ G_{i,k}^j, & \text{其他.} \end{cases} \quad (29)$$

其中: $r(i) \in \{1, 2, \dots, n_d\}$ 为随机选择的整数, 以保证子代与父代个体至少有一个分量不相同; $Cr \in [0, 1]$ 是交叉概率;

Step 5 若新生成的实验个体 $U_i^{j+1} \notin \varphi \cap \eta$, 转 Step 3; 否则, 采用“贪婪”选择机制:

$$G_i^{j+1} = \begin{cases} U_i^{j+1}, & t^*(U_i^{j+1}) < t^*(G_i^j), \\ G_i^j, & \text{其他.} \end{cases} \quad (30)$$

即如果实验个体优于父代, 则其将被选择, 并成为下一代种群中的个体 G_i^{j+1} , 再令 $j = j + 1$ 转 Step 2.

5 算例(Numerical example)

取系统(3)中的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 & 1.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.6 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

噪声强度 $W = 1$, 系统采样间隔 $T = 0.2$ s, 目的域 $\Omega = [-2, 2]$, 允许超差时间 $N_{\text{ad}}T = 0.8$ s, 有界反馈增益集 $\varphi = \{G \in \mathbb{R}^{1 \times 3} : |G(i)| \leq 100\}$. 需要求取状态反馈阵 $G \in \varphi$, 使得闭环系统(5)满足如下性能指标约束:

- 1) 闭环极点分布于圆盘 $F(0.2, 0.5)$ 内;
- 2) 超差特征量期望值 $P_{\text{ch,ad}} = 0.5$;
- 3) $P_{\text{out,ad}} = 0.5$.

在进行DE优化计算时, 选取初始种群规模 $N_p = 15$; 交叉概率 $Cr = 0.4$; 比例因子 $F = 0.4 + 0.3\text{rand}(0, 1)$, 经由12代进化后, 得到一个满意的状态反馈增益阵 $G = [-0.0777 \ 0.3607 \ -0.6237]$; 此时相应的函数值 $t^*(G) = -0.0567$; 闭环极点位于 $[0.1046 \ 0.2690 \pm 0.1662j]$. 通过式(6)及式(24)可得, 系统输出方差 $\sigma_x^2 = 12.4289$, 相邻两点间相关系数 $r_x = 0.5157$, 任一瞬时 $x(k)$ 滞留概率与超差概率

的理论值分别为 $\alpha_0 = 0.4295, \alpha_1 = 0.5705$. 因此, 由定理1不难计算, 超差特征量的理论值 $P\{T_{\text{ch}} \leq N_{\text{ad}}T\} = 0.6008, P\{T_{\text{out}} \leq N_{\text{ad}}T \mid T_{\text{ch}} > N_{\text{ad}}T\} = 0.6490$.

依据上述仿真条件, 单位白噪声输入下闭环系统的响应曲线如图2所示.

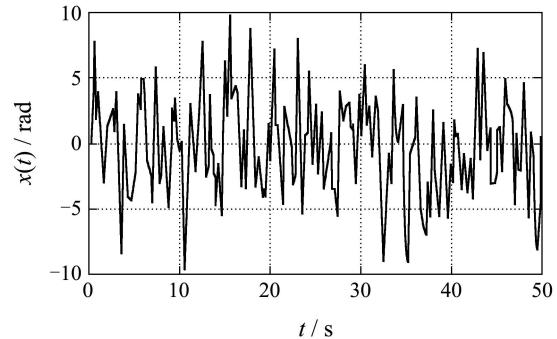


图2 单位白噪声输入下的系统响应

Fig. 2 System response in case of white noise

若将图2中生成的 $\{x(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ 作为随机样本, 则可计算出样本的统计特征量, 其中: 系统输出方差 $\hat{\sigma}_x^2 = 13.2854$; 相邻两点间相关系数 $\hat{r}_x = 0.5137$; 滞留概率与超差概率 $\hat{\alpha}_0 = 0.4168, \hat{\alpha}_1 = 0.5832$; 超差特征量指标的统计实测值分别为 $\hat{P}\{T_{\text{ch}} \leq N_{\text{ad}}T\} = 0.5996, \hat{P}\{T_{\text{out}} \leq N_{\text{ad}}T \mid T_{\text{ch}} > N_{\text{ad}}T\} = 0.6272$. 通过与理论分析结果的比对可知, 两者基本一致, 均满足闭环系统对超差特征量指标的约束, 充分验证了所提方法的有效性.

6 结论(Conclusions)

本文首次将一组包含超差特征量的待机性能指标纳入到离散系统满意控制的目标函数集中进行研究, 推导了带状目的域下超差特征量指标的数学表达式, 并分析了其与极点区域指标的相容性问题; 通过将DE与LMI方法相结合设计了一种混合算法, 用以对状态反馈增益进行有效求解, 数值算例表明了文中方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] BARKAIL E. Residence time statistics for normal and fractional diffusion in a force field[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2006, 123(4): 883 – 907.
- [2] KOVALEVA A. Solution of the exit time problem for mechanical systems with fast noise[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2006, 21(4): 300 – 304.
- [3] DUNYAK J P, FREIDLIN M I. Optimal residence time control of Hamiltonian systems perturbed by white noise[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, 36(1): 233 – 252.
- [4] HU J H. Symmetry of solutions to the optimal sojourn time control problem[C] //Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. Seville, Spain: IEEE Computer Society Press, 2005: 7320 – 7325.

- [5] RAFFARD R L, HU J H, TOMLIN C J. Adjoint-based optimal control of the expected exit time for stochastic hybrid systems[C] //Proceedings of the 8th International Workshop, Hybrid Systems: Computation and Control. Zurich, Switzerland: Springer, 2005: 557 – 572.
- [6] GUO Z. A survey of satisfying control and estimation[C] //Proceedings of the 14th IFAC Congress. Beijing: Tsinghua University Press , 1999: 443 – 447.
- [7] GUO Z. Opportunity-awaiting control-one new study field in stochastic control theory[C] //Proceedings of the 4th International Conference on Control and Automation. [S.l.]: [s.n.], 2003: 340 – 344.
- [8] WU Q, GUO Z. Opportunity-awaiting control strategy on rectangular target area[C] //Proceedings of the 8th International Conference on Control, Automation, Robotics, and Vision. [S.l.]: [s.n.], 2004: 1859 – 1862.
- [9] GUO Z, WU Q, BO Y M. Opportunitiy-awaiting control strategy on elliptic objective area[C] //Proceedings of the 6th International Conference on Intelligent System and Control. Honolulu, Hawaii, USA: Acta Press, 2004: 180 – 186.
- [10] 李银伢, 郭治, 王远钢. 随机系统待机控制特征量指标约束下的满意PID控制[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(3): 76 – 84.
(LI Yinya, GUO Zhi, WANG Yuangang. On satisfactory PID control for stochastic systems with opportunity-awaiting control characteristic indices constraint[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2008, 28(3): 76 – 84.)
- [11] WANG J. *The prediction theory of stochastic passage characteristics and its application in gunnery*[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2009.
- [12] 王远钢, 郭治. 反馈控制系统多性能约束指标的相容性[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 423 – 426.
(WANG Yuangang, GUO Zhi. Consistency of multiple performance indices of feedback control systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(3): 423 – 426.)
- [13] 王远钢. 基于BMI方法的扇形极点配置输出反馈控制[J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1192 – 1195.
(WANG Yuangang. BMI-based output feedback control design with sector pole assignment[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(9): 1192 – 1195.)
- [14] STORN R, PRICE K. *Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces*[R]. Berkeley: University of California, 2006.
- [15] KIM, CHONG, PARK, et al. Differential evolution strategy for constrained global optimization and application to practical engineering problems[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2007, 43(4): 1565 – 1568.

作者简介:

陈 益 (1983—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为光电跟踪控制和满意待机控制, E-mail: cy19830408@163.com;

薄煜明 (1965—), 男, 博士, 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为火力控制与计算机通信, E-mail: 13905178063@e172.com;

邹卫军 (1973—), 男, 博士研究生, 助理研究员, 目前研究方向为图像处理与火力控制, E-mail: harry_cat@163.com;

陈清华 (1963—), 男, 副教授, 目前研究方向为计算机网络及分布式计算机控制系统, E-mail: qinghua@mail.njust.edu.cn.