

一类不确定非线性系统的全局鲁棒有限时间镇定

李 鹏, 郑志强, 马建军

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 对一类不确定非线性系统提出了一种连续的全局鲁棒有限时间控制律. 首先, 针对标称系统设计出了一种状态反馈控制律, 应用Lyapunov直接稳定性理论和LaSalle不变性原理证明了闭环标称系统的全局渐近稳定性, 同时具有负的齐次度; 其次, 引入辅助变量和采用有限时间收敛的二阶滑模Super-twisting算法, 设计出了对不确定性和干扰进行抑制的补偿控制项, 并根据有限时间Lyapunov函数给出了补偿控制项参数的取值范围; 最后, 综合得到一种连续的使实际闭环系统有限时间收敛到平衡点的鲁棒镇定控制律. 仿真结果表明了所提控制律的有效性.

关键词: 非线性系统; 有限时间控制; 二阶滑模; 反馈镇定

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Global robust finite time stabilization of a class of nonlinear uncertain systems

LI Peng, ZHENG Zhi-qiang, MA Jian-jun

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

Abstract: A continuous global robust finite time feedback stabilization control law is proposed for a class of uncertain nonlinear systems. Firstly, a state feedback control law is designed for the nominal system. By using Lyapunov direct method and LaSalle invariance principle, we prove that the resulting closed-loop nominal system is globally asymptotically stable with the negative homogeneity in degrees. Secondly, introducing an auxiliary variable, we design a compensated control law for compensating the uncertainties of the system by using the finite-time convergent second-order sliding mode Super-twisting algorithm. The range of the parameters in the compensation control law is determined by using the finite-time Lyapunov function. Finally, a continuous feedback control law is developed for the closed-loop system to converge to its equilibrium point in a finite period of time. Simulation results show the effectiveness of the proposed control law.

Key words: nonlinear system; finite time control; second order sliding mode; feedback stabilization

1 引言(Introduction)

在绝大多数的控制系统设计中, 闭环系统一般均以指数形式收敛, 此时闭环系统不可能在有限的时间内收敛到平衡点. 系统有限时间稳定是指系统满足Lyapunov稳定性且有限时间收敛到平衡点. 从优化的角度来说, 有限时间收敛的控制是时间最优的控制方法, 有限时间收敛的系统往往具有更好的性能^[1]. 因此, 连续有限时间收敛控制器的设计已成为研究的热点之一, 基于微分方程和矢量场齐次性分析, 文献[2]对双积分线性系统给出了状态和动态输出反馈有限时间镇定控制器的设计方法, 文献[3]针对一类高阶非线性系统设计了有限时间控制器, 文献[4]研究了一类非线性系统, 该系统可以看成双积分线性系统的推广, 但没有考虑系统的不确定性, 控制律的设计是针对标称系统进行的. 文献[5]利用滑模控制中幂次趋近律的设计思想, 设计了一种针对

非完整移动机器人的连续状态反馈有限时间跟踪控制算法, 但没有考虑系统受扰动情况, 当系统存在扰动时, 幂次趋近律不能使滑模变量趋于零, 将有稳态跟踪误差的存在. 文献[6]基于系统的齐次性, 针对 n 重积分系统, 提出了一种构造性的连续状态反馈有限时间收敛控制算法. 文献[7]在文献[6]的基础上结合一阶滑模控制, 对不确定的 n 重积分系统, 设计了一种鲁棒的有限时间镇定控制律, 但该控制律含有切换项因而不是不连续的, 容易引起系统的抖振. Levant在其博士论文中提出了高阶滑模(higher order sliding mode, HOSM)的思想^[8], 高阶滑模克服一阶滑模的抖振, 同时保留了一阶滑模的所有优点. 其中一些二阶滑模算法已经成功地应用到实际控制器设计中^[9~14].

本文对于一类不确定非线性系统给出了其连续的鲁棒有限时间镇定的状态反馈控制律设计方法,

首先,针对标称系统基于Lyapunov稳定性理论和向量场齐次分析,设计了连续的状态反馈控制律,使得闭环标称系统是渐近稳定且具有负的齐次度;再引入辅助变量,利用二阶滑模控制中有限时间收敛的Super-twisting算法,设计了补偿控制项对系统不确定性进行补偿,并给出了补偿控制项的参数取值范围.最后,综合得到了一种连续的有限时间反馈镇定控制律.

2 问题描述(Problem statement)

本文研究对象为一类二阶非线性系统,可由下列微分方程描述:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^m, \\ \dot{x}_2 = u + \varphi(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: x_1, x_2 为可观测的状态量, u 为控制输入, $\varphi(t)$ 为未知函数,表示系统的不确定性和外界干扰.对系统(1)作如下假设:

假设 1 $|\dot{\varphi}(t)| \leq \delta$, δ 为正常数.

假设 2 m 为正奇数,显然 $m = 1$ 时,式(1)为双积分线性系统.

控制目标是设计控制律 u , 使得系统(1)能在有限时间内收敛到原点.

3 基于标称系统的有限时间镇定控制律设计(Finite time stabilization control law design based on nominal system)

在基于标称系统设计有限时间镇定控制律之前,先给出一些相关定义和引理.

定义 1 考虑如下非线性系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

其中 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$. 若存在 $(r_1, \dots, r_n)$, $r_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, 对任意 $k > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$f_i(k^{r_1}x_1, \dots, k^{r_n}x_n) = k^{r+r_i}f_i(x), \quad (3)$$

称非线性系统(2)关于扩张 $\Delta_k(x_1, \dots, x_n) = (r_1, \dots, r_n)$ 的齐次度为 $r^{[1]}$.

引理 1 若系统(2)是全局渐近稳定且具有负的齐次度,则系统(2)是全局有限时间稳定的^[1].

系统(1)的标称形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^m, \\ \dot{x}_2 = u_{\text{nom}}. \end{cases} \quad (4)$$

$\text{sgn } x$ 为符号函数,定义如下:

$$\text{sgn } s = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s = 0, \\ -1, & s < 0. \end{cases} \quad (5)$$

注意到 $\text{sgn } x$ 函数满足下列性质:

$$\begin{aligned} |x| \text{sgn } x &= x, \\ \frac{d}{dx} |x|^{\alpha+1} &= (\alpha+1)|x|^\alpha \text{sgn } x. \end{aligned} \quad (6)$$

基于标称系统设计的有限时间镇定控制律由下述定理1给出.

定理 1 对于式(4)所描述的系统,如果控制律为

$$u_{\text{nom}} = -k_1 S(\gamma_1, \rho_1, x_1) - k_2 S(\gamma_2, \rho_2, x_2), \quad (7)$$

式中: $k_1, k_2 > 0$, 函数 $S(\gamma_i, \rho_i, x_i)$ 定义如下:

$$S(\gamma_i, \rho_i, x_i) = \begin{cases} |x_i|^{\gamma_i} \text{sgn } x_i, & |x_i| \leq 1, \\ |x_i|^{\rho_i} \text{sgn } x_i, & |x_i| > 1, \end{cases} \quad (8)$$

其中: $0 < \gamma_2 < 1$, $\gamma_1 = \frac{\gamma_2}{1+m-\gamma_2}$, $\rho_i > 1$, $i = 1, 2$. 则原点是系统(4)一个全局有限时间稳定的平衡点.

证 将控制律(7)代入系统(4),得到如下的闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^m, \\ \dot{x}_2 = -k_1 S(\gamma_1, \rho_1, x_1) - k_2 S(\gamma_2, \rho_2, x_2). \end{cases} \quad (9)$$

考虑备选Lyapunov函数

$$V_1(x_1, x_2) = \frac{|x_2|^{m+1}}{m+1} + \int_0^{x_1} k_1 S(\gamma_1, \rho_1, z) dz. \quad (10)$$

显然 $V_1(x_1, x_2)$ 是正定的,对 V_1 沿式(9)的轨线求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \\ &[k_1 S(\gamma_1, \rho_1, x_1) \quad |x_2|^m \text{sgn } x_2] \cdot \\ &\begin{bmatrix} x_2^m \\ -k_1 S(\gamma_1, \rho_1, x_1) - k_2 S(\gamma_2, \rho_2, x_2) \end{bmatrix} = \\ &[k_1 S(\gamma_1, \rho_1, x_1) \quad x_2^m] \cdot \\ &\begin{bmatrix} x_2^m \\ -k_1 S(\gamma_1, \rho_1, x_1) - k_2 S(\gamma_2, \rho_2, x_2) \end{bmatrix} = \\ &-k_2 S(\gamma_2, \rho_2, x_2) x_2^m \leq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

集合 $\{(x_1, x_2) | \dot{V}_1(x_1, x_2) = 0\}$ 为坐标轴 $x_2 = 0$, 而 $x_2 = 0$ 中的不变集只有原点 $x_1 = x_2 = 0$, 而Lyapunov函数 V_1 满足径向无界条件,由LaSalle不变性原理^[15]可知,系统状态 x_1, x_2 全局渐近收敛到原点 $(0, 0)$, 这就意味着系统的状态将在有限的时间内收敛到区域 $O = \{(x_1, x_2) | |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ 中. 当 $(x_1, x_2) \in O$, 式(9)可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^m, \\ \dot{x}_2 = -k_1 |x_1|^{\gamma_1} \text{sgn } x_1 - k_2 |x_2|^{\gamma_2} \text{sgn } x_2. \end{cases} \quad (12)$$

令向量场

$$f = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_2, x_3))^T,$$

其中:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_2^m, \\ f_2(x_1, x_2) &= -k_1|x_1|^{\gamma_1}\text{sgn } x_1 - k_2|x_2|^{\gamma_2}\text{sgn } x_2. \end{aligned}$$

取齐次扩张 $\Delta_k: (x_1, x_2) \mapsto (kx_1, k^{\frac{1}{1+m-\gamma_2}}x_2)$, 则

$$\begin{aligned} f_1(kx_1, k^{\frac{1}{1+m-\gamma_2}}x_2) &= \\ k^{\frac{m}{1+m-\gamma_2}}x_2^m &= k^{1+\frac{\gamma_2-1}{1+m-\gamma_2}}x_2^m = \\ k^{1+\frac{\gamma_2-1}{1+m-\gamma_2}}f_1(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_2(kx_1, k^{\frac{1}{1+m-\gamma_2}}x_2) &= \\ -k_1|kx_1|^{\gamma_1}\text{sgn } kx_1 - \\ k_2|k^{\frac{1}{1+m-\gamma_2}}x_2|^{\gamma_2}\text{sgn } (k^{\frac{1}{1+m-\gamma_2}}x_2) &= \\ k^{\frac{1}{1+m-\gamma_2}+\frac{\gamma_2-1}{1+m-\gamma_2}}f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (14)$$

因为 $0 < \gamma_2 < 1$, $m \geq 1$, 所以 $\frac{\gamma_2-1}{1+m-\gamma_2} < 0$, 故矢量场 f 关于扩张 $\Delta_k: (x_1, x_2) \mapsto (kx_1, k^{\frac{1}{1+m-\gamma_2}}x_2)$ 具有负的齐次度 $\frac{\gamma_2-1}{1+m-\gamma_2}$. 由引理1可知, 系统(9)能全局有限时间收敛到原点. 证毕.

注1 当 $m = 1$, $(x_1, x_2) \in O$ 时, 定理1和文献[6]中的定理8.1中双积分线性系统的情形是一致的; 当 $k_1 = k_2 = 1$, $(x_1, x_2) \in O$, $m = 1$ 时, 定理1和文献[16]中的推论1是一致的. 而当系统的状态 (x_1, x_2) 远离平衡点时, 由函数 S 的定义可知: 本文设计的控制律比文献[6, 16]中设计的控制律具有更快的收敛速度.

若实际不确定系统(1)采用控制律(7), 由于不确定性的影响, 系统(1)的状态不能镇定到原点, 为此需设计一种鲁棒的有限时间控制律.

4 鲁棒有限时间控制律设计(Robust finite time stabilization control law design)

本文提出的鲁棒有限时间镇定控制律的设计分为两部分:

1) 设计有限时间控制律 u_{nom} 保证标称系统有限时间镇定到原点.

2) 基于二阶滑模控制的Super-twisting算法, 设计补偿控制项 u_{sosmc} 对实际系统的扰动进行抑制, 保证不确定系统在有限时间镇定到原点.

为了在有限时间内镇定不确定系统(1), 引入辅助变量, 设计如下控制律:

$$\begin{cases} u = u_{\text{nom}} + u_{\text{sosmc}}, \\ \dot{x}_{\text{aux}} = -u_{\text{nom}}. \end{cases} \quad (15)$$

式中: x_{aux} 为辅助变量, 它将用来设计二阶滑模变量 s ; 而滑模变量将用来设计补偿控制项 u_{sosmc} , u_{nom} 表达式如(7)所示. 定义滑模变量如下:

$$s = x_2 + x_{\text{aux}}, \quad (16)$$

上式沿系统(1)的轨线对时间 t 求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}_2 + \dot{x}_{\text{aux}} = \\ u + \varphi(t) - u_{\text{nom}} &= \\ u_{\text{nom}} + u_{\text{sosmc}} + \varphi(t) - u_{\text{nom}} &= \\ \varphi(t) + u_{\text{sosmc}}. \end{aligned} \quad (17)$$

式中补偿控制律 u_{sosmc} 的设计目标是使得在有干扰 $\varphi(t)$ 存在时, 滑模变量 s 在有限时间内收敛到0. 利用二阶滑模控制中的Super-twisting算法, u_{sosmc} 可设计为如下形式:

$$u_{\text{sosmc}} = -|s|^{\frac{1}{2}}\text{sgn } s - \alpha \int_0^t \text{sgn } s d\tau, \quad (18)$$

式中 λ, α 为正常数, 显然 u_{sosmc} 是连续的.

定理2 考虑系统(1), 若控制律为

$$u = u_{\text{nom}} + u_{\text{sosmc}}, \quad (19)$$

式中 $u_{\text{nom}}, u_{\text{sosmc}}$ 分别由式(7)和(16)定义. 若

$$\begin{cases} \lambda > 2, \\ \alpha > \frac{\lambda^3 + \delta^2(4\lambda - 8)}{\lambda(4\lambda - 8)}, \end{cases} \quad (20)$$

则系统(1)的状态可以在有限时间内镇定到原点.

证 将式(18)代入式(17)中, 可得滑模变量 s 的动态特性如下:

$$\dot{s} + |s|^{\frac{1}{2}}\text{sgn } s + \alpha \int_0^t \text{sgn } s d\tau = \varphi. \quad (21)$$

采用状态变换

$$y = \varphi - \alpha \int_0^t \text{sgn } s d\tau, \quad (22)$$

式(21)可以写成以下形式:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\lambda |s|^{\frac{1}{2}}\text{sgn } s + y, \\ \dot{y} = -\alpha \text{sgn } s + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (23)$$

考虑二次型函数 $V(s, y)$ 为备选Lyapunov函数:

$$V(s, y) = \eta^T P \eta, \quad (24)$$

式中:

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4\alpha + \lambda^2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix}, \quad \eta^T = [|s|^{\frac{1}{2}}\text{sgn } s, y].$$

$V(s, y)$ 是连续正定函数, 且径向无界. 除了集合 $\{s=0\}$ 外, $V(s, y)$ 是处处可导的, 而在系统没有收敛到原点时, 系统状态是不会停留在集合 $\{s=0\}$ 上, 故可以应用链式法则求取 $\dot{V}$, 令

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{2} \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \\ B &= [0 \quad 1]^T, \quad \tilde{\varphi} = |s|^{\frac{1}{2}}\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

利用 $\frac{d|s|}{dt} = \dot{s} \operatorname{sgn} s$, 有

$$\dot{\eta} = \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} (A\eta + B\tilde{\varphi}). \quad (25)$$

对 $V(s, y)$ 沿式(21)求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, y) &= \dot{\eta}^T P \eta + \eta^T P \dot{\eta} = \\ &= \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} (\eta^T A^T + \tilde{\varphi} B^T) P \eta + \\ &= \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} \eta^T P (A\eta + B\tilde{\varphi}) \leq \\ &= \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} (\eta^T A^T P \eta + \tilde{\varphi} B^T P \eta + \eta^T P A \eta + \\ &= \eta^T P B \tilde{\varphi} + \delta^2 |s| - \tilde{\varphi}^2) = \\ &= \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} (\eta^T A^T P \eta + \tilde{\varphi} B^T P \eta + \eta^T P A \eta + \\ &= \eta^T P B \tilde{\varphi} + \delta^2 \eta^T C^T C \eta - \tilde{\varphi}^2) = \\ &= \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} (\eta^T A^T P \eta + \eta^T P A \eta + \delta^2 \eta^T C^T C \eta + \\ &= \tilde{\varphi} B^T P \eta + \eta^T P B \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}^2) \leq \\ &= \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} (\eta^T A^T P \eta + \eta^T P A \eta + \delta^2 \eta^T C^T C \eta + \\ &= \eta^T P B B^T P \eta) = \\ &= \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} \eta^T (A^T P + P A + \delta^2 C^T C + P B B^T P) \eta. \end{aligned} \quad (26)$$

令

$$Q = -(A^T P + P A + \delta^2 C^T C + P B B^T P),$$

有

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} \eta^T Q \eta, \quad (27)$$

将 A, B, C, P 代入得

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda\alpha + \frac{\lambda^3}{2} - \delta^2 - \frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \\ \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda}{2} - 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

若

$$\begin{cases} \lambda > 2, \\ \alpha > \frac{\lambda^3 + \delta^2(4\lambda - 8)}{\lambda(4\lambda - 8)}, \end{cases} \quad (29)$$

则 Q 为正定对称矩阵, 即 $Q > 0$. 因为 $V(s, y) = \eta^T P \eta$ 是二次正定函数, 有

$$\lambda_{\min}(P) \|\eta\|_2^2 \leq \eta^T P \eta \leq \lambda_{\max}(P) \|\eta\|_2^2. \quad (30)$$

式中: $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别表示矩阵 P 的最小和最大特征值, $\|\cdot\|_2$ 表示欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 上的2-范数, $\|\eta\|_2^2 = |s| + y^2$, 进一步可以得出

$$|s|^{\frac{1}{2}} \leq \|\eta\|_2 \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P)}. \quad (31)$$

由式(27)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} \eta^T Q \eta \leq -\frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min}(Q) \|\eta\|_2^2 \leq \\ &= -\frac{\|\eta\|_2}{|s|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min}(Q) \|\eta\|_2 \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\eta\|_2. \end{aligned} \quad (32)$$

而由式(30)有

$$\frac{V^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(P)} \leq \|\eta\|_2. \quad (33)$$

由式(32)(33)可得

$$\dot{V} \leq -\gamma(Q, P) V^{\frac{1}{2}}, \quad (34)$$

式中: $\gamma(Q, P) = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(P)}$. 由比较原理^[15]可得: 当 t 满足 $t \geq T = \frac{2}{\gamma(Q, P)} V^{\frac{1}{2}}(s_0, y_0)$ 时 $V = 0$, 所以系统(23)的状态能在有限时间 T 内收敛到原点, 此时有 $s = \dot{s} = 0$, 即进入二阶滑动模态, 此时 u_{sosmc} 的等效控制记为 $u_{\text{sosmc}}^{\text{eq}}$, 由等效控制的定义^[17], 令式(17)等于0, 可以求得 $u_{\text{sosmc}}^{\text{eq}} = -\varphi(t)$. 将 $u = u_{\text{nom}} + u_{\text{sosmc}}^{\text{eq}}$ 代入式(1), 可以得到二阶滑动模态时的等效闭环动态特性和标称系统(4)是一致的. 而又因为 u_{nom} 是依据定理1设计的, 因此系统(1)的状态可以在有限时间内镇定到原点. 证毕.

5 仿真算例(Simulation example)

考虑系统(1)中 $m = 3$ 的情况, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3, \\ \dot{x}_2 = u + \sin x_1 + 5 \cos(10t). \end{cases} \quad (35)$$

设不确定项 $\varphi = \sin x_1 + 5 \cos(10t)$, 初始值为 $x_1(0) = 5, x_2(0) = -10$. 分别对3种控制律进行仿真:

控制律1 不考虑系统的不确定性按标称系统设计的控制律, $u = -k_1 S(\gamma_1, \rho_1, x_1) - k_2 S(\gamma_2, \rho_2, x_2)$. 选取参数 $0 < \gamma_2 = 2/3 < 1, \gamma_1 = 1/5, \rho_1 = \rho_2 = 2, k_1 = 5, k_2 = 4$, 仿真结果如图1, 2所示.

控制律2 考虑系统的不确定性设计的控制律, $u = -k_1 S(\gamma_1, \rho_1, x_1) - k_2 S(\gamma_2, \rho_2, x_2)$. 参数 $\gamma_1, \gamma_2, \rho_1, \rho_2, k_1$ 和 k_2 的取值与控制律1中的相同. 补偿控制项 u_{fosmc} 基于一阶滑模进行设计, $u_{\text{fosmc}} = -18 \operatorname{sgn} s$, 滑模变量 s 由式(16)定义. 仿真结果如图3, 4所示.

控制律3 考虑系统的不确定性设计的控制律, 其中 u_{nom} 的设计与控制律2相同, 补偿控制项 u_{sosmc} 采用本文中的方法, 取 $\delta = 60$, 按照式(20)取 $\lambda = 30, \alpha = 130$, 则

$$u_{\text{sosmc}} = -30|s|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} s - 130 \int_0^t \operatorname{sgn} s d\tau,$$

滑模变量 s 由式(16)定义. 仿真结果如图5, 6所示.

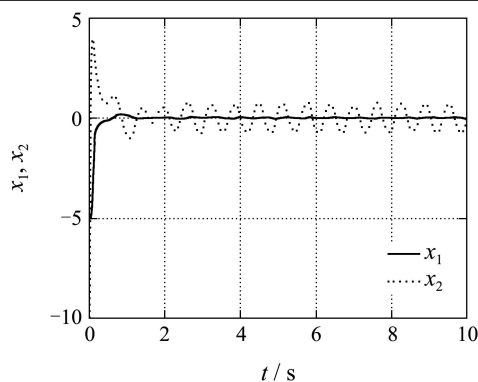


图1 状态响应曲线(控制律1)

Fig. 1 Response curves of states(control law 1)

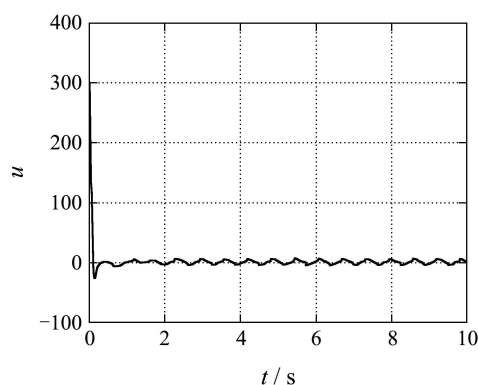


图2 控制律1曲线

Fig. 2 Curves of control law 1

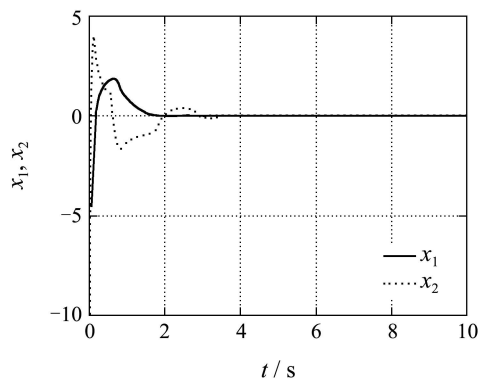


图3 状态响应曲线(控制律2)

Fig. 3 Response curves of states (control law 2)

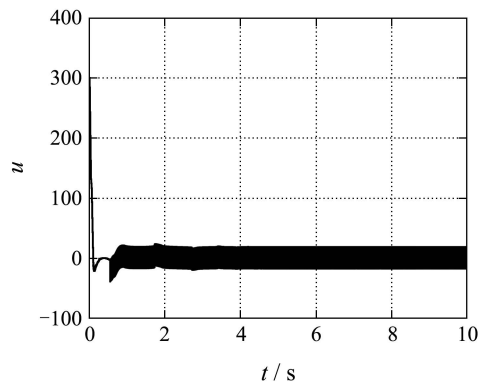


图4 控制律2曲线

Fig. 4 Curves of control law 2

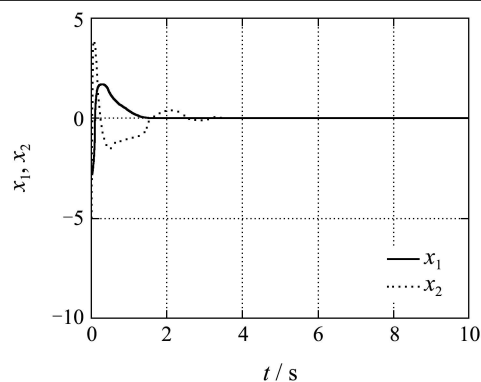


图5 状态响应曲线(控制律3)

Fig. 5 Response curves of states(control law 3)

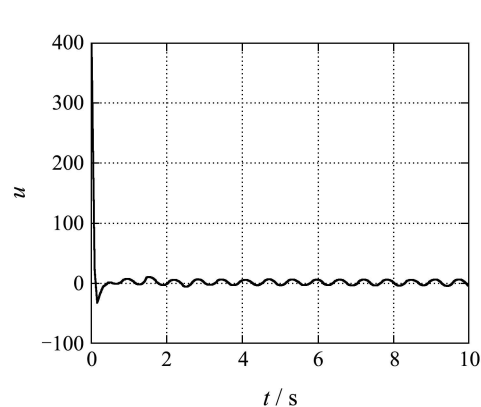


图6 控制律3曲线

Fig. 6 Curves of control law 3

从图1~6可见: 系统具有不确定性时, 控制律1不能使系统状态镇定; 控制律2虽然能实现系统状态有限时间镇定, 但是由于含有不连续项, 控制输入有高频抖振; 控制律3能实现系统状态的有限时间镇定, 而且控制输入是连续的.

6 结论(Conclusion)

本文考虑了一类不确定非线性系统的全局有限时间反馈镇定问题. 利用系统的齐次性和有限时间收敛Super-twisting算法给出了一种构造性的设计方法, 实现了的不确定非线性系统的有限时间镇定, 且控制输入是连续的. 实际上此方法可以推广到 n 阶此类型的非线性系统的有限时间镇定控制律设计中.

参考文献(References):

- [1] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of homogeneous systems[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 1997: 2513 – 2514.
- [2] HONG Y, HUNANG J, XU Y. On an output feedback finite time stabilization problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305 – 309.
- [3] HONG Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 46(4): 231 – 236.

- [4] 李世华, 丁世宏, 田玉平. 一类二阶非线性系统的有限时间状态反馈镇定方法[J]. 自动化学报, 2004, 33(1): 101 – 104.
(LI Shihua, DING Shihong, TIAN Yuping. A finite-time state feedback stabilization method for a class of second order nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 33(1): 101 – 104.)
- [5] 李世华, 田玉平. 非完整移动机器人的有限时间跟踪控制算法研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(7): 750 – 754.
(LI Shihua, TIAN Yuping. Finite time tracking control algorithm for nonholonomic mobile robots[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(7): 750 – 754.)
- [6] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2005, 17(2): 101 – 127.
- [7] DEFOORT M, FLOQUET T, KOKOSY A, et al. A novel higher order sliding mode control scheme[J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(2): 102 – 108.
- [8] LEVANTOVSKY L V (LEVANT A). *Higher order sliding modes and their application for controlling uncertain process*[D]. Moscow: Institute for System Studies of the USSR Academy of Science, 1987.
- [9] BARTOLINI G, FERRARA A, PUNTA E. Multi-input second order sliding mode hybrid control of constrained manipulators[J]. *Dynamics and Control*, 2000, 10(3): 277 – 296.
- [10] BARTOLINI G, PISANO A, PUNTA E, et al. A survey of applications of second order sliding mode control to mechanical systems[J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(9/10): 875 – 892.
- [11] KHAN M, GOH B, SPURGEON S. Second order sliding mode control of a diesel engine[J]. *Asian Journal of Control*, 2003, 5(4): 614 – 619.
- [12] SHTESSEL Y, SHKOLNIKOV I. Aeronautical and space vehicle control in dynamic sliding manifolds[J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(9/10): 1000 – 1017.
- [13] SHTESSEL Y, KAVEH P, ASHRAFI A. Harmonic oscillator utilizing double-fold integral traditional and second-order sliding mode control[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2009, 346(9): 872 – 888.
- [14] PISANO A, USAI E. Output-feedback control of an underwater vehicle prototype by higher-order sliding modes[J]. *Automatica*, 2004, 40(9): 1525 – 1531.
- [15] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. 3rd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2005.
- [16] HAIMO V. Finite time controllers[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1986, 24(4): 760 – 770.
- [17] UTKIN V I, GULDNER J, SHI J. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*[M]. London: Taylor and Francis, 1999.

作者简介:

李 鹏 (1982—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为变结构控制、精确制导与控制, E-mail: lipeng0327@nudt.edu.cn;

郑志强 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为精确制导与控制、多机器人协同控制, E-mail: xyzheng@sohu.com;

马建军 (1980—), 男, 博士, 目前研究方向为控制分配与容错控制, E-mail: mjjcll@yahoo.com.cn.