第 28 卷第 11 期
2011 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 11
Nov. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)11−1577−06

时滞系统稳定性分析和镇定: 一种基于Finsler引理的统一观点

刘健辰[1], 章 兢[1], 张红强[2], 何 敏[1]

(1. 湖南大学 电气与信息工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 湖南科技大学 信息与电气工程学院, 湖南 湘潭 411201)

摘要: 从Finsler引理角度, 研究时滞系统的时滞相关稳定性分析和镇定问题, 发现自由权矩阵方法是该研究框架的一个特例, 阐明引入乘子矩阵对分析时变时滞系统稳定性的必要性, 讨论乘子矩阵结构对所得结果保守性的影响, 提出一些改进的基于线性矩阵不等式的稳定性判据和镇定控制器设计算法, 数值算例表明所提出方法的有效性.

关键词: 时滞系统; 时滞相关; Finsler引理; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Stability analysis and stabilization for time-delay systems: a unified viewpoint of Finsler's lemma

LIU Jian-chen[1], ZHANG Jing[1], ZHANG Hong-qiang[2], HE Min[1]

(1. College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha Hunan 410082, China;
2. School of Information and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 411201, China)

Abstract: This paper investigates the delay-dependent stability and stabilization of time-delay systems from the viewpoint of Finsler's lemma. The free-weighting matrices method is a special case of the proposed unified framework. It is necessary to introduce multiplier matrices for the stability analysis of the time-varying delay systems. The construction of the multiplier matrices affecting the conservatism of the results is discussed. Improved stability criteria and design algorithms for the stabilizing controller are developed in terms of linear matrix inequalities. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: time-delay system; delay-dependent; Finsler's lemma; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

时滞普遍存在于自然和工程系统中[1], 由于经常引起系统恶化甚至不稳定, 其稳定性分析和控制器设计一直是研究热点之一[2~10]. 特别地, 文献[11]从LMI的角度对时滞系统稳定性分析的最新进展进行了全面总结. 已有研究方法大体分为频域方法和时域方法. 由于频域方法在处理时变时滞, 特别是控制器设计方面的局限性, 时域方法所受关注程度较高, 而且研究成果也较为丰富. 时域方法又可分为Lyapunov-Krasovskii(L-K)泛函方法和Lyapunov-Razumikhin(L-R)函数方法. L-R函数方法由于相对较为保守, 目前已经较少使用. 对于线性时滞系统的稳定性, Gu等提出一种基于完整(complete)L-K泛函的充分必要条件[1], 但由于其涉及无限维优化问题而无法直接求解. 为此, 研究者转而寻求近似解决该问题的途径, 包括离散化(discretization)方法[1]和平方和(sum-of-squares)方法[12], 但这两种方法都由于算法复杂和计算量巨大而限制了应用. 相对于完整L-K泛函方法, 研究者对简单L-K泛函方法[7]更加感兴趣. 简单L-K泛函方法的缺点在于其只能得到充分条件, 这样减少保守性就成为近来研究的主要目标. 这方面研究的早期成果在文献[1]中有较为集中的呈现, 其中重点讨论了4种模型变换方法的特性, 指出一阶模型变换和中立模型变换方法会因引入附加动态特性, 而导致变换系统与原系统不再等价. 因此另外两种方法: 基于Park不等式[13](或Moon不等式[14])的模型变换法和Fridman广义模型变换方法[15]成为了一时的研究主流. 直到后来, 何勇等研究者发现这两种方法都等价于引入一些包含自由矩阵的零等式, 如果显式地用零等式可以推广这两种方法, 就可能取得保守性更小的结果, 并称之为自由权矩阵(free-weighting matrices, FWM)法[5,6]. 自此之后, 研究者沿着FWM法的研究思路, 取得了大量的研究成果.

但是最近, 研究者在文献[16,17]中证明了已有文献中多种定常时滞系统稳定性判据之间的等价性,

收稿日期: 2010−06−05; 收修改稿日期: 2011−01−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174140); 湖南省教育厅科学研究基金资助项目(07C264).

同时发现引入自由权矩阵对减小保守性没有任何意义. 那么透过这些等价性, 是否可以建立一个统一的研究框架哪? 这构成了本文研究的基本出发点, 即建立一个基于Finsler引理的时滞系统稳定性分析和控制器设计框架, 并在此框架下探讨包括FWM法在内各种研究方法的内在联系, 研究这一类方法所具有的独特问题和解决方案. 受到文献[18]中的关于约束线性系统分析的启发, 本文首先基于Finsler引理分别建立定常时滞系统和时变时滞系统稳定性的等价充分条件. 然后, 提出一种可以避免迭代过程的直接控制器设计算法, 并通过数值算例验证本文提出方法的有效性.

本文中, 对于对称矩阵A和B, $A > (\geqslant) B$表示$A-B$正定(半正定); $\mathrm{diag}\{\cdot\}$表示块对角矩阵, 即

$$\mathrm{diag}\{X_1, X_2\} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix};$$

$\xi = \mathrm{col}\{\xi_1, \xi_2\}$表示$\xi = [\xi_1^{\mathrm{T}} \ \ \xi_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$; $B^{\perp} \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$为矩阵$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$的右正交补, 且$\mathrm{rank}(B) = r$; 矩阵中的"$*$"表示对称元素; 0_n和I_n分别表示$n \times n$维的零矩阵和单位矩阵, 且一般简写为0和I; $0_{n\times m}$表示$n \times m$维的零矩阵; $e_i (i = 1, 2, \cdots, p)$为块元矩阵(block entry matrices), 如$e_2 = [0 \ \ I \ \ 0_{n\times(p-2)n}]$; 在没有引起混淆的情况下, 变量$x(t)$, $x(s)$和$h(t)$等分别简写为x, x_s和h_t等.

2 稳定性分析(Stability analysis)

2.1 定常时滞系统(Constant delay systems)

Finsler引理早在1937年就已经提出, 但主要用于线性规划等研究领域. 直到1997年, Skelton等研究者开始利用Finsler引理进行控制系统分析[19]. 基本的Finsler引理如下:

引理 1(Finsler引理) 对于向量x, 矩阵$\varXi < 0$和B, 如下4个条件相互等价:

i) $x^{\mathrm{T}}\varXi x < 0$, $\forall Bx = 0$, $x \neq 0$;

ii) $(B^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi B^{\perp} < 0$;

iii) 存在标量μ, 使得$\varXi - \mu B^{\mathrm{T}}B < 0$;

iv) 存在矩阵X, 使得$\varXi + XB + B^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} < 0$.

考虑如下定常时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d), \ \forall t \geqslant 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \ \ \forall \theta \in [-d, 0], \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$为状态向量, $d > 0$为定常时滞, A, $A_d \in \mathbb{R}^n$为定常矩阵, φ为初始状态.

下面, 基于Finsler引理给出系统(1)的几种等价稳定性判据.

定理 1 如果存在适当维数的矩阵$P > 0$, $Q > 0$, $R > 0$, X和标量μ, 使得如下条件之一得到满足, 则系统(1)渐近稳定:

$$(S_1^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi S_1^{\perp} < 0, \tag{2}$$

$$\varXi + XS_2 + S_2^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} < 0, \tag{3}$$

$$(S_3^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi S_3^{\perp} + XS_4 + S_4^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} < 0, \tag{4}$$

$$(S_5^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi S_5^{\perp} + XS_6 + S_6^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} < 0, \tag{5}$$

$$\varXi - \mu S_1^{\mathrm{T}}S_1 < 0, \tag{6}$$

$$(S_3^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi S_3^{\perp} - \mu S_4^{\mathrm{T}}S_4 < 0, \tag{7}$$

$$(S_5^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi S_5^{\perp} - \mu S_6^{\mathrm{T}}S_6 < 0, \tag{8}$$

其中:

$$\varXi = \mathrm{diag}\{\begin{bmatrix} d^2R & P \\ P & Q \end{bmatrix}, -Q, -R\},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} I & -A & -A_d & 0 \\ 0 & -I & I & I \end{bmatrix}, \ S_2 = \begin{bmatrix} I & -A & -A_d & 0 \\ 0 & I & -I & I \end{bmatrix},$$

$$S_3 = [0 \ \ -I \ \ I \ \ I], \ S_4 = [I \ \ -A \ \ -A_d],$$

$$S_5 = [I \ \ -A \ \ -A_d \ \ 0], \ S_6 = [-I \ \ I \ \ I].$$

证 采用如下广泛使用的L-K泛函(9):

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px + \int_{t-d}^{t} x_s^{\mathrm{T}}Qx_s\mathrm{d}s + d\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \tag{9}$$

其中: $P > 0$, $Q > 0$, $R > 0$. 计算式(9)的微分, 可得

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = 2x^{\mathrm{T}}P\dot{x} + x^{\mathrm{T}}Qx + d^2\dot{x}^{\mathrm{T}}R\dot{x} - x^{\mathrm{T}}(t-d)Qx(t-d) - d\int_{t-d}^{t} \dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s\mathrm{d}s. \tag{10}$$

使用Jensen不等式对式(10)的最后一项定界:

$$-d\int_{t-d}^{t} \dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s\mathrm{d}s \leqslant -w^{\mathrm{T}}Rw, \tag{11}$$

其中$w = \int_{t-d}^{t} \dot{x}_s\mathrm{d}s = x - x(t-d)$. 故而

$$\dot{V}(x, \dot{x}) \leqslant \zeta_0^{\mathrm{T}}\varXi\zeta_0, \tag{12}$$

其中$\zeta_0 = \mathrm{col}\{\dot{x}, x, x(t-d), w\}$.

这样根据Lyapunov-Krasovskii稳定性理论, 如果

$$\eta^{\mathrm{T}}(S_1^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi S_1^{\perp}\eta < 0, \ \eta \neq 0, \tag{13}$$

则系统(1)稳定, 其中$\eta = \mathrm{col}\{x, x(t-d)\}$. 注意到$\zeta_0 = S_1^{\perp}\eta$, 所以式(13)等价于

$$\zeta_0^{\mathrm{T}}\varXi\zeta_0 < 0, \ \forall S_1\zeta_0 = S_1S_1^{\perp}\eta = 0, \ \zeta_0 \neq 0.$$

这对应于Finsler引理的条件i). 进而由Finsler引理的条件ii), 可得式(2). 相似地, 采用$\zeta_1 = \mathrm{col}\{\dot{x}, x, x(t-d), -w\}$和Finsler引理的条件iv), 可得式(3).

如果首先采用约束$\forall S_3\zeta_0 = 0$, 则根据Finsler引理, 如果式(14)成立, 则系统(1)渐近稳定.

$$\zeta_2^{\mathrm{T}}(S_3^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi S_3^{\perp}\zeta_2 < 0, \ \forall S_4\zeta_2 = 0, \ \zeta_2 \neq 0, \tag{14}$$

其中$\zeta_2=\mathrm{col}\{\dot{x},x,x(t-d)\}$. 再对式(14)利用Finsler引理的条件iv), 可得条件(4).

相似地, 如果首先采用约束$\forall S_5\zeta_0=0$, 则如果式(15)成立, 系统(1)渐近稳定.

$$\zeta_3^{\mathrm{T}}(S_5^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi S_5^{\perp}\zeta_3<0,\ \forall S_6\zeta_3=0,\ \zeta_3\neq 0,\quad(15)$$

其中$\zeta_3=\mathrm{col}\{x,x(t-d),w\}$. 再利用Finsler引理的条件iv), 可得条件(5).

条件(6)~(8), 可由条件iii)得到.　　证毕.

注 1　基于Finsler引理, 定理1给出的定常时滞系统等价稳定性判据, 分别对应于Finsler引理的条件ii), iii)和iv), 以及约束矩阵和乘子矩阵的不同选择. 这样, 定理1就提供了一个定常时滞系统稳定性分析的研究框架, 大量已有技术可以融入这一框架, 获得等价的(或不等价)的稳定性判据. 比如, 用其他积分不等式[20]代替Jensen不等式, 所得结果与定理1等价; 用一些模型变换系统(如中立型变换、广义模型变换等)代替原系统(1), 如果模型变换系统与原系统等价(如广义模型变换), 则所得结果也与定理1等价, 否则不等价(如中立型变换); 通过S-过程[21]引入一些不等式约束.

下面将具体表明已有文献中的结果只是定理1的特例, 而定理1中的标量乘子条件(6)~(8)在已有文献中还未出现过.

实际上将式(2)中$S_1^{\perp}$选为

$$\begin{bmatrix}A & A_d\\ I & 0\\ 0 & I\\ I & -I\end{bmatrix},$$

再由Schur补即可得到文献[7]中提出的稳定性判据. 根据定理1和注1可见, 不论采用何种约束矩阵和乘子矩阵, 不论结合何种等价技术(积分不等式、模型变换), 从Finsler引理的角度, 所得结果都与条件(2)等价, 且由于条件(2)不引入任何乘子变量而最为简单, 从而解释了文献[17]的结论.

在条件(3)中, 如果选择$X=[N\ \ M]$, 则式(3)等价于$\zeta_0^{\mathrm{T}}\varXi\zeta_0<0$的两边加上零等式(16)和(17)的两边:

$$2\zeta_0^{\mathrm{T}}N\left[\dot{x}-Ax-A_dx\left(t-d\right)\right]=0,\qquad(16)$$

$$2\zeta_0^{\mathrm{T}}M[x-x\left(t-d\right)-\int_{t-d}^{t}\dot{x}_s\mathrm{d}s]=0.\qquad(17)$$

实际上, 在FWM法中, 矩阵N, M被称为自由权矩阵, 式(16)(17)分别对应于系统方程(1)和Leibniz-Newton公式. 若选择

$$X=\begin{bmatrix}T_3 & N_3\\ T_1 & N_1\\ T_2 & N_2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \text{并用}\ \begin{bmatrix}0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\end{bmatrix}$$

进行合同变换, 即可得文献[6]的结果. 在一些FWM法文献中, 仅使用零等式(16), 这意味着$\dot{V}(x,\dot{x})$中的$\dot{x}$被保留下来而未被系统方程(1)所替换, 这对应定理1中的条件(4). 也有文献仅使用零等式(17), 这对应定理1中的条件(5). 实际上, 若选择

$$S_5^{\perp}=\begin{bmatrix}A & A_d & 0\\ I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}N_1\\ N_2\\ 0\end{bmatrix},$$

由式(5)可得文献[9]的结果. 由以上分析可见, FWM法是定理1的特例, 而自由权矩阵本质上就是Finsler引理中的乘子矩阵.

2.2　时变时滞系统(Time-varying delay systems)

本节将沿着2.1节的思路, 基于Finsler引理, 研究如下时变时滞系统的稳定性判据:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+A_dx(t-h_t),\ \forall t\geqslant 0,\\ x(\theta)=\varphi(\theta),\ \ \forall\theta\in[-\bar{h},0],\end{cases}\qquad(18)$$

其中h_t表示时变时滞, 且满足

$$0\leqslant h_t\leqslant\bar{h},\ \bar{h}>0,\ \dot{h}_t\leqslant\mu.\qquad(19)$$

定理 2　如果存在适当维数矩阵$P>0$, $Q_1>0$, $Q_2>0$, $R>0$和X, 使得式(20)或(21)对于$h_t=0$和$\bar{h}$均成立, 则系统(18)渐近稳定.

$$(S_7^{\perp})^{\mathrm{T}}\varXi_1(h_t)S_7^{\perp}+XS_8(h_t)+S_8^{\mathrm{T}}(h_t)X^{\mathrm{T}}<0,\quad(20)$$

$$\varXi_1(h_t)+XS_9(h_t)+S_9^{\mathrm{T}}(h_t)X^{\mathrm{T}}<0,\qquad(21)$$

其中:

$$\begin{aligned}\varXi_1(h_t)=\ &e_1^{\mathrm{T}}\bar{h}Re_1+e_2^{\mathrm{T}}Pe_1+e_1^{\mathrm{T}}Pe_2+\\ &e_2^{\mathrm{T}}(Q_1+Q_2)e_2-(1-\mu)e_3^{\mathrm{T}}Q_1e_3-\\ &e_4^{\mathrm{T}}Q_2e_4-h_te_5^{\mathrm{T}}Re_5-\hat{h}_te_6^{\mathrm{T}}Re_6,\end{aligned}$$

$$S_7=[-I\ \ A\ \ A_d\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

$$S_8(h_t)=\begin{bmatrix}-I & I & 0 & h_tI & 0\\ 0 & -I & I & 0 & \hat{h}_tI\end{bmatrix},$$

$$\hat{h}_t=\bar{h}-h_t,\ S_9(h_t)=\begin{bmatrix}S_7\\ 0_{2n\times n}\ S_8\left(h_t\right)\end{bmatrix}.$$

证　考虑采用L-K泛函(22):

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px+\int_{t-h_t}^{t}x_s^{\mathrm{T}}Q_1x_s\mathrm{d}s+\int_{t-\bar{h}}^{t}x_s^{\mathrm{T}}Q_2x_s\mathrm{d}s+\int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\qquad(22)$$

其中: $P>0$, $Q_1>0$, $Q_2>0$和$R>0$. 计算式(22)的微分, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}=\ &2x^{\mathrm{T}}P\dot{x}+x^{\mathrm{T}}(Q_1+Q_2)x+\bar{h}\dot{x}^{\mathrm{T}}R\dot{x}-\\ &(1-\dot{h}_t)x^{\mathrm{T}}(t-h_t)Q_1x(t-h_t)-\\ &x^{\mathrm{T}}(t-\bar{h})Q_2x(t-\bar{h})-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s\mathrm{d}s.\end{aligned}\qquad(23)$$

由Jensen不等式, 有

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}_s^{\mathrm{T}}R\dot{x}_s ds \leqslant -h_t w_1^{\mathrm{T}}Rw_1 - \hat{h}_t w_2^{\mathrm{T}}Rw_2, \quad (24)$$

其中: $w_1=(x-x(t-h_t))/h_t$, $w_2=(x(t-h_t)-x(t-\bar{h}))/\hat{h}_t$. 当$h_t=0$和$\bar{h}$时, 根据导数定义, 分别有$w_1(h_t=0)=\dot{x}(t)$, $w_2(h_t=\bar{h})=\dot{x}(t-\bar{h})$. 但实际上, 以下证明中$w_1$和$w_2$在$h_t=0$或$\bar{h}$处的定义并不影响证明过程.

这样, 如果式(25)或式(26)成立, 则系统(18)渐近稳定.

$$\dot{V}\leqslant\xi_1^{\mathrm{T}}(S_7^{\perp})^{\mathrm{T}}\Xi_1(h_t)S_7^{\perp}\xi_1,\ \forall S_8(h_t)\xi_1=0,\ \xi_1\neq 0, \quad (25)$$

$$\dot{V}\leqslant\xi_2^{\mathrm{T}}\Xi_1(h_t)\xi_2,\ \forall S_9(h_t)\xi_2=0,\ \xi_2\neq 0, \quad (26)$$

其中: $\xi_1=\mathrm{col}\{x,x(t-h_t),\ x(t-\bar{h}),w_1,w_2\}$, $\xi_2=\mathrm{col}\{\dot{x},\xi_1\}$. 再由Finsler引理, 即可得(20)和(21).

证毕.

注 2 从定理2可以看出时变时滞系统与定常时滞系统的本质不同在于: 时变时滞h_t会不可避免地出现在二次不等式$\Xi_1(h_t)$和约束矩阵$S_8(h_t)$或$S_9(h_t)$中, 这使得如果不引入乘子变量, 所得判据中h_t将以非线性形式出现. 而对于存在非线性时变参数的矩阵不等式, 将无法有效计算其可行性. 另一方面, 引入乘子变量可以解除耦合, 使得时变参数h_t线性地出现式(20)或(21)中. 而根据鲁棒稳定性理论[21], 该LMI的可行性等价于其在不确定性参数的顶点处的可行性, 从而最终获得可以有效检验的LMI稳定性判据. 因此, 定理2反映了为了获得可以有效检验的时变时滞系统稳定性判据, 引入乘子变量是必要的. 而对定常时滞系统稳定性分析, 由于二次不等式和约束矩阵中不存在时变参数, 导致没有必要引入乘子变量. 从中也可发现, 在时变时滞系统的稳定性分析中, 时变时滞h_t实际上被看作为一个多胞型不确定性参数, 这与凸组合方法(convex combination method)[22]在本质上完全相同.

注 3 需要注意的是, 在对式(23)的最后一项定界时, 如果忽略一些有用项, 可以去除在二次不等式和约束矩阵中的h_t, 从而得到不引入乘子变量的稳定性判据. 但这种处理方法必然放大对式(23)最后一项上界的估计, 从而增大所得结果的保守性. 文献[5]和文献[2]中分别忽略了不同的有用项, 所引入的保守性程度也不同, 比较结果见例1.

注 4 根据Finsler引理, 如果将乘子矩阵设置为某种特殊结构, 也可能引入保守性. 所以, 需要特别注意乘子矩阵X的结构选择问题, 而已有研究对于该问题很少涉及. 以定理2中条件(20)为例, 如果采用全参数结构, 即乘子矩阵X采取$5n\times 2n$维的无约束矩阵, 将使得式(20)中出现零对角元素, 而零对角元素的同行列元素不全为零的情况, 这将导致严重的数值计算问题而无法正确求解. 为了避免这种情况的发生, 目前通用的方法是将乘子矩阵X中与w_1和w_2对应的行设置为全零行. 在例1中将通过数值计算分析乘子矩阵结构选择对保守性的影响.

在注1中提到, 通过S-过程可以引入一些不等式约束, 下面将文献[23]中从频域提出的一个不等式约束通过S-过程引入到定理2中, 获得一个新的时变时滞系统稳定性判据.

推论 1 如果存在适当维数矩阵$P>0, Q_1>0, Q_2>0, Q_3>0, R>0$和$X$, 使得式(27)或(28)对于$h_t=0$和$\bar{h}$均成立, 则系统(18)渐近稳定.

$$S_7^{\perp\mathrm{T}}\Xi_2(h_t)S_7^{\perp}+XS_8(h_t)+S_8^{\mathrm{T}}(h_t)X^{\mathrm{T}}<0, \quad (27)$$

$$\Xi_2(h_t)+XS_9(h_t)+S_9^{\mathrm{T}}(h_t)X^{\mathrm{T}}<0, \quad (28)$$

其中: $\Xi_2(h_t)=\Xi_1(h_t)+e_1^{\mathrm{T}}\alpha Q_3e_1+e_1^{\mathrm{T}}\beta Q_3(e_2-e_4)+(e_2-e_4)^{\mathrm{T}}\beta Q_3e_1-(e_2-e_4)^{\mathrm{T}}Q_3(e_2-e_4)$, $\alpha=-(c^2-r^2)\bar{h}^2$, $\beta=c\bar{h}$, $c=0.251$, $r=0.749$.

证 文献[23]中提出

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ w_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\alpha I & \beta I\\ \beta I & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ w_3\end{bmatrix}\geqslant 0, \quad (29)$$

其中$w_3=x-x(t-\bar{h})$. 这样利用S-过程, 由定理2就可以容易地证得结论. 证毕.

例 1 考虑一个在文献中广泛研究的时变时滞系统(18), 参数如下:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

表1中给出对于不同μ, 不同方法所取得的保证该系统渐近稳定的最大时滞上界$\bar{h}_{\max}$. 由表1可以看出, 定理2(除a)和d)两种情况)比文献[5]和文献[2]可以取得更大的$\bar{h}_{\max}$. 文献[5]和文献[2]中都对式(23)最后一项上界的估计进行了放大, 由于被忽略的有用项不同, 所引入的保守性也不同. 定理2由于避免了忽略有用项, 具有比文献[5]和文献[2]更低的保守性. 另外表1给出了当定理2中的乘子矩阵X取如下一些典型结构时所对应的结果, 其中$X_{kn\times ln}$代表$kn\times ln$维的无约束矩阵. 对式(20):

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix}X_{n\times 2n}\\ 0_{4n\times 2n}\end{bmatrix},\ \text{b)}\ \begin{bmatrix}X_{2n\times 2n}\\ 0_{3n\times 2n}\end{bmatrix},$$

$$\text{c)}\ \begin{bmatrix}X_{3n\times 2n}\\ 0_{2n\times 2n}\end{bmatrix},\ \text{d)}\ \begin{bmatrix}X_{n\times 2n}\\ 0_{n\times 2n}\\ X_{n\times 2n}\\ 0_{2n\times 2n}\end{bmatrix};$$

对式(21):

$$\text{e)}\ \begin{bmatrix}X_{2n\times 3n}\\ 0_{4n\times 3n}\end{bmatrix},\ \text{f)}\ \begin{bmatrix}X_{3n\times 3n}\\ 0_{3n\times 3n}\end{bmatrix}.$$

由表1可以看出, 当X采用参数结构a)和d)时, 会

由于自由度的缺失, 而导致保守性较大. 增加自由度可以降低保守性, 特别当X采用参数结构b)和e)时, 可在保持最小保守性的同时, 涉及最少的求解变量.

表 1 对于不同μ的最大时滞上界$\bar{h}_{\max}$

Table 1 Maximum delay upper bound $\bar{h}_{\max}$ for different μ

μ	0	0.1	0.2	0.5	0.8
文献[5]	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492
文献[2]	4.472	3.606	3.043	2.072	1.590
定理2式a), d)	4.358	3.462	2.864	1.741	0.928
定理2式b), c), e), f)	4.472	3.658	3.163	2.337	1.934
文献[24]	4.568	3.673	3.085	2.043	1.492
推论1式e)	5.002	4.000	3.349	2.337	1.934

由表1可见, 在对乘子矩阵都采用相同参数结构的条件下, 推论1取得了比定理2更大的$\bar{h}_{\max}$(特别在μ较小时), 这体现了由S-过程引入不等式约束(29)的作用. 作为对比, 文献[24]基于二次分离法也使用了不等式约束(29), 但由表1可见推论1对文献[24]的结果也有一定的改进.

3 控制器设计的直接法(Direct algorithm for controller design)

本节以定常时滞系统为例, 提出一种改进的时滞相关控制器设计算法, 即对系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + Bu(t), \tag{30}$$

设计状态反馈控制$u(t) = Kx(t)$使得闭环系统渐近稳定.

用$A_K = A + BK$取代式(4)中的A, 且取

$$S_3^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & -I \end{bmatrix},$$

可得

$$\Psi + X^{\mathrm{T}}\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}X < 0, \tag{31}$$

其中:

$$\bar{A} = [I \ \ -A_K \ \ -A_d],$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} d^2R & P & 0 \\ * & Q-R & R \\ * & * & -Q-R \end{bmatrix}.$$

参数化乘子矩阵X为$[N \ \ N \ \ 0]$, 对式(31)的左边用$\mathrm{diag}\{N^{-1}, N^{-1}, N^{-1}\}$取合同变化, 并令$V = N^{-1}, \bar{P} = VPV, \bar{Q} = VQV, \bar{R} = VRV, U = KV$, 可得

$$\tilde{\Psi} + \tilde{X}^{\mathrm{T}}\tilde{A} + \tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{X} < 0, \tag{32}$$

其中:

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} d^2\bar{R} & \bar{P} & 0 \\ * & \bar{Q}-\bar{R} & \bar{R} \\ * & * & -\bar{Q}-\bar{R} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{X} = [I \ \ I \ \ 0], \ \tilde{A} = [V \ \ -AV-BU \ \ -A_dV].$$

这样, 可得如下一种避免迭代过程的直接控制器设计算法.

算法 1 直接控制器设计算法.

Step 1 设$d > 0$为足够小的初始时滞上界.

Step 2 对于正定对称矩阵$\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$和矩阵V, U, 求解式(32). 如果式(32)不成立, 退出算法.

Step 3 如果状态反馈增益$K = UV^{-1}$满足设计要求, 记$d_{\max} = d$, $K^* = K$, 增大d, 返回Step 2; 否则, 退出算法.

注 5 算法1通过将乘子矩阵适当地参数化, 直接获得状态反馈增益, 从而避免了迭代过程. 但根据注4, 将X参数化为$[N \ N \ 0]$会由于丧失一定的自由度, 从而增大保守性. 不过以下的数值算例表明, 其保守性并不太大.

例 2 考虑系统(30), 参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_d = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

为了便于比较, 在算法1中对控制增益矩阵K的大小进行不同的限制, 即限定$|k_{ij}| \leqslant \sigma, \sigma > 0$, 其中$k_{ij}$为矩阵$K$的元素. 对于不同的$\sigma$, 由算法1得到最大时滞上界和相应的控制增益矩阵(见表2). 表2中, "—"表示没有可行解.

表 2 算法1的结果

Table 2 Results for Algorithm 1

σ	$d_{\max}$	K^*
1	—	—
5	0.8	[−4.1530 −3.8543]
10	1.0	[−9.1537 −5.6192]
50	2.3	[−46.7779 −15.1364]
100	2.8	[−98.9933 −29.1903]
1000	5.0	[−986.0011 −257.4562]
10000	8.6	[−9844.5 −2497.0]
100000	15.6	[−99893 −25074]

由表2可见, 放松对控制增益矩阵K的限制, 可以取得很大的$d_{\max}$, 但是得到的控制增益也非常大, 这反映了算法1将乘子矩阵设定为特殊结构所引起的保守性.

4 结论(Conclusion)

本文建立了一个基于Finsler引理的时滞系统稳定性分析框架. 这个新框架推广了FWM法, 可以清

楚表明引入乘子矩阵对于时变时滞系统稳定性分析的必要性. 在这个统一框架下, 提出一些新的稳定性判据和控制器设计算法, 数值算例表明了所提出方法的有效性.

参考文献(References):

[1] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. *Stability of Time-Delay Systems*[M]. Boston, American: Birkhauser, 2003.

[2] SHAO H. Improved delay-dependent stability criteria for systems with a delay varying in a range[J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3215 – 3218.

[3] FRIDMAN E, SHAKED U. An improved stabilization method for linear time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1931 – 1937.

[4] XU S, LAM J, ZOU Y. New results on delay-dependent robust H∞ control for systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2006, 42(2): 343 – 348.

[5] HE Y, WANG Q, LIN C, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay[J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 371 – 376.

[6] HE Y, WU M, SHE J, et al. Parameter-dependent lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(5): 828 – 832.

[7] HAN Q. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. *Automatica*, 2005, 41(12): 2171 – 2176.

[8] SHAO H. New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay[J]. *Automatica*, 2009, 45(3): 744 – 749.

[9] XU S, LAM J. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(3): 384 – 387.

[10] SUPLIN V, FRIDAN E, SHAKED U. A projection approach to H∞ control of time-delay systems[C] //*Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2004: 4548 – 4553.

[11] XU S, LAM J. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 2008, 39(12): 1095 – 1113.

[12] PAPACHRISTODOUIOU A, PRAJNA S. On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition[C] //*Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2002: 3482 – 3487.

[13] PARK P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(4): 876 – 877.

[14] MOON Y S, PARK P, KWON W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(3): 1447 – 1455.

[15] FRIDMAN E, SHAKED U. A descriptor system approach to H∞ control of linear time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(2): 253 – 270.

[16] ZHANG D, YU L. Equivalence of some stability criteria for linear time-delay systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 202(1): 395 – 400.

[17] XU S, LAM J. On equivalence and efficiency of certain stability criteria for time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(1): 95 – 101.

[18] DE OLIVEIRA M C, SKELTON R E. *Stability tests for constrained linear systems*[M] //*Perspectives in Robust Control*. London: Springer, 2001: 241 – 256.

[19] SKELTON R, IWAZAKI T, GRIGORIADIS K. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*[M]. London: Taylor and Francis, 1998.

[20] 张先明. 基于积分不等式方法的时滞相关鲁棒控制研究[D]. 长沙: 中南大学, 2006.
(ZHANG Xianming. *Study on delay-dependent robust control based on an integral inequality approach*[D]. Changsha: Central South University, 2006.)

[21] BOYD S, El G L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia, USA: SIAM, 1994.

[22] PARK P, WAN KO J. Stability and robust stability for systems with a time-varying delay[J]. *Automatica*, 2007, 43(10): 1855 – 1858.

[23] ZHANG J, KNOSPE C R, TSIOTRAS P. Toward less conservative stability analysis of time-delay systems[C] //*Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway: IEEE, 1999: 2017 – 2022.

[24] ARIBA Y, GOUAISBAUT F, PEAUCELLE D. Stability analysis of time-varying delay systems in quadratic separation framework[C/OL] //*The International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences*. Genoa, Italie, 2008. Available from: hal.inria.fr/docs/00/35/77/66/PDF/icnpaa08_hal.pdf.

作者简介:

刘健辰 (1978—), 男, 博士研究生, 从事时滞系统鲁棒控制的研究, E-mail: liujian4587@sina.com;

章 兢 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂工业系统鲁棒和智能控制的研究, E-mail: zhangj@hnu.edu.cn;

张红强 (1979—), 男, 讲师, 硕士, 从事时滞系统鲁棒控制的研究, E-mail: hongniuok@tom.cn;

何 敏 (1977—), 女, 博士研究生, 从事复杂工业系统智能控制的研究, E-mail: hemin607@163.com.