文章编号: 1000−8152(2011)08−0987−07

导航随机微分模型的三次样条插值求解探索

赵玉新, 陈立娟

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 提出一种用三次样条插值逼近导航系统状态概率密度函数的方法. 导航随机微分模型的弱解由前向Kolmogorov方程表示, 其解析解很难求得. 本文通过三次样条插值函数来逼近其解可得到状态的先验概率密度函数, 再由Bayes公式得到状态的后验概率密度函数, 解决了构造三次样条插值条件的难点问题, 并以水下潜器组合导航系统为背景, 与粒子滤波方法进行性能对比分析, 仿真结果验证了三次样条插值逼近导航随机微分模型解析解的可行性.

关键词: 三次样条; 插值函数; 贝叶斯估计; 导航随机微分模型

中图分类号: U666.11　　**文献标识码**: A

Cubic spline interpolation for solving navigation stochastic differential model

ZHAO Yu-xin, CHEN Li-juan

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: We propose applying cubic spline function to approximate the probability density function of the state of a navigation system. The weak solution of navigation stochastic differential model is described by the Kolmogorov's forward equation which is difficult to be solved. This article approaches its solution through cubic spline interpolation functions to obtain a prior probability density function of the state, and then a posterior probability density function is gained through the Bayes formula. Thus, the most difficult problem in forming cubic spline interpolation is solved. By taking the underwater vehicle integrated navigation system as the background and performing the comparison analysis with the particle filter, the feasibility of solving navigation stochastic differential model by using the cubic spline interpolation is confirmed through simulation experiment.

Key words: cubic spline; interpolation function; Bayesian estimation; navigation stochastic differential model

1 引言(Introduction)

精确导航技术是确保水下潜器有效利用和安全回收的关键技术之一. 目前, 水下潜器的核心导航设备多数以惯性导航系统为主, 辅以其他设备如多普勒测速仪、GPS等设备来辅助或校正惯性单元[1]. 近年来, 声学辅助导航(如长短基线等)、地球物理场辅助导航(如重力、磁力、地形等) 技术研究在水下导航技术领域逐渐兴起. 但所有组合模式的发展均离不开滤波理论的支撑, 滤波技术是影响系统性能即导航精度的关键之一. 从卡尔曼滤波理论建立到现在, 如何将滤波理论的最新成果应用于导航系统一直是导航界研究的热点和推动滤波理论发展的动力.

卡尔曼滤波将状态空间模型引入最优滤波理论, 对于具有高斯分布噪声的线性系统可以得到系统状态的递推最小均方差估计, 但其缺点是要求系统模型为线性的, 其计算量以被估计向量维数的三次方剧增. 为了将卡尔曼滤波器应用于非线性系统, Bucy, Sunahara等人提出了扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filtering, EKF), 其基本思想是将非线性系统进行线性化, 再进行Kalman滤波, 是一种次优滤波. 但是EKF算法假设条件过于苛刻, 只对更新区间内近似线性的非线性系统有效, 因此难以应用于许多物理系统[2,3].

随后, Julier和Uhlmann等人提出并发展了UKF (unscented Kalman filter, UKF)方法[4,5]. UKF方法假设系统噪声符合高斯分布, 认为状态的概率密度分布可通过能完全表述概率密度函数均值和方差的有限个样本点来描述, 并不要求系统是近似线性的. 对于线性系统, UKF和EKF具有同样的估计性能, 但对于非线性系统, UKF方法则可以得到更好的估计. Julier等人还将UKF方法首先用于车辆导航定位中, 得到一个较EKF更好的结果[6].

1993年, 英国学者Gordon等人提出粒子滤波算法

收稿日期: 2010−09−17; 收修改稿日期: 2011−01−04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60904087).

(particle filter, PF), 该方法是基于Bayesian原理的非参数化序贯Monte-Carlo模拟递推滤波算法[7], 其核心是利用一组带有权值的随机样本(粒子)来逼近目标的后验概率密度, 粒子滤波采用样本形式而不是函数形式对先验信息和后验信息进行描述, Karlsson等人把粒子滤波应用于利用深度和声纳信息组合的水下定位系统中, 取得了较好的效果[8]. 但在实际应用中, 上述算法在估计精度、实现难易程度及计算量等方面还存在一定的不足, 并且Kalman滤波和UKF滤波都以求得系统状态概率分布的二阶矩为目的, 而系统状态概率的实际分布可能不是正态分布, 所以直接对系统状态概率密度函数进行求解更能明确系统状态各种可能性.

本文针对水下潜器组合导航过程的运动状态特点和量测特性, 建立了状态连续、量测离散的导航随机微分模型, 并研究利用三次样条插值逼近导航随机微分模型的概率解, 得到水下潜器状态的高精度分布, 探索解决水下组合导航系统非线性滤波问题, 仿真结果验证了三次样条插值逼近导航随机微分模型解的可行性.

2 导航随机微分模型(Navigation stochastic differential model)

2.1 模型的建立(Modelling)

以水下潜器组合导航系统为例, 潜器的运动状态可看作随机过程$x(t)$, 假设对于$t \in [0,\infty)$, 所有的$x(t)$都定义在一个概率空间(Ω, F, P)上, 其中: Ω是非空集合, 称为样本空间, 其元素称为样本; F是样本空间的幂集的一个非空子集, 集合F必须是一个σ–代数; P是概率测度, 简称概率. 量测$z(t)$为概率空间中的一个代数域, $z(t)$是P可测的. 简记$x_t \triangleq x(t)$, $z_t \triangleq z(t)$.

与离散模型中状态和量测都由离散方程描述不同, 在随机微分模型中x_t, z_t随时间演变的过程可以用一个状态微分方程和一个量测离散方程来描述:

$$\mathrm{d}x_t = f(x_t,t)\mathrm{d}t + b(u_t,t)\mathrm{d}t + g(x_t,t)\mathrm{d}\beta_t, \tag{1}$$

$$z_k = h(x_k,t_k) + e_k. \tag{2}$$

其中: $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^c$, $\beta_t \in \mathbb{R}^d$, $z_k \in \mathbb{R}^m$, $e_k \in \mathbb{R}^m$;

$f(x_t,t)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$称作漂移函数;

$b(u_t,t)$: $\mathbb{R}^c \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$称作控制函数;

$g(x_t,t)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times d}$称作扩散系数;

$h(x_k,t_k)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$是量测函数;

u_t 是 c 维控制向量, β_t 是 d 维布朗运动向量, $\mathrm{E}[\mathrm{d}\beta_t \mathrm{d}\beta_t^{\mathrm{T}}] = Q(t)\mathrm{d}t$, $Q(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$; e_k是m维白噪声过程, $\mathrm{E}[e_k e_k^{\mathrm{T}}] = R(k)$, $R(k) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, β_t与e_k相互独立.

2.2 随机微分方程的弱解(The weak solution of stochastic differential model)

随机微分方程的解作为随机过程, 可以抽象地用一个泛函$x_t = J[x_0, \beta_t, t]$表示. 随机微分方程有强解和弱解两种分析方法, 仅有一些类型的随机微分方程有强解的封闭解; 而弱解是分布解, 即连续函数空间中的一个概率, 在随机微分方程中布朗运动只是代表微观随机涨落的驱动力, 它并不在宏观的平均性质中出现. 将随机微分方程中的布朗运动换成另一个布朗运动B_t', 其解就是$x_t' = J[x_0, \beta_t', t]$, 从分布的角度看, 随机过程$\{x_t\}$的分布与随机过程$\{x_t'\}$的分布是一样的. 当强解存在条件不满足时, 弱解使随机微分方程具有意义.

随机微分方程弱解由转移函数决定. 在系数$f(x,t), g(x,t)$合适的条件下, 系统状态的条件概率密度$p(x,t|z_t)$满足前向Kolmogorov方程[9]:

$$L(p) = \dot{p} = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial^2 (g(x,t)Q(t)g^{\mathrm{T}}(x,t)\cdot p)}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial (f(x,t)\cdot p)}{\partial x_r}. \tag{3}$$

式中令$p \triangleq p(x,t|z_t)$,

$$p'(x_0) = 0,\ p'(x_n) = 0. \tag{4}$$

其中: 在实际的组合导航中$f(x,t)$表示运动状态变化与运动状态之间的关系, $g(x,t)$表示噪声扩散.

前向Kolmogorov方程式(3)和它的边界条件式(4)构成了一个微分方程边值问题. Ω 是$\mathbb{R}^n$空间中具光滑边界的区域, $P: \Omega \to \mathbb{R}$是该边值问题的解.

3 随机微分模型的三次样条求解(Solving stochastic differential model with cubic spline interpolation)

三次样条算法[10]是在一维的情况下, 把其概率密度进行分段来逼近系统状态的先验概率密度, 其直接对系统状态概率密度函数进行求解更能明确状态的各种可能性. 并且针对其他分段低次插值多项式三次样条算法既保留了其各种优点, 又提高了插值函数的光滑性.

本文通过构造三次样条插值条件, 利用三次样条插值函数来逼近前向Kolmogorov方程的解, 从而将问题转化为对分段函数中关于系数的常微分方程组的求解.

3.1 基本原理(Basic principle)

状态概率密度函数$p(x,t)$: $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_e) \to \mathbb{R}$, 对于某固定时刻$t$, $p(x,t)$是f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$构成的希尔伯特空间中的一员, 记$p(x,t) \triangleq p(x)$.

对于给定区间$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 点列$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$, 若函数$p(x)$满足:

1) $p(x)$在每个子区间$[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$上是不高于三次的多项式;

2) $p(x), p'(x), p''(x)$在$[a, b]$上连续;

3) 满足插值条件$p(x_i) = y_i(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$.

则称$p(x)$为原函数关于节点的三次样条插值函数. 设在节点x_i处的$p(x)$二阶导数$p''(x_i)$为

$$p''(x_i) = M_i,\ i = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

由于在子区间$[x_{i-1}, x_i]$上$p(x) = p_i(x)(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$是不高于三次的多项式, 故其二阶导数必是线性函数(或常数). 于是, 有

$$p''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}.$$

其中: $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, 连续对其进行两次积分得

$$p_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i,\ x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{5}$$

其中A_i, B_i为只关于时间的积分常数. $p(x_i), p(x_{i-1})$代入式(3)前向Kolmogorov方程, 得

$$\begin{cases} L(p(x_i)) = \left.\dfrac{\partial p(x)}{\partial t}\right|_{x_i}, \\ L(p(x_{i-1})) = \left.\dfrac{\partial p(x)}{\partial t}\right|_{x_{i-1}}. \end{cases}$$

由于

$$\frac{\partial(f \cdot p)}{\partial x_r} = \frac{\partial(f)}{\partial x_r} \cdot p + f \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x_r},$$

$$\frac{\partial(gQg^{\mathrm{T}} \cdot p)}{\partial x_s} = \frac{\partial(gQg^{\mathrm{T}})}{\partial x_s} \cdot p + gQg^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x_s},$$

$$\frac{\partial^2(gQg^{\mathrm{T}} \cdot p)}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial^2(gQg^{\mathrm{T}})}{\partial x_r \partial x_s} \cdot p + 2 \cdot \frac{\partial(gQg^{\mathrm{T}})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x_s} + gQg^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial^2(p)}{\partial x_r \partial x_s},$$

得

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}[\frac{\partial^2(gQg^{\mathrm{T}})}{\partial x_r \partial x_s} \cdot p + \frac{\partial(gQg^{\mathrm{T}})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial(2p)}{\partial x_s}] + \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} gQg^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial^2(p)}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial(f)}{\partial x_r} \cdot p - \sum_{r=1}^{n} f \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x_r}.$$

记

$$\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial^2(gQg^{\mathrm{T}})}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial(f)}{\partial x_r} \triangleq \varDelta_1,$$

$$\sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial(gQg^{\mathrm{T}})}{\partial x_r} - f \triangleq \varDelta_2,\ gQg^{\mathrm{T}} \triangleq \varDelta_3.$$

假设g, Q, f与时间无关, 则$\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3$与时间$t$无关.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} L(p(x)) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\varDelta_1 p + \varDelta_2\frac{\partial p}{\partial x} + \varDelta_3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2})\mathrm{d}t, \tag{6}$$

其中令$t_{k+1} - t_k \triangleq \Delta t_k$, 由积分的中值定理得

$$p^{t_{k+1}}(x) = p^{t_k}(x) + (\varDelta_1 p^{t_k} + \varDelta_2\frac{\partial p^{t_k}}{\partial x} + \varDelta_3\frac{\partial^2 p^{t_k}}{\partial x^2}) \cdot \Delta t_k.$$

在t_{k+1}时刻x_i节点处$p_i(x_i)$可求, 令

$$p_i(x_i) = p_i^{t_{k+1}}(x_i), p_i(x_{i-1}) = p_i^{t_{k+1}}(x_{i-1}).$$

由上式可得

$$\begin{cases} A_i = \dfrac{p_i(x_i) - p_i(x_{i-1})}{h_i} - \dfrac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}), \\ B_i = p_i(x_{i-1}) - \dfrac{h_i^2}{6}M_{i-1}. \end{cases}$$

把A_i, B_i代入式(5)得

$$p_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + (p_i(x_{i-1}) - \frac{h_i^2}{6}M_{i-1}) \cdot \frac{x_i - x}{h_i} + (p_i(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \tag{7}$$

则只需确定$M_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$这$n + 1$个未知数即可得到三次样条插值函数. 利用一阶导数在子区间节点x_i上连续可得

$$p_i'(x_i - 0) = p_{i+1}'(x_i + 0), \tag{8}$$

其中$i = 1, 2, \cdots, n - 1$. 又由于

$$p_i'(x_i - 0) = \frac{p_i(x_i) - p_i(x_{i-1})}{h_i} + \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i,$$

$$p_{i+1}'(x_i + 0) = \frac{p_i(x_{i+1}) - p_i(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{3}M_i.$$

将其代入式(8)得

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{p_i(x_{i+1}) - p_i(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{p_i(x_i) - p_i(x_{i-1})}{h_i}.$$

上式两边同时乘以$\dfrac{6}{h_i+h_{i+1}}$, 即得方程

$$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}M_{i+1}=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{p_i(x_{i+1})-p_i(x_i)}{h_{i+1}}-\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{p_i(x_i)-p_i(x_{i-1})}{h_i},$$

其中令

$$u_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}},\ \alpha_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}=1-u_i,$$

$$g_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{p_{\rm i}(x_{i+1})-p_{\rm i}(x_i)}{h_{i+1}}-\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{p_{\rm i}(x_i)-p_{\rm i}(x_{i-1})}{h_i}.$$

其中$i=1,2,\cdots,n-1$. 再由边界条件$p'(x_0)=0$, $p'(x_n)=0$, 得

$$\frac{p_0(x_1)-p_0(x_0)}{h_1}-\frac{h_1}{6}M_1-\frac{h_1}{3}M_0=0,$$

$$\frac{p_{n-1}(x_n)-p_{n-1}(x_{n-1})}{h_n}+\frac{h_n}{6}M_{n-1}+\frac{h_n}{3}M_n=0.$$

整理得

$$2M_1+M_0=6\frac{p_0(x_1)-p_0(x_0)}{h_1^2}\triangleq g_0,$$

$$M_{n-1}+2M_n=-6\frac{p_{n-1}(x_n)-p_{n-1}(x_{n-1})}{h_n^2}\triangleq g_n.$$

设$(g_0\ \ g_1\ \ \cdots\ \ g_{n-1}\ \ g_n)^{\rm T}\triangleq G$, 由以上$n+1$个式子得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ u_1 & 2 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & 2 & a_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix}=G,$$

由于$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ u_1 & 2 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & 2 & a_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$非奇异, 则方程组存在唯一解.

利用追赶法可求出$M_i(i=0,1,2,\cdots,n)$, 把M_i代入式(8), 得先验概率密度$p(x)$表达式:

$$p(x)=p_i(x),\ i=1,2,\cdots,n.$$

由Bayes公式:

$$p(x,t_{k+1}/z_{k+1})=\frac{p(z_{k+1}/x)p(x,t_{k+1}^-/z_k)}{\int_\Omega p(z_{k+1}/x)p(x,t_{k+1}^-/z_k){\rm d}x},$$

其中似然概率密度得

$$p(z_{k+1}/x)=\frac{\exp\{-\frac{1}{2}(z_k-h(x,t_k))^{\rm T}R_k^{-1}(z_k-h(x,t_k))\}}{\sqrt{(2\pi)^m\det R_k}}.$$

把先验概率密度代入Bayes公式得后验概率密度:

$$p_i(x,t_{k+1}/z_{k+1})=\frac{p(z_{k+1}/x)p_i(x)}{\int_\Omega p(z_{k+1}/x)p_i(x){\rm d}x},$$

$$x\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\cdots,n,$$

得到的后验概率密度$p(x,t_{k+1}/z_{k+1})$也为一个分段函数.

3.2 算法实现流程(Realizing process)

1) 设初始时刻的概率密度为正态分布, 选定投影区间和分段区间, 构造三次样条函数来拟合先验概率密度. 设其系数为$M_i,A_i,B_i(i=0,1,2,\cdots,n)$.

2) 利用前向Kolmogorov方程和上一个时刻的后验概率密度函数构造插值条件, 用M_i,M_{i-1}把A_i, B_i表示出来, 得到先验概率密度只含$n+1$个系数, 主要求这$n+1$个系数.

3) 利用三次样条插值定义: 在每个插值点处一阶连续导数, 即

$$p_i'(x_i-0)=p_{i+1}'(x_i+0),\ i=1,2,\cdots,n-1.$$

在利用边界条件:

$$p'(x_0)=0,\ p'(x_n)=0,$$

用追赶法求出系数M_i即求出先验系数, 代入式(7)可得先验概率密度表达式.

4) 判断根据当前时刻的量测信息计算似然概率密度, 把先验和似然概率密度带入Bayes公式, 求出当前状态的后验概率密度.

5) 重返第2)步, 计算下一个时刻的系统状态先验概率密度.

4 实验(Experiments)

利用MATLAB进行仿真实验, 以一维状态空间评价三次样条算法的性能. 实验中以水下潜器组合导航系统为例, 假定位置校正信息采用单波速测量得到的位置,使用的系统模型:

$$\dot{x}(t)=\sin(x/2)+w(t),$$
$$z(k)=h(x_k,t_k)+e(k).$$

其中:

$${\rm E}[ww^{\rm T}]=0.001^2,\ {\rm E}[ee^{\rm T}]=0.5^2,\ h(x_k,t_k)=x_k.$$

初始状态$x_0=0.5$, $P_0=1$, 取粒子数500, 仿真时

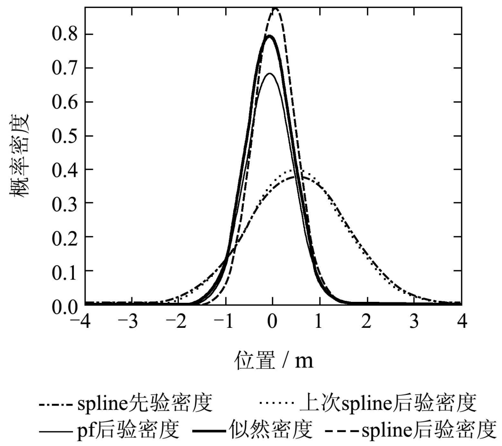
间$t = 50$ s.

三次样条和粒子滤波[11]都是求解递推Bayes估计的方法, 一个是在函数空间中对状态概率密度函数进行分段逼近, 一个是在状态空间中对状态分布进行逼近, 它们是求解同一个问题的两种思路, 目前还没有用三次样条进行对状态概率密度函数进行分段逼近和对两种方法的估计效果对比分析的研究成果, 本试验把三次样条插值与粒子滤波算法进行了比较, 部分实验过程如表1和图1所示.

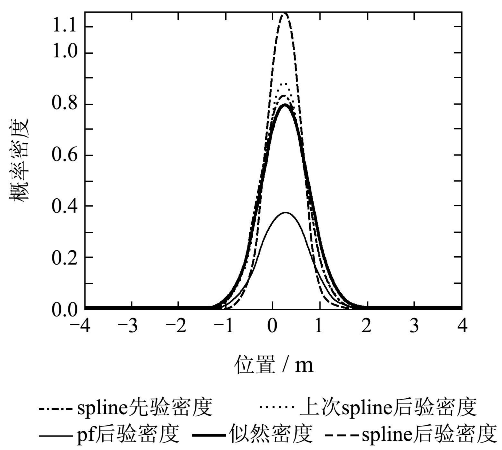
表 1　实验中部分概率密度的积分值

Table 1　Part integral value of probability density in experiment

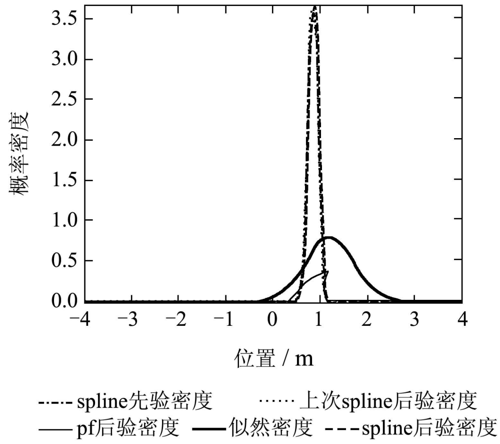
t/s	概率密度的积分值		
	先验	似然	后验
1	0.999919	1	1
2	1.000002	1	1
31	1.000015	1	1
32	1.000002	1	1
33	0.999986	1	1
50	1.000001	1	1



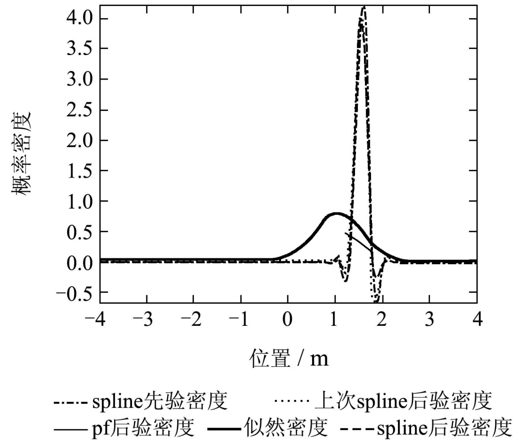
(a)　第1 s时系统状态的概率密度



(b)　第2 s时系统状态的概率密度



(c)　第32 s时系统状态的概率密度



(d)　第50 s时系统状态的概率密度

图 1　状态概率密度函数演变的部分结果图

Fig. 1　Part results of state probability density function evolvement

表1为图1中三次样条插值的先验概率密度, 似然概率密度与后验概率密度的积分值, 从表中可看出其满足概率密度的性质. 由图1中仿真结果显示, 三次样条插值可以逼近系统状态的概率密度. 在图1(c)中可看出从32 s之后在某处开始发生抖动, 在进行MATLAB仿真时, 发现由于插值点的选取存在误差, 所以有的插值点值为负数, 又由于三次样条插值要求满足二阶连续可导, 致使曲线呈凹凸状. 从表1上看, 三次样条逼近系统的概率密度基本上是可行的.

5　三次样条和粒子滤波算法的对比分析 (Contrastive analysis between cubic spline and particle filter)

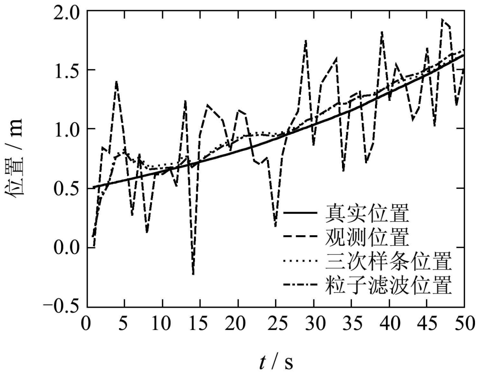
以水下潜器组合导航系统为例, 假定位置校正信息采用单波速测量得到的位置, 本节主要对三次样条算法和粒子滤波算法的估计的方差、标准差、状态的均方根误差和标准差进行对比分析. 实验中使

用的系统模型:

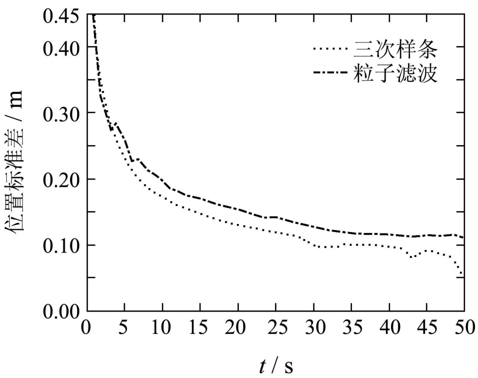
$$\dot{x}(t) = \sin(x/2) + w(t),$$
$$z(k) = h(x_k, t_k) + e(k),$$

其中: $\mathrm{E}[ww^{\mathrm{T}}] = 0.001^2$, $\mathrm{E}[ee^{\mathrm{T}}] = 0.5^2$, $h(x_k, t_k) = x_k$. 初始状态$x_0 = 0.5$, $P_0 = 1$, 取粒子数500.

实验分别对三次样条插值算法和粒子滤波算法进行仿真, 由于考虑不同的时间间隔对三次样条和粒子滤波比对分析实验效果的影响, 取$\Delta t = 0.1$, $\Delta t = 0.01$两个时间间隔, 其实验结果统计如图2、图3所示.



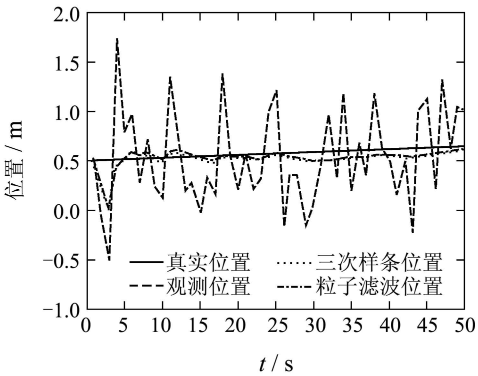
(a) 实验的均值



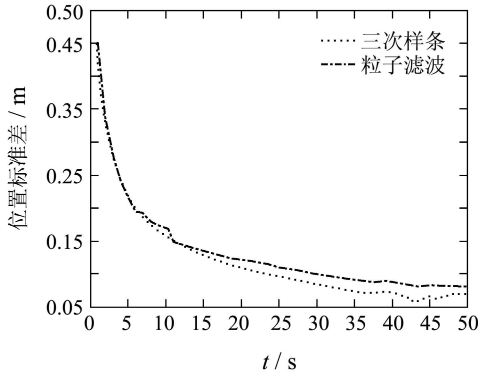
(b) 实验的标准差

图 2 实验的均值与标准差($\Delta t = 0.1$)

Fig. 2 Estimated mean and standard deviation



(a) 实验的均值



(b) 实验的标准差

图 3 实验的均值与标准差($\Delta t = 0.01$)

Fig. 3 Estimated mean and standard deviation

图2、图3表示在50次仿真下三次样条和粒子滤波的位置描述及其标准差. 比较图2和图3中的(a)图可看出三次样条的位置描述与粒子滤波的位置描述相差不大, 均比较接近真实值, 因此三次样条可以较好的跟踪系统状态的演变, 从图2与图3的(b)图可看出, 当选取不同的时间间隔时, 时间间隔越小三次样条算法会以较快的速度收敛到某一值.

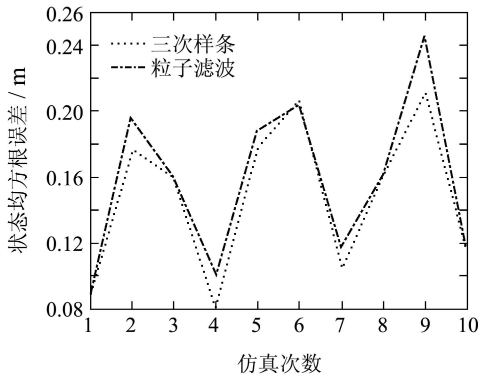
从图2、图3可知: 在选择相同的系统模型下, 本文提出的三次样条插值算法可以保证跟踪的位置标准差以较快的速率收敛到一个更小的剩余集, 并且可以看出其收敛精度优于粒子滤波.

状态的均方根误差和标准差:

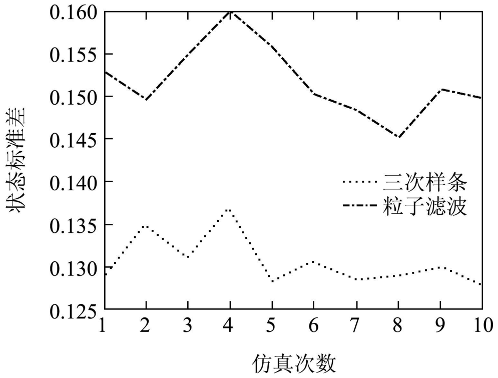
$$R = \sqrt{\sum_{k=1}^{t} (S_k - Y_k)^2 / t},$$
$$\sigma = \sum_{i=1}^{t} \sqrt{\mathrm{E}(Y_i - \mathrm{E}Y_i)^2} / t.$$

其中: R表示均方根误差, σ表示标准差, S_k表示真实位置信息, Y_k表示三次样条或粒子滤波的位置信息.

它们是一种评价导航系统性能的综合指标. 为了进一步比较两种方法的性能, 取仿真时间$t = 50\,\mathrm{s}$, 仿真次数$ST = 10$, 整体状态仿真结果如图4所示.



(a) 状态均方根误差



(b) 状态标准差

图 4 状态的均方根误差与标准差($\Delta t = 0.1$)

Fig. 4 Root-mean-square error and standard deviation

图4分别给出了系统状态的均方根误差及标准差. 图4(a)反映了三次样条插值中所获得的观测点的离散程度与粒子滤波相差不多; 图4(b)反映了三次样条插值中估计值偏离真实值的程度与粒子滤波相比较好.

从图2、图4中可看出三次样条插值不但可以很好地跟踪系统状态的演变, 而且可以很好的解决非线性非高斯系统的状态估计精度和收敛光滑性问题. 从而验证了三次样条插值逼近导航随机微分模型解的可行性.

6 结论(Conclusion)

本文根据导航随机微分模型, 通过Bayes公式可以获得状态估计的最优解, 但首先需要知道系统状态先验概率密度函数, 探索采用三次样条方法对其进行求解的可行性. 对文献[10]的算法进行改进, 提出三次样条插值算法, 把状态概率密度随时间演变的偏微分方程转化为对分段函数中关于系数的常微分方程组的求解, 在一维函数空间中求解系统状态的概率密度函数. 给出了用三次样条逼近概率解的证明, 详细推导了一维情况下算法的求解过程.

本文先探索三次样条插值算法在一维情况下的逼近效果, 通过运用MATLAB对其算法进行仿真实验, 其试验结果显示, 三次样条可以在有限维函数空间内求得系统状态的概率密度函数, 可以跟踪系统状态的变化, 而且估计精度较高. 唯一不足的是在仿真时间较长的情况下概率解分布会出现微小的抖动, 其原因与三次样条插值点的选取存在偏差以及三次样条要求满足二阶连续可导的性质有关.

参考文献(References):

[1] 李俊, 徐德民, 宋保维, 等. 自主式水下潜器导航技术现状与展望[J]. 中国造船, 2004, 45(3): 70 – 77.
(LI Jun, XU Demin, SONG Baowei, et al. Development and prospect of AUV navigation technology[J]. *Shipbuilding of China*, 2004, 45(3): 70 – 77.)

[2] MOYLAN P J. Note on Kalman-Bucy filters with zero measurement noise[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, 19(3): 263 – 264.

[3] BIJKER J, STEYN W. Kalman filter configurations for a low-cost loosely integrated inertial navigation system on an airship[J]. *Control Engineering Practice*, 2008, 16(12): 1509 – 1518.

[4] JULIER S J, UHLMANN J K. Non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations[C] //*Proceedings of the 1997 American Control Conference*. New York: IEEE, 1997, 1–6: 2369 – 2373.

[5] KANDEPU R, FOSS B, IMSLAND L. Applying the unscented Kalman filter for nonlinear state estimation[J]. *Journal of Process Control*, 2008, 18(7/8): 753 – 768.

[6] JULIER S, DURRANT-WHYTE H. Process models for the high-speed navigation of road vehicles[C] //*Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. New York: IEEE, 1995, 1: 101 – 105.

[7] GORDON N J, SALMOND D J, SMITH A F M. Novel approach to nonlinear non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. *IEE Proceedings, Part F: Radar and Signal Processing*, 1993, 140(2): 107 – 113.

[8] KARLSSON R, GUSFAFSSON F, KARLSSON T. Particle filtering and Cramer-Rao lower bound for underwater navigation[C] //*Processing of the 2003 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal*. Hong kong: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2003, 6: 65 – 68.

[9] ZHANG D S, WEI G W, KOURI D J. Numerical method for the non-linear Fokker-Planck equation[J]. *Physical Review E*, 1997, 56(1): 1197 – 1206.

[10] 许小勇, 钟太勇. 三次样条插值函数的构造与MATLAB实现[J]. 自动测量与控制, 2006, 25(11): 76 – 78.
(XU Xiaoyong, ZHONG Taiyong. Construction and realization of cubic spline interpolation function[J]. *Automatic Measurement and Control*, 2006, 25(11): 76 – 78.)

[11] 杨小军, 潘泉, 王睿, 等. 粒子滤波进展与展望[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 261 – 267.
(YANG Xiaojun, PAN Quan, WANG Rui, et a1. Development and prospect of particle filtering[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(2): 261 – 267.)

作者简介:

赵玉新 (1980—), 男, 副教授, 博士生导师, 目前研究方向为现代舰船综合导航技术, E-mail: zhaoyuxin@hrbeu.edu.cn;

陈立娟 (1986—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为现代舰船综合导航技术, E-mail: chenlijuan521@126.com.