

新的鲁棒滤波算法及在 微机电系统-惯性导航系统/全球定位系统中应用

石 静¹, 缪玲娟¹, 倪茂林²

(1. 北京理工大学 自动化学院, 北京 100081;

2. 北京控制工程研究所 空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100190)

摘要: 为了提高系统对不确定干扰的鲁棒性并保持较高的精度, 提出一种新的鲁棒滤波算法. 当系统满足可检测和可镇定的条件时, 通过引入适当的滤波增益矩阵, 得到指数稳定的滤波器, 从而将不确定干扰对估计误差的影响限制在给定的范围内, 实现鲁棒性和精度的要求. 用微机电系统-惯性导航系统/全球定位系统组合导航系统中得到的试验数据对该算法进行离线验证, 试验结果表明, 新算法的计算量较小, 并且在有不确定噪声干扰的情况下能使系统保持较高的精度.

关键词: 组合导航; 惯性导航系统; 微机电系统; 鲁棒滤波

中图分类号: TP206+.3 **文献标识码:** A

New robust filtering algorithm and its application to micro-electro-mechanical system-based inertial navigation system/global positioning system

SHI Jing¹, MIAO Ling-juan¹, NI Mao-lin²

(1. Institute of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. National Key Laboratory of Science and Technology on Space Intelligent Control,
Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China)

Abstract: A new robust filtering algorithm is proposed for enhancing the system robustness to uncertain disturbances and keeping a high accuracy. When the system is detectable and stabilizable, by introducing suitable filter gain matrix, we develop an exponentially stable filter to restrain the impact from uncertain disturbances to estimation errors. The new algorithm is verified offline with experimental data from an micro-electro-mechanical system-based inertial navigation system/global positioning system integrated navigation system; results show that the system operates in a low calculation complexity, but keeps a high accuracy in the presence of uncertain disturbances.

Key words: integrated navigation; inertial navigation system; micro electro mechanical system; robust filtering

1 引言(Introduction)

在众多的导航和定位系统中, 惯性导航系统INS(inertial navigation system)和全球定位系统GPS(global positioning system)是应用最为普遍的, 若将两者组合使用, 则可以优势互补, 导航性能优于单个子系统^[1]. 随着微机械技术的不断进步, 导航系统正沿着低成本小型化的方向发展. 微惯性测量单元MIMU(micro inertial measurement unit)是一种基于微机电系统MEMS(micro-electro-mechanical system)技术的陀螺仪和加速度计组成的新型惯性测量装置, 在微小型系统及低成本制导武器等领域有着广阔的应用前景. 然而, MEMS惯性器件的性能受复杂的随机误差影响很大, 使得MEMS-INS的导航精度在短时间内迅速降低, 无法单独使用^[2]. 因此, 将其与

GPS组成MEMS-INS/GPS组合导航系统^[3].

通常采用Kalman滤波器将INS和GPS的速度和位置信息相融合, 这需要有精确的数学模型和准确的噪声统计特性^[4]. 但是在MEMS-INS/GPS组合导航系统中, 低成本的惯性器件使得系统模型不够精确, 而准确的噪声统计特性也很难获得. Kalman滤波器在应用中的局限性促使许多学者开始研究其他方法^[5-10], 其中最受瞩目的是鲁棒 H_∞ 滤波器. 但是 H_∞ 滤波在求解的过程中涉及到了较高维数的矩阵求逆, 这将会需要较长的计算时间, 难以满足实时性的要求.

本文提出一种新的鲁棒滤波算法, 将器件噪声等效为不确定干扰, 引入适当的滤波增益矩阵, 使得不确定干扰对估计误差的 H_∞ 范数小于给定值. 该算法

可以使系统保持较高的精度,并且具有较小的计算量.最后,针对MEMS-INS/GPS组合导航系统进行了应用性研究.

2 系统描述(System description)

考虑如下线性离散时变系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d(k)\mathbf{d}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d(k)\mathbf{d}(k), \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{L}(k)\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ 为量测向量, $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^p$ 为估计向量, $\mathbf{d}(k) \in \mathbb{R}^{n_d}$ 为不确定干扰噪声.另外,式(1)中的所有系数矩阵均为具有适当维数的时间 t_k 的有界矩阵.

记 $N \triangleq [0 \ 1 \ 2 \ \cdots \ n]$, 则系统(1)中的噪声向量满足 $\mathbf{d}(k) \in L_2[0, n]$.不失一般性,假设系统噪声和量测噪声互不相关,即

$$\mathbf{B}_d(i)\mathbf{D}_d^T(j) = \mathbf{0}, \quad i, j \in N. \quad (2)$$

对于系统(1),考虑具有如下形式的滤波器:为了保证滤波器为指数稳定的,假设 $(\mathbf{C}(k+1), \mathbf{A}(k+1, k))$ 可检测, $(\mathbf{A}(k+1, k), \mathbf{B}_d(k))$ 可镇定,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \\ \mathbf{A}(k+1, k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \\ \mathbf{C}(k+1)\mathbf{A}(k+1, k)\hat{\mathbf{x}}(k)], \\ \hat{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{L}(k)\hat{\mathbf{x}}(k), \\ \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0. \end{cases} \quad (3)$$

定义 $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$, 则由式(1)和式(3)可得

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \\ (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1))\mathbf{A}(k+1, k)\tilde{\mathbf{x}}(k) + \\ (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1))\mathbf{B}_d(k)\mathbf{d}(k) - \\ \mathbf{K}(k+1)\mathbf{D}_d(k+1)\mathbf{d}(k+1), \\ \mathbf{e}(k) = \mathbf{L}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{e}(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k)$ 为估计误差.

定义 $\|g_{ed}\|_\infty$ 为从干扰噪声 $\mathbf{d}(k)$ 到估计误差 $\mathbf{e}(k)$ 的 H_∞ 范数,对于 $\forall k \in N$ 有

$$\|g_{ed}\|_{\infty, [0, k]} = \sup_{\mathbf{d} \in L_2[0, k]} \frac{\sum_{i=0}^k \|\mathbf{e}(i)\|^2}{\|\mathbf{e}(0)\|^2 + \sum_{i=0}^k \|\mathbf{d}(i)\|^2}. \quad (5)$$

本文所研究的有界鲁棒 H_∞ 滤波问题是指:通过

$$\mathbf{H}_{ed}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\tilde{x}}(0, 0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_{\tilde{x}}(1, 0) & \mathbf{g}_d(1, 0) & -\mathbf{L}(1)\mathbf{K}(1)\mathbf{D}_d(1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_{\tilde{x}}(k, 0) & \mathbf{g}_d(k, 0) & \mathbf{g}_d(k, 1) & \mathbf{g}_d(k, 2) & \cdots & \mathbf{g}_d(k, k-1) & -\mathbf{L}(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{D}_d(k) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

选择滤波增益矩阵 $\mathbf{K}(k)$, 使得

$$\|g_{ed}\|_{\infty, [0, k]} < \gamma. \quad (6)$$

3 主要结果(Main results)

下面通过定理给出问题(6)的解.

定理 1 对于系统(1), 假设 $(\mathbf{C}(k+1), \mathbf{A}(k+1, k))$ 可检测, $(\mathbf{A}(k+1, k), \mathbf{B}_d(k))$ 可镇定, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k+1) = & \mathbf{P}(k+1, k)\mathbf{C}^T(k+1)[\mathbf{C}(k+1) \cdot \\ & \mathbf{P}(k+1, k)\mathbf{C}^T(k+1) + \\ & \mathbf{D}_d(k+1)\mathbf{D}_d^T(k+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

为有界鲁棒滤波问题的解, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1, k) = & \mathbf{A}(k+1, k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k+1, k) + \\ & \mathbf{B}_d(k)\mathbf{B}_d^T(k). \end{aligned} \quad (8)$$

而 $\mathbf{P}(k) \geq 0$ 为以下 Riccati 方程的解:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(k+1) = \mathbf{A}(k+1, k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k+1, k) + \\ \mathbf{B}_d(k)\mathbf{B}_d^T(k) - \mathbf{K}(k+1) \cdot \\ [\mathbf{C}(k+1)\mathbf{P}(k+1, k)\mathbf{C}^T(k+1) + \\ \mathbf{D}_d(k+1)\mathbf{D}_d^T(k+1)]^{-1}\mathbf{K}^T(k+1), \\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}, \mathbf{K}(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (9)$$

证 系统(4)的状态转移矩阵为

$$\begin{cases} \Phi(k, i) = \prod_{j=i}^{k-1} [\mathbf{A}(j+1, j) - \mathbf{K}(j+1) \cdot \\ \mathbf{C}(j+1)\mathbf{A}(j+1, j)], \\ \Phi(k, k) = \mathbf{I}, \quad i \leq k-1. \end{cases} \quad (10)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k &= \text{col}\{\tilde{\mathbf{x}}(0), \{\mathbf{d}(i)\}_{i=0}^k\}, \\ \mathbf{e}_k &= \text{col}\{\mathbf{e}(i)\}_{i=0}^k, \\ \mathbf{g}_{ed}(k) &= \\ & [\mathbf{g}_{\tilde{x}}(k, 0) \ \mathbf{g}_d(k, 0) \ \cdots \ \mathbf{g}_d(k, k-1) \\ & \quad - \mathbf{L}(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{D}_d(k)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{g}_{\tilde{x}}(k, 0) = \mathbf{L}(k)\Phi(k, 0), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_d(k, i) &= \mathbf{L}(k)\Phi(k, i+1)[\mathbf{I} - \\ & \mathbf{K}(i+1)\mathbf{C}(i+1)]\mathbf{B}_d(i) - \\ & \mathbf{L}(k)\Phi(k, i)\mathbf{K}(i)\mathbf{D}_d(i), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{K}(0) = \mathbf{0}$.

则

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{H}_{ed}(k)\mathbf{d}_k, \quad (14)$$

其中:

由式(5)和(14)得

$$\|g_{ed}\|_{\infty,[0,k]} = \|H_{ed}(k)\|_2. \quad (16)$$

由式(11)–(13)得

$$[g_{ed}(0) \ 0]g_{ed}^T(j) = L(0)\Phi^T(j, 0)L^T(j), \quad (17)$$

$$[g_{ed}(j) \ 0]g_{ed}^T(i) = L(j)(P(j) - 2K(j)D_d(j) \cdot D_d^T(j)K^T(j))\Phi^T(i, j)L^T(i), \quad (18)$$

$$g_{ed}(i)g_{ed}^T(i) = L(i)P(i)L^T(i). \quad (19)$$

当系统(1)满足 $(C(k+1), A(k+1, k))$ 可检测以及 $(A(k+1, k), B_d(k))$ 可镇定时, 由式(7)得到的 $K(k+1)$ 可使 $A(k+1, k) - K(k+1)C(k+1)A(k+1, k)$ 为指数稳定的^[11–13], 因此, 式(16)–(19)有界, 即 $\exists \gamma > 0$, 使得

$$\|g_{ed}\|_{\infty,[0,k]} = \|H_{ed}(k)\|_2 < \gamma. \quad (20)$$

证毕.

注 1 式(7)中求逆矩阵的维数小于 H_{∞} 滤波算法^[8–10]中求逆矩阵的维数, 因此, 本文算法的计算量会相对较小.

4 在MEMS-INS/GPS中的应用(Application in MEMS-INS/GPS)

4.1 MEMS-INS/GPS的数学模型(Mathematical model of MEMS-INS/GPS)

在MEMS-INS/GPS组合导航系统中, 考虑一组基本的系统状态变量

$$x = (\phi_E, \phi_N, \phi_U, \delta V_E, \delta V_N, \delta V_U, \delta L, \delta \lambda, \delta h, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \nabla_x, \nabla_y, \nabla_z)^T, \quad (21)$$

其中: ϕ_E, ϕ_N, ϕ_U 为姿态角误差, $\delta V_E, \delta V_N, \delta V_U$ 分别为东北天方向的速度误差, $\delta L, \delta \lambda, \delta h$ 分别为纬度、经度和高度误差, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 为陀螺常值零漂, $\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z$ 为加速度计常值零偏.

系统的误差模型表示为

$$\dot{x}(t) = \Phi(t)x(t) + G(t)w(t), \quad (22)$$

其中: $\Phi(t)$ 和 $G(t)$ 均为 15×15 维的时间 t 的有界函数, $w(t)$ 为系统噪声向量.

将INS输出的速度和位置信息与GPS的相应输出信息相减得量测方程

$$y(t) = \begin{bmatrix} V_{INS} - V_{GPS} \\ P_{INS} - P_{GPS} \end{bmatrix} = C(t)x(t) + v(t), \quad (23)$$

其中: V_{INS} 和 V_{GPS} 分别为INS和GPS输出的速度信息; P_{INS} 和 P_{GPS} 分别为INS和GPS输出的位置

信息; $v(t)$ 为量测噪声向量; $C(t) = [I_{6 \times 6} \ 0_{6 \times 9}]$ 为量测矩阵.

由式(22)和式(23)表示的系统可按文献[14]中的离散化方法等价为离散系统.

系统中陀螺和加速度计的参数见表1.

表 1 陀螺和加速度计的参数

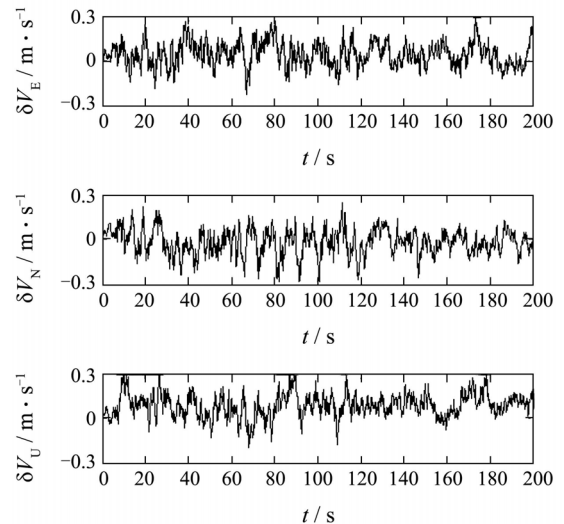
Table 1 The parameters of gyro and accelerometer

	零位误差	噪声
陀螺	20.3(°)/h	50.1(°)/h
加速度计	$5 \times 10^{-3} g$	$5 \times 10^{-3} g$

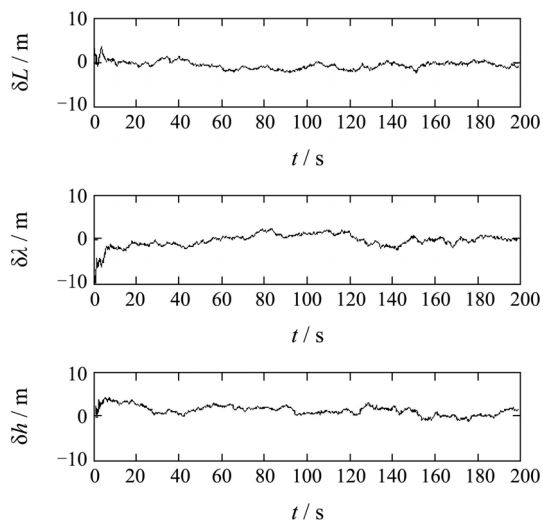
4.2 试验验证(Experimental verification)

用MEMS-INS/GPS实际系统中得到的试验数据, 对本文算法进行离线验证. 陀螺和加速度计的零位误差以及干扰噪声的统计结果见表1. 由于在跑车试验过程中受到温度、力学等环境因素的影响, 器件的噪声特性发生了明显的变化, 陀螺噪声的变化范围是50.1(°)/h~100.3(°)/h, 加速度计噪声的变化范围是 $5 \times 10^{-3} g \sim 5 \times 10^{-2} g$, 并且均为有色噪声. 另外, 由于在野外试验过程中GPS受到了多路径、低信噪比这些因素的影响, 量测噪声也在时刻变化. 其中: 速度噪声的变化范围是0.2 m/s~0.6 m/s, 位置噪声的变化范围是22 m~38 m, 并且均为有色噪声.

用上述试验中得到的数据对本文算法进行离线验证, 所得试验结果见图1. 为了比较, 对于同一组数据, 用文献[10]中的 H_{∞} 滤波算法(以下简称 H_{∞} 滤波算法)得到的结果见图2, 用Kalman滤波算法得到的结果见图3. 表2给出了3种滤波算法运行2000次所需要的时间.



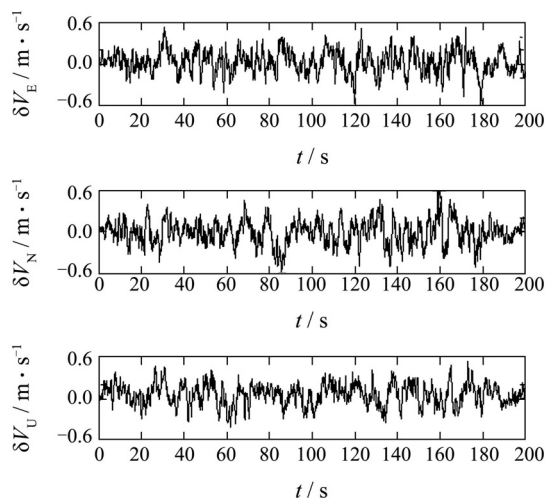
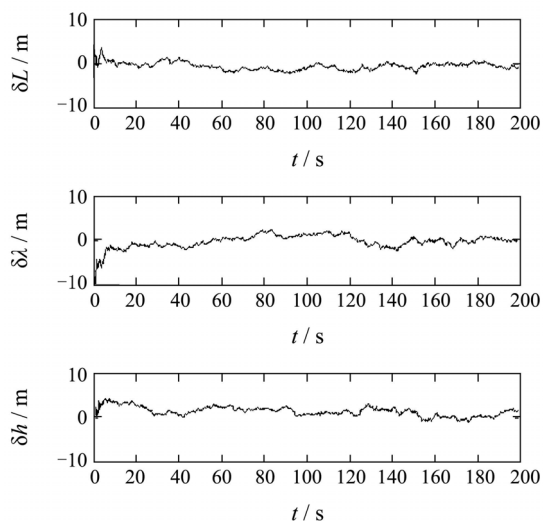
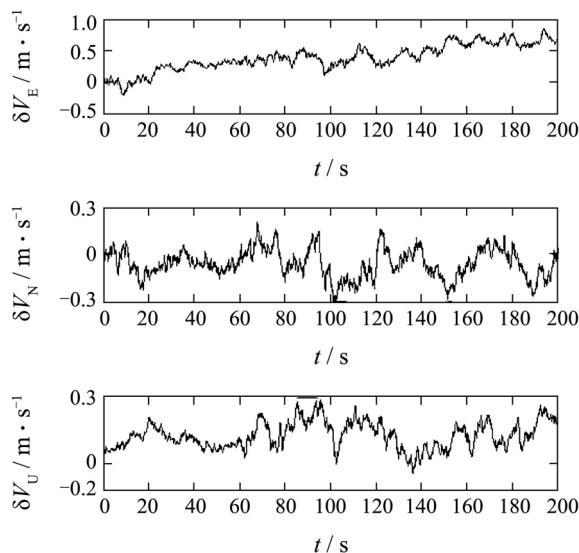
(a) 基于本文算法得到的速度误差



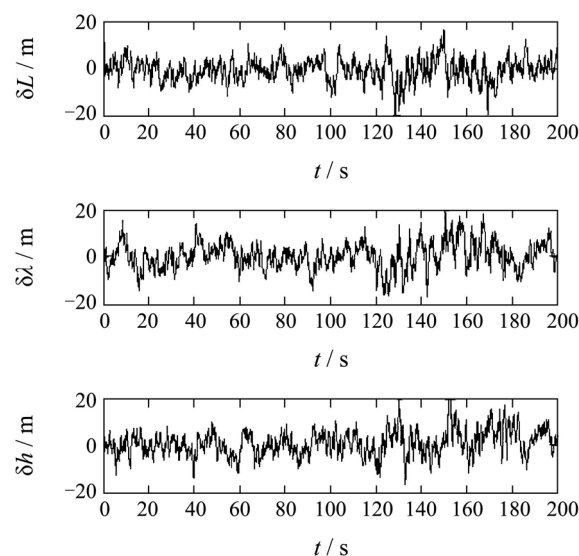
(b) 基于本文算法得到的位置误差

图1 基于本文算法得到的速度误差和位置误差

Fig. 1 Velocity errors and position ones by the proposed algorithm

(a) 基于H ∞ 滤波算法得到的速度误差(b) 基于H ∞ 滤波算法得到的位置误差图2 基于H ∞ 滤波算法得到的速度误差和位置误差Fig. 2 Velocity errors and position errors by the H ∞ filtering algorithm

(a) 基于Kalman滤波算法得到的速度误差



(b) 基于Kalman滤波算法得到的位置误差

图3 基于Kalman滤波算法得到的速度误差和位置误差

Fig. 3 Velocity errors and position errors by the Kalman filtering algorithm

从图1(a)和图1(b)中可以看到,用本文算法得到的速度误差最大值为0.3 m/s,得到的位置误差最大值为7 m.从图2(a)和图2(b)中可以看到,用H ∞ 滤波算法得到的速度误差最大值为0.4 m/s,得到的位置误差最大值为9 m.从图3(a)和3(b)中可以看到,用Kalman滤波算法得到的速度误差最大值超过了1 m/s,得到的位置误差最大值接近20 m.对比图1-3可以发现,当实际系统中陀螺、加速度计和GPS的量测噪声为随机变化的有色噪声时,用本文算法得到的速度和位置误差最小,系统的精度最高.

从表2中可以看到,当滤波算法运行2000次时,Kalman滤波算法所需时间最短,本文算法比

Kalman滤波多用了0.00292 s, 而 H_∞ 滤波算法比本文算法多用了0.37804 s.

表2 3种算法所用时间

Table 2 Time for the three algorithms

算法	本文算法	H_∞ 滤波算法	Kalman滤波算法
时间/s	0.48643	0.86447	0.48351

从精度和时间两方面考虑, 在这3种算法中, Kalman滤波所需时间最短, 但精度最差; H_∞ 滤波的精度略低于本文算法, 但所用时间最长; 本文算法精度最高, 并且所用时间仅比Kalman滤波多了0.00292 s. 因此, 本文算法更适合应用于存在不确定噪声干扰的MEMS-INS/GPS组合导航系统中.

5 结论(Conclusion)

本文针对系统中存在不确定噪声干扰的情况提出了一种新的鲁棒滤波算法. 当系统满足可检测和可镇定的条件时, 从理论上证明了本文算法能够将不确定干扰对估计误差的 H_∞ 范数限制在给定范围内, 从而增强了系统的鲁棒性. 用MEMS-INS/GPS组合导航系统中的实际数据对该算法进行离线验证, 试验结果表明本文算法具有精度高、计算量小的优点.

参考文献(References):

- [1] 曹娟娟, 房建成, 盛蔚. 大失准角下MIMU空中快速对准技术[J]. 航空学报, 2007, 28(6): 1395 – 1400.
(CAO Juanjuan, FANG Jiancheng, SHENG Wei. A fast in-flight alignment method for MIMU under large attitude errors[J]. *Acta Aeronautica Astronautica Sinica*, 2007, 28(6): 1395 – 1400.)
- [2] NOURELDIN A, KARAMAT T B, EBERTS M D, et al. Performance enhancement of MEMS-based INS/GPS integration for low-cost navigation applications[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2009, 58(3): 1077 – 1096.
- [3] YONG Y. *Tightly coupled MEMS INS/GPS integration with INS aided receiver tracking loops*[D]. Alberta: University of Calgary, 2008.
- [4] GENG Y R, WANG J L. Adaptive estimation of multiple fading factors in Kalman filter for navigation applications[J]. *GPS Solutions*, 2008, 12(4): 273 – 279.
- [5] 石静, 缪玲娟, 倪茂林. 一种抗野值自适应滤波算法及在MEMS-SINS/GPS中应用[J]. 宇航学报, 2010, 31(12): 2711 – 2716.
(SHI Jing, MIAO Lingjuan, NI Maolin. An outlier rejecting and adaptive filter algorithm applied in MEMS-SINS/GPS[J]. *Journal of Astronautics*, 2010, 31(12): 2711 – 2716.)
- [6] SHI J, MIAO L J, NI M L. Robust fault detection filter and its application in MEMS-based INS/GPS[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2011, 22(1): 113 – 119.
- [7] ZHOU D H, FRANK P M. Strong tracking filtering of nonlinear time-varying stochastic system with colored noise: application to parameter estimation and empirical robustness analysis[J]. *International Journal of Control*, 1996, 65(2): 295 – 307.
- [8] 陈有容, 袁建平. 一种改进的INS/GPS组合导航鲁棒多重渐消容错滤波算法[J]. 宇航学报, 2009, 30(3): 930 – 934.
(CHEN Yourong, YUAN Jianping. An improved robust multiple fading fault-tolerant filtering algorithm for INS/GPS integrated navigation[J]. *Journal of Astronautics*, 2009, 30(3): 930 – 934.)
- [9] 康国华, 刘建业, 刘瑞华, 等. 自适应闭环 H_∞ 滤波在组合导航系统中的实现研究[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 547 – 555.
(KANG Guohua, LIU Jianye, LIU Ruihua, et al. Realization of adaptive closed-loop H-infinity filter in integrated navigation system[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 547 – 555.)
- [10] HASSIBI B, SAYED A H. Linear estimation in Krein space – Part II: Applications[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41: 34 – 48.
- [11] ANDERSON B D O, MOORE J B. Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time linear systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1981, 19(1): 20 – 32.
- [12] ISAAC Y, URI S. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: H_∞ -optimal linear control and filtering[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11): 1264 – 1271.
- [13] ZHONG M Y, DING S X, DING E L. Optimal fault detection for linear discrete time-varying systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(8): 1395 – 1400.
- [14] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998: 279 – 281.
(QIN Yongyuan, ZHANG Hongyue, WANG Shuhua. *Kalman filter and Integration Navigation Theory*[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998: 279 – 281.)

作者简介:

石 静 (1983—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为组合导航、信息融合及故障检测, E-mail: amyqs@yahoo.cn;

缪玲娟 (1965—), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为惯性定位定向导航系统技术、多传感器组合导航系统技术及新技术、新理论在导航系统中的应用, E-mail: miaolingjuan@bit.edu.cn;

倪茂林 (1963—), 男, 博士, 研究员, 主要研究方向为航天控制、故障检测及鲁棒容错控制, E-mail: niml@bice.org.cn.