

一类多平衡点线性切换系统稳定区域的估计

郭荣伟^{1,2}, 王玉振¹

(1. 山东大学 控制科学与控制工程学院, 山东 济南 250061; 2. 山东轻工业学院 理学院, 山东 济南 250353)

摘要: 本文研究了多平衡点线性切换系统稳定区域的估计问题, 并得到了估计该类系统稳定区域的新结果. 利用分量最终界法, 不仅得到了多平衡点线性切换系统在任意切换路径下稳定区域的估计, 而且得到了多平衡点线性切换系统在停留时间不小于其最小停留时间的任意切换路径下稳定区域的估计. 与现有的结果相比, 新得到的稳定区域的估计更加精确, 在一定程度上减少了估计的保守性. 最后, 数值实例的结果验证了上述结果的正确性和有效性.

关键词: 多平衡点切换系统; 区域稳定分析; 稳定区域; 分量最终界法

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Estimation of stability region for a class of switched linear systems with multiple equilibrium points

GUO Rong-wei^{1,2}, WANG Yu-zhen¹

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;

2. School of Science, Shandong Polytechnic University, Jinan Shandong 250353, China)

Abstract: We investigate the estimation of the stability region of a class of switched linear systems with multiple equilibrium points, and put forward a number of new results in this research. Using the component-wise ultimate-bound method, we estimate the stability region for a switched linear system with multi-equilibrium points when the system is switching around any switching path or around switching paths with dwell time not less than the minimum dwell time. In comparison with the existing results, the obtained estimate of the stability region is more precise and less conservative in the estimation property. Numerical simulation of an illustrative example shows the correctness and effectiveness of the proposed method.

Key words: multi-equilibrium switched system; regional stability analysis; stability region; component-wise ultimate-bound method

1 引言(Introduction)

现实生活中的许多系统都存在切换现象, 即整个系统在几个不同的子系统之间依据环境因素的变化而表现出不同的模态. 最明显的例子就是火车、汽车等机动车在其行进过程中的速度调整, 即在加速或减速中的换档. 切换系统实质上是整个系统在一些不同子系统间进行切换, 但它并非仅仅是一些单一子系统的简单组合, 远比这复杂的多. 在过去的20多年中, 由于切换系统不仅在理论上重要, 而且在实际中具有重大价值, 很多学者对其进行了深入地研究并得到了一系列的重要结果^[1-7], 其中共同Lyapunov函数法(common Lyapunov function, CLF)和多重Lyapunov函数法(multiple Lyapunov function, MLF)是研究切换系统稳定性的重要方法. 对于一个给定的切换系统, 验证其是否具有共同Lyapunov函数是个公开的难题, 目前存在的结果主要针对一些

特殊的线性系统和非线性系统. 对于多重Lyapunov函数法来说, 寻找使整个切换系统在任意切换路径下稳定的最小停留时间是非常困难的. 在文献[8]中, 对一类线性切换系统, 笔者得到了一个求最小停留时间的算法. 与原来的算法^[9]相比, 该算法在某种意义上具有一定的优势.

但是, 目前切换系统的结果都基于这样一个假设, 即所有子系统的平衡点都是相同的, 并且都是原点. 然而, 在实际系统中, 不同子系统的平衡点往往是不相同的, 也不可能通过恰当的坐标变换使所有的平衡点相同, 因此多平衡点切换系统才是描述现实世界的最一般模型. 由于各个子系统的平衡点不同, 上述共同Lyapunov函数法和多重Lyapunov函数法不再适用于多平衡点切换系统, 研究多平衡点切换系统是非常困难的. 同时, 即使各个子系统是渐近稳定的, 多平衡点切换系统也不可能达到渐近稳定,

其轨线将最终进入一个区域. 因此, 研究多平衡点切换系统在任意切换路径下的区域稳定和相应的稳定区域的估计是一件非常具有挑战性的工作.

在文献[10]中, 笔者研究了多平衡点切换系统在任意切换路径下的区域稳定性, 并得到了相应的稳定区域的估计. 由于在估计稳定区域时采用的是类共同Lyapunov函数法, 因此在一般情况下, 得到的稳定区域的估计是比较保守的, 只有在一些特殊情况下, 比如一维、二维的特殊系统, 笔者应用分析的方法得到了多平衡点切换系统的稳定区域.

这里需要说明的是本文给出的多平衡点切换系统的稳定区域的估计是通常的切换系统最终界^[11-12]的推广, 也是通常切换系统在有界扰动下实际稳定(practical stability)^[13]吸引域的推广, 即稳定区域的估计既是最终界, 又是吸引域. 形象地说, 给定一个初始点(离原点比较远的点), 多平衡点切换系统从该初始点出发的轨线将进入或者收敛到一个紧集, 而给定该紧集内的一个初始点, 多平衡点切换系统从该初始点出发的轨线不会穿出这个给定的紧集.

考虑到分量最终界法^[14]在求解通常切换系统在有界扰动下的最终界时表现出了优越性, 即在一般情况下, 对如下的切换系统:

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + E_{\sigma(t)}w(t), \quad (1)$$

其中: $w(t) \in \mathbb{R}^p$ 是未知扰动, 且 $w(t)$ 有界, 即 $w(t) \preceq W$, 其中 W 是已知的常数向量, 利用分量最终界法得到的最终界比用共同Lyapunov函数法得到的最终界更精确, 在很大程度上减少了估计的保守性. 因此, 笔者将分量最终界法应用到求多平衡点切换系统稳定区域的估计中, 得到了多平衡点切换系统稳定区域估计的新结果. 与以前的结果相比, 新得到的稳定区域的估计更加精确, 在一定程度上减少了估计的保守性.

2 预备知识(Preliminaries)

在本节中, 首先给出多平衡点线性切换系统的数学描述, 然后给出多平衡点切换系统区域稳定的结果.

考虑如下的多平衡点切换系统:

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}(x - x_{\sigma(t)}^e), \quad (2)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量, 映射 $\sigma(t): [t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 是一个右连续的常数函数, 称为切换率或者切换路径, 并且 $\sigma(t) = i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ 表示第 i 个子系统起作用, A_i 是第 i 个子系统的系数矩阵并且是Hurwitz的, $x_i^e = (x_{1i}^e, x_{2i}^e, \dots, x_{ni}^e)^T$ 是第 i 个子系统的平衡点, $i \in \mathcal{I}$.

为了研究方便, 假设 x_1^e 和 x_N^e 分别满足如下的条

件:

$$\begin{aligned} x_{1i}^e &\leq x_{ji}^e, \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, N\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_{Ni}^e &\geq x_{ji}^e, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

对于任意的切换路径 $\sigma(t) = i_m \in \mathcal{I} (t \in [t_m, t_{m+1}), m = 0, 1, 2, \dots)$, 切换时间序列 $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty}$ 满足

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots < +\infty.$$

如果 $t_{m+1} = \infty$, 则切换系统(2)的第 i_m 个子系统在 $[t_m, +\infty)$ 上一直起作用. 在这种情况下, 切换系统(2)在 $[t_m, +\infty)$ 上变成了非切换系统, 很显然其是稳定的. 不失一般性, 假设切换路径满足: $t_m \rightarrow +\infty$ 当且仅当 $m \rightarrow +\infty$, 并且当 $t \geq t_0$ 时, 切换系统(2)的所有子系统经常起作用.

注 1 如果 $x_i^e \equiv 0, i \in \mathcal{I}$, 这时切换系统(2)变成了通常的切换系统

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x, \quad (3)$$

即切换系统(2)是通常切换系统(3)的推广.

下面, 引入区域稳定的定义.

定义 1 (区域稳定)^[10] 对任意的初始值 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和任意的切换路径 $\sigma(t)$, $x_{\sigma(t)}(t; t_0, x_0)$ 表示切换系统(2)从初始值 x_0 出发的轨线. 令 $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ 是一个包含该切换系统子系统所有平衡点的一个紧集, $k \in \mathbb{N}$, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dis}(x_{\sigma(t)}(t; t_0, x_0), \Omega_k) = 0$, 则称切换系统(2)在任意的切换路径下在 Ω_k 上是区域稳定的, 并且称 Ω_k 是稳定区域的一个估计(SRR), 其中

$$\begin{aligned} \text{dis}(x_{\sigma(t)}(t; t_0, x_0), \Omega_k) &:= \\ \inf\{|x - y| : \forall x = x_{\sigma(t)}(t; t_0, x_0), \forall y \in \Omega_k\}. \end{aligned}$$

上述所有稳定区域的交集, 即 $\bigcap_k \Omega_k$ 为切换系统(2)在任意切换路径下精确的稳定区域.

注 2 上述稳定区域的估计(SRR) Ω_k 是不唯一的, 并且是很保守的. 也就是说, Ω_k 仅仅是稳定区域的一个粗略估计. 特别地, 如果 $x_i^e \equiv 0, i \in \mathcal{I}$, 这时切换系统(2)变成了通常的切换系统(3), 从而 $\Omega_k = \{0\}, \bigcap_k \Omega_k = \{0\}$. 也就是说, 切换系统(2)的区域稳定变成了通常的切换系统(3)的渐近稳定, 这表明切换系统(2)的区域稳定是通常切换系统(3)渐近稳定的推广.

此外, 还需要指出的是, Ω_k 也是一个最终界, 同时也是吸引集.

在文献[10]中, 作者已经证明了如下结论:

引理 1 对于多平衡点线性切换系统(2), 如果 $A_i (i \in \mathcal{I})$ 具有共同Lyapunov函数 $V_0(x)$, 则多平衡点线性切换系统(2)在任意切换路径下区域稳定, 且相应稳定区域的估计(SRR)为

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : V_0(x - \bar{x}) \leq C\}, \quad (4)$$

其中:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^e, C = \frac{\lambda_1 \lambda_4^2}{\lambda_2^2}, \quad (5)$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 \max_{i \in \mathcal{I}} \|A_i(\bar{x} - x_i^e)\|, \quad (6)$$

$\lambda_i > 0, i = 1, 2, 3$, 对于通常的切换系统(3), 其分别满足如下的不等式:

$$V_0(x) \leq \lambda_1 \|x\|^2, \quad (7)$$

$$\dot{V}_0(x)|_{(i)} = \frac{\partial^T V_0(x)}{\partial x} A_i(x) \leq -\lambda_2 \|x\|^2, i \in \mathcal{I}, \quad (8)$$

$$\left\| \frac{\partial V_0(x)}{\partial x} \right\| \leq \lambda_3 \|x\|. \quad (9)$$

特别地, 如果 $V_0(x) = x^T P x$, 其中 P 是一个正定矩阵, 则相应稳定区域的估计(SRR)为

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - \bar{x})^T P (x - \bar{x}) \leq C_p\}, \quad (10)$$

其中:

$$C_p = 4\lambda_1 \mu^2, \lambda_1 = \lambda_{\max}(P), \quad (11)$$

$$\mu = \max_{i \in \mathcal{I}} \|A_i(\bar{x} - x_i^e)\|, \quad (12)$$

$\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵的最大特征值.

为了应用分量最终界法, 下面引入几个符号: \mathbb{R} 和 \mathbb{C} 分别表示实数集和复数集; 如果 $x(t)$ 是向量函数, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 表示每个分量分别求极限; 给定一个矩阵 M , $|M|$ 和 $\text{Re } M$ 分别表示每个分量取模和实部; 给定两个 n 阶方阵 X 和 Y , $X \preceq Y$ 表示矩阵 X 的每个元素不大于矩阵 Y 对应的元素, 即

$$X \preceq Y, X_{ij} \leq Y_{ij}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (13)$$

对于两个同阶的向量, 定义完全相同. 给定一个 n 阶方阵 X , $\mathcal{M}(X)$ 定义如下

$$\mathcal{M}(X) = \begin{cases} \text{Re } X_{ij}, & i = j, \\ |X_{ij}|, & i \neq j. \end{cases} \quad (14)$$

给定一个矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果矩阵元素 $M_{i,k}$ 满足: 对任意的 $i \neq k, M_{i,k} \geq 0$, 则称 M 是Metzler的, 矩阵 M 是Metzler的当且仅当 $e^{Mt} \succeq 0, t \geq 0$.

下面给出两个引理:

引理 2^[12] 考虑如下的实连续系统:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + v(t), \quad (15)$$

其中: $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, v(t) \in \mathbb{R}^n$, 且满足: 只要 $x(0) \succeq 0$, 就有 $x(t) \succeq 0, t \geq 0$. 设 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是Metzler的, 且满足 $B - A(t) \succeq 0, t \geq 0$. 定义如下的辅助系统:

$$\dot{y} = B y(t) + v(t), \quad (16)$$

则只要 $y(0) \succeq x(0) \succeq 0$, 就有 $y(t) \succeq x(t), t \geq 0$.

引理 3^[12] 考虑如下的实连续系统:

$$\dot{x} = A x(t) + v(t), \quad (17)$$

其中: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是Metzler的, $|v(t)| \in \mathbb{R}^n \preceq w, t \geq$

$0, w$ 是有界的常向量. 定义如下的辅助系统:

$$\dot{y} = A y(t) + w, \quad (18)$$

则只要 $y(0) \succeq x(0)$, 就有 $y(t) \succeq x(t), t \geq 0$.

3 主要结果(Main results)

在本节, 笔者将分量最终界法应用到研究多平衡点切换系统(2)稳定区域的估计, 并给出了本文的主要结果.

定理 1 对于多平衡点线性切换系统(2), 如果存在可逆复矩阵 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足

$$A_i = Q^{-1} A_i Q, \Lambda = \max_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{M}(A_i), \quad (19)$$

$$Z = \max_{i \in \mathcal{I}} |Q^{-1} A_i(\bar{x} - x_i^e)|, \quad (20)$$

其中: $\mathcal{M}(\cdot)$ 是式(14)中定义的算子, \bar{x} 是式(5)中定义的, A_i 是矩阵 A_i 对应的约当标准型, $i \in \mathcal{I}$, 并且 Λ 是Hurwitz的, 则多平衡点切换系统(2)在任意切换路径下区域稳定, 且稳定区域的估计(SRR)为

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{x}| \preceq -|Q| \Lambda^{-1} Z\}. \quad (21)$$

证 首先, 将多平衡点切换系统(2)表示成如下的系统:

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}(x - \bar{x}) + E_{\sigma(t)} w(t), \quad (22)$$

其中: $E_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}, w(t) = (\bar{x} - x_{\sigma(t)}^e)$.

很显然, $w(t)$ 有界, 即 $w(t) \preceq W$, 其中 W 是个有界的常向量. 切换系统(22)具有切换系统(1)的形式, 即多平衡点切换系统(2)在形式上可表示成一个平衡点在 \bar{x} , 并且受到分量有界扰动干扰的切换系统. 因此, 研究切换系统(2)的区域稳定就等价于研究切换系统(22)的实际稳定, 求切换系统(2)稳定区域的估计就是求切换系统(22)的最终界.

根据文献[11]中的结果, 切换系统(22)的最终界为

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{x}| \preceq -|Q| \Lambda^{-1} Z_0\},$$

其中

$$Z_0 = \max_{i \in \mathcal{I}} [\max_{w: |w| \preceq W} |Q^{-1} E_i w|].$$

注意到 $E_i = A_i, w_i = (\bar{x} - x_i^e), i \in \mathcal{I}$, 故 $Z_0 = Z$, 即切换系统(22)的最终界为

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{x}| \preceq -|Q| \Lambda^{-1} Z\}.$$

从而切换系统(2)稳定区域的估计为 Ω . 证毕.

注 3 因为多平衡点切换系统(2)各个子系统的平衡点互不相同, 将其在形式上表示成一个平衡点为 \bar{x} , 并且受到分量有界扰动干扰的切换系统是减少稳定区域的估计保守性的关键. 一般情况下, 应用分量收敛法得到多平衡点切换系统(2)稳定区域的估计比应用引理1得到的区域更加精确, 在一定程度上减少了估计的保守性.

一般地, 当 $A_i (i \in \Lambda)$ 不具有共同Lyapunov函数时, 即当引理1中的 $V_0(x)$ 不存在时, 通过将多重Lyapunov函数法应用到研究多平衡点切换系统(2)的区域稳定中, 得到了如下的定理.

定理 2 对于多平衡点线性切换系统(2), 如果 $A_i (i \in \mathcal{I})$ 具有多重Lyapunov函数 $V_0^{(i)}(x) (i \in \mathcal{I})$, 则多平衡点线性切换系统(2)在停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径下区域稳定, 且稳定区域的估计为

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i, \quad (23)$$

其中:

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : V_0^{(i)}(x - \bar{x}) \leq C_i\}, \quad (24)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^e, C_i = \frac{\lambda_1^{(i)}(\lambda_4^{(i)})^2}{(\lambda_2^{(i)})^2}, \quad (25)$$

$$\lambda_4^{(i)} = \lambda_3^{(i)} \|A_i(\bar{x} - x_i^e)\|, i \in \mathcal{I}, \quad (26)$$

$\lambda_j^{(i)} > 0, j = 1, 2, 3, i \in \mathcal{I}$, 对于通常的切换系统(3), 其分别满足如下的不等式:

$$V_0^{(i)}(x) \leq \lambda_1^{(i)} \|x\|^2, \quad (27)$$

$$\dot{V}_0^{(i)}(x)|_{(i)} = \frac{\partial^T V_0^{(i)}(x)}{\partial x} A_i x \leq -\lambda_2^{(i)} \|x\|^2, \quad (28)$$

$$\left\| \frac{\partial^T V_0^{(i)}(x)}{\partial x} \right\| \leq \lambda_3^{(i)} \|x\|, i \in \mathcal{I}, \quad (29)$$

τ_0 是通常切换系统 $\dot{x} = A_{\sigma(t)}x$ 的最小停留时间.

证 令 $V_i(x) = V_0^{(i)}(x - \bar{x}) - C_i$, 很显然 $V_i(x) \leq 0, x \in \Omega_i$, 且 $V_i(x) > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_i$. 又

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x)|_{(i)} &= \frac{\partial^T V_0^{(i)}}{\partial x} A_i(x - x_i^e) = \\ & \frac{\partial^T V_0^{(i)}}{\partial x} A_i(x - \bar{x}) + \frac{\partial^T V_0^{(i)}}{\partial x} A_i(\bar{x} - x_i^e) \leq \\ & -\lambda_2^{(i)} \|x - \bar{x}\|^2 + \lambda_4^{(i)} \|x - \bar{x}\| = \\ & -g_i(x - \bar{x}), \end{aligned}$$

其中 $g_i(x - \bar{x}) = \lambda_2^{(i)} \|x - \bar{x}\|^2 - \lambda_4^{(i)} \|x - \bar{x}\|$.

再令 $S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x - \bar{x}) \leq 0\}$. 很显然, 如果 $g_i(x - \bar{x}) \leq 0$, 则 $\lambda_2^{(i)} \|x - \bar{x}\|^2 - \lambda_4^{(i)} \|x - \bar{x}\| \leq 0$, 因此

$$\|x - \bar{x}\| \leq \frac{\lambda_4^{(i)}}{\lambda_2^{(i)}}.$$

根据不等式(27), 得到 $V_0^{(i)}(x - \bar{x}) \leq \lambda_1^{(i)} \|x - \bar{x}\|^2 \leq \lambda_1^{(i)} \frac{(\lambda_2^{(i)})^2}{(\lambda_2^{(i)})^2} = C_i$. 也就是说, 如果 $x \in S_i, i \in \mathcal{I}$, 则 $x \in \Omega$. 因此

$$\bigcup_{i=1}^N S_i \subseteq \Omega,$$

且

$$\dot{V}_i(x)|_{(i)} = -g_i(x - \bar{x}) < 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \quad (30)$$

其中 $i \in \mathcal{I}$.

另一方面, 根据文献[8]中的结果, 对于停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径, 通常的切换系统 $\dot{x} = A_{\sigma(t)}x$ 是渐近稳定的, 即对于停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径

$$V_0^{(i)}(x_{k+1}) \leq V_0^{(i)}(x_k), i \in \mathcal{I}, \quad (31)$$

从而

$$V_i(x_{k+1}) \leq V_i(x_k), i \in \mathcal{I}. \quad (32)$$

于是, 对于上述区域 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 和停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径, 不等式(30)恒成立.

因此, 对于停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径, 多平衡点切换系统(2)是区域稳定的, 且 Ω 是一个稳定区域的估计. 证毕.

根据定理2并结合定理1的证明过程, 得到如下的结果.

定理 3 对于多平衡点线性切换系统(2), 如果存在一族可逆的复矩阵 $Q_i \in \mathbb{C}^{n \times n} (i \in \mathcal{I})$ 满足

$$\Lambda_i = Q_i^{-1} A_i Q_i, \bar{\Lambda}_i = \mathcal{M}(\Lambda_i), \quad (33)$$

$$Z = \max_{i \in \mathcal{I}} |Q_i^{-1} A_i(\bar{x} - x_i^e)|, \quad (34)$$

其中: $\mathcal{M}(\cdot)$ 是式(14)中定义的算子, \bar{x} 是式(5)中定义的, Λ_i 是矩阵 A_i 对应的约当标准型, 且 $\bar{\Lambda}_i$ 是Hurwitz的, $i \in \mathcal{I}$, 则多平衡点切换系统(2)在停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径下区域稳定, 且稳定区域的估计(SRR)为

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i, \quad (35)$$

其中:

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{x}| \leq -|Q_i| \bar{\Lambda}_i^{-1} Z\}, \quad (36)$$

τ_0 是通常切换系统 $\dot{x} = A_{\sigma(t)}x$ 的最小停留时间.

证 根据定理2, 对于停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径, 多平衡点切换系统(2)是区域稳定的. 接下来, 本文应用分量最终界法求多平衡点切换系统(2)稳定区域的估计.

首先, 将多平衡点切换系统(2)在形式上可表示成切换系统(22).

然后, 做变换 $x = Q_i z$, 则系统(22)的第 i 个子系统将变为

$$\dot{z} = \Lambda_i(z - \bar{z}) + Q_i^{-1} E_i w(t), i \in \mathcal{I}, \quad (37)$$

其中 $\bar{z} = Q_i^{-1} \bar{x}$.

由于 $z(t)$ 可能是复向量, 设 $z(t) - \bar{z} = e^{j\theta(t)} \rho(t)$, 其中 $\rho(t)$ 是复数 $z(t) - \bar{z}$ 的模, j 是虚数单位, 即 $j^2 = -1, \theta(t)$ 是一对角矩阵, 即

$$\theta(t) = \text{diag}\{\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t)\}, \quad (38)$$

$$\theta_k(t) = \arg\{z_k(t)\}, k = 1, 2, \dots, n, \quad (39)$$

显然 $|z(t) - \bar{z}| = \rho(t)$. 将其代入式(37)中得到

$$\begin{aligned} \dot{z} &= j e^{j\theta(t)} \dot{\theta}(t) \rho(t) + e^{j\theta(t)} \dot{\rho}(t) = \\ &A_i e^{j\theta(t)} \theta(t) + Q^{-1} E_i w(t). \end{aligned} \quad (40)$$

等式(40)两边同左乘以 $e^{-j\theta(t)}$ 得到

$$\begin{aligned} j\dot{\theta}(t)\rho(t) + \dot{\rho}(t) &= \\ e^{-j\theta(t)} A_i e^{j\theta(t)} \rho(t) + e^{-j\theta(t)} Q_i^{-1} E_i w(t). \end{aligned} \quad (41)$$

等式(41)两边取实部得到

$$\dot{\rho}(t) = N_i(t)\rho(t) + \gamma_i(t), \quad (42)$$

其中:

$$N_i(t) = \text{Re}\{e^{-j\theta(t)} A_i e^{j\theta(t)}\}, \quad (43)$$

$$\gamma_i(t) = \text{Re}\{e^{-j\theta(t)} Q_i^{-1} E_i w(t)\}, i \in \mathcal{I}. \quad (44)$$

根据式(38)–(39), 很容易得到

$$[N_i(t)]_{l,k} = \begin{cases} \text{Re}\{[A_i]_{l,k}\}, & \text{如果 } l = k, \\ \text{Re}\{e^{-j(\theta_i(t) - \theta_k(t))} [A_i]_{l,k}\}, & \text{如果 } l \neq k, \end{cases}$$

因此 $N_i(t) \preceq \mathcal{M}(A_i)$. 又因为 $\mathcal{M}(A_i) \preceq \bar{A}_i$, 故 $N_i(t) \preceq \bar{A}_i$, 显然 $|\gamma_i(t)| \preceq Z$.

定义两个辅助系统:

$$\dot{y}(t) = \bar{A}_i y(t) + \gamma_i(t), \quad (45)$$

$$\dot{Y}(t) = \bar{A}_i Y(t) + Z. \quad (46)$$

对于系统(42)和(45), 根据引理2, 得到 $\rho(t) \preceq y(t)$. 另一方面, 对于系统(45)和(46), 根据引理3, 只要 $y(0) \succeq \rho(0)$, 就有 $Y(t) \succeq \rho(t)$. 故

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} |Q_i^{-1}(x(t) - \bar{x})| &= \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \\ \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) &= -\bar{A}_i^{-1} Z. \end{aligned} \quad (47)$$

因此, 切换系统(22)的第 i 个子系统的最终界为

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{x}| \preceq -|Q_i| \bar{A}_i^{-1} Z\}.$$

另一方面, 对于停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径, 切换系统(22)每个子系统是稳定的, 且最终界为上述 $\Omega_i, i \in \mathcal{I}$.

因此, 对于停留时间 $\tau \geq \tau_0$ 的任意切换路径, 多平衡点切换系统(2)是区域稳定的, 且 Ω 是一个稳定区域的估计. 证毕.

注4 如果 $V_i \equiv V, i \in \mathcal{I}$, 则多平衡点切换系统(2)在任意切换路径下是区域稳定的, 且 Ω 是一个稳定区域的估计. 一般地, $V_i(i \in \mathcal{I})$ 互不相等, 或者不全相等, 因此定理3比定理1的应用范围更广. 但是, 应用定理3的关键是找到满足上述条件的最小停留时间 τ_0 . 对于一类切换系统, 例如对满足 $\|e^{A_i t}\| \leq L_i e^{\alpha_i t}$ 的线性系统, 其中 $L_i > 0, \alpha_i < 0, i \in \mathcal{I}$, 应用笔者以前的结果^[8]可以得到.

4 例子(Example)

在本节, 将给出一个例子来验证上述结果的正确性和有效性.

例1 考虑如下的多平衡点切换系统:

$$\dot{x} = A_i(x - x_i^e), \quad (48)$$

其中: $i \in \mathcal{I} = \{1, 2\}, x_1^e = (0, 0), x_2^e = (1, 2)$ 且

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2.2 & 0.3 \\ -0.8 & -0.8 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1.4 & -0.9 \\ 2.4 & -5.6 \end{pmatrix}.$$

很容易得到, 存在可逆矩阵 P 使得 A_1, A_2 同时对角化, 即存在 $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, 满足

$$P^{-1} A_1 P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} A_2 P = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

显然, A_1, A_2 具有共同二次Lyapunov函数

$$V(x) = x^T x.$$

根据引理1, 得到

$$\lambda_1 = 1, \mu = 3.9962, C = 63.8785,$$

于是稳定区域的估计为

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - \bar{x}\| \leq 7.9924\}.$$

下面应用分量最终界法求上述切换系统稳定区域的估计.

由于 A_1, A_2 具有共同二次Lyapunov函数

$$V(x) = x^T x,$$

令 $Q = P$, 很显然 Q 满足定理1的条件. 根据定理1, 得到

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A = \max_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{M}(A_i) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Z = \max_{i \in \mathcal{I}} |Q^{-1} A_i (\bar{x} - x_i^e)| = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

根据定理1, 一个稳定区域的估计为

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - \bar{x}_1| \leq 1.35, |x_2 - \bar{x}_2| \leq 2.9\}.$$

很显然, $\Omega_2 \subset \Omega_1$, 即应用分量最终界法得到多平衡点线性切换系统(2)稳定区域的估计比应用引理1得到的结果更精确, 在一定程度上较少了估计的保守性.

下面进行数值仿真, 选择初值: $[x_1(0) \ x_2(0)] = [5.1 \ -10]$, 切换路径

$$\sigma(t) = \begin{cases} 2, & t \in [t_{2m}, t_{2m+1}), \text{ 且} \\ & t_{2m+1} - t_{2m} = 0.1 \times \text{rand}; \\ 1, & t \in [t_{2m+1}, t_{2m+2}), \text{ 且} \\ & t_{2m+2} - t_{2m+1} = 0.1 \times \text{rand}, \end{cases}$$

其中: $m = 0, 1, 2, \dots$, $\text{rand} \in (0, 1)$ 是一个随机数. 仿真结果见图1(其中圆形是用引理1得到的稳定区域的估计, 矩形是应用定理1得到的稳定区域的估计).

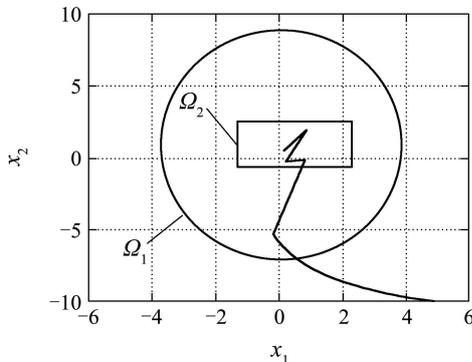


图1 稳定区域的估计和切换系统的轨线

Fig. 1 The region and the state response

从图1可看出, 应用分量最终界法得到的稳定区域的估计比应用共同Lyapunov函数法得到的结果更精确, 在一定程度上减少了估计的保守性. 仿真结果表明定理1在求多平衡点切换系统稳定区域的估计是非常有效的.

5 结论(Conclusions)

本文研究了多平衡点线性切换系统稳定区域的估计问题. 通过将分量最终界法应用到研究多平衡点线性切换系统稳定区域的估计问题中, 笔者不仅得到了上述切换系统在任意切换路径下稳定区域的估计, 而且得到了上述切换系统在停留时间不小于其最小停留时间的任意切换路径下稳定区域的估计. 与以前的结果相比, 得到的稳定区域的估计更加精确, 在一定程度上减少了估计的保守性. 数值实例的结果验证了上述结果的正确性和有效性.

参考文献(References):

- [1] BRANICKY M. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 – 482.
- [2] CHENG D, LIN Y, WANG Y. Controllability of switched bilinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(4): 511 – 515.
- [3] CHENG D, GUO L, LIN Y, et al. Stabilization of switched linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 661 – 666.
- [4] DAAFOUZ J, RIEDINGER P, IUNG C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1883 – 1887.
- [5] LIBERZON D, MORSE A. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. *IEEE Control System Magazine*, 1999, 19(5): 59 – 70.
- [6] LIBERZON D, TEMPO R. Common Lyapunov functions and gradient algorithms[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(6): 990 – 994.
- [7] LIN H, ANTSAKLIS P. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(1): 1 – 15.
- [8] GUO R, WANG Y. Stability analysis for a class of switched linear systems[J/OL]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(2): 1 – 10. DOI: 10.1002/asjc.365.
- [9] NI W, CHENG D, HU X. Minimum dwell time for stability and stabilization of switched linear systems[C] // *Proceedings of the 7th World Conference on Intelligent Control and Automation*. Piscataway, NJ: IEEE, 2008: 4109 – 4115.
- [10] GUO R, WANG Y. Region stability analysis for switched linear systems with multiple equilibria[C] // *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2010: 986 – 991.
- [11] HAIMOVICH H, SERON M. Componentwise ultimate bound and invariant set computation for switched linear systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(11): 1897 – 1901.
- [12] HAIMOVICH H, SERON M. Componentwise ultimate bound computation for switched linear systems[C] // *Proceedings of the 28th Chinese Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2009: 16 – 18.
- [13] XU X, ZHAI G. Practical stability and stabilization of hybrid and switched systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1897 – 1903.

作者简介:

郭荣伟 (1979—), 男, 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为非线性切换系统的稳定分析与控制设计, E-mail: rwguo@mail.sdu.edu.cn;

王玉振 (1963—), 男, 教授, 目前研究方向为非线性切换系统的稳定分析与控制设计、多智能体系统、布尔网络, E-mail: yzwang@sdu.edu.cn.