

基于反馈校正原理的非对称旅行商问题的自收敛优化算法

白杰¹, 朱俊², 杨根科¹, 潘常春¹

(1. 上海交通大学自动化系, 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240;

2. 江苏骏龙电力科技股份有限公司, 江苏靖江 214500)

摘要: 针对非对称旅行商问题(ATSP), 提出基于反馈校正原理的自收敛求解算法框架. 该方法核心是依据ATSP问题松弛模型的对偶关系推断与ATSP最优解无关弧集合的弧排除算法. 该算法框架以ATSP问题的初始弧集合作为“参考输入”, 以ATSP最优解的上下界求解算法作为“控制对象”, 以弧排除算法作为“反馈校正控制器”, 其“反馈输入”是“控制对象”的输出差值. 算法迭代过程中, 上下界差值缩小, 排除弧集合增加, 算法呈现出自收敛性. 该框架集成了数学规划方法和启发式算法的优点, 论文从理论证明和仿真分析说明了该自收敛算法的有效性.

关键词: 非对称旅行商问题; 组合优化; 蚁群算法; 弧排除算法

中图分类号: TP273

文献标识码: A

A self-convergent algorithm for the asymmetric traveling salesman problem based on feedback adjustment mechanism

BAI Jie¹, ZHU Jun², YANG Gen-ke¹, PAN Chang-chun¹

(1. Department of Automation; Key Laboratory of System Control and Information Processing, Ministry of Education of China, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. Jiangsu Jun-Long Electrical Technology CO., Ltd., Jingjiang Jiangsu 214500, China)

Abstract: A novel algorithmic framework based on the feedback adjustment mechanism is proposed to solve the asymmetric traveling salesman problem (ATSP). The main idea of the algorithm is to continuously exclude arcs not belonging to the optimal solution, using the dual information of the relaxed ATSP problem. The initial arc-set is regarded as the “reference input”; the lower-bound solver and the upper-bound solver are treated as the “controlled plant”; the algorithm for excluding arcs not belonging to the optimal solution is considered the “feedback controller”, to which the feedback input is the difference of the outputs from the “controlled plant”. During the process of iterations, with the gap between the lower-bound and the upper-bound is reduced gradually, the cardinality of the excluding arcs will be augmented which guarantees the algorithm of self-convergence to the optimal solution. This work integrates the mathematical programming and the heuristic method, the superiority of which over an isolated single method is shown theoretically and illustrated computationally, demonstrating the efficiency.

Key words: asymmetric traveling salesman problem; combinatorial optimization; ant colony-optimization; arc-excluding algorithm

1 引言(Introduction)

非对称旅行商问题(asymmetric traveling salesman problem, ATSP)是目前组合优化问题研究的最热门的开放问题之一. 它的重要性表现在两个方面: 从理论研究来看, 由于ATSP是一类最基本的NP-Complete问题, 因此对这类问题的研究可以推广到更加复杂的NP-Hard问题, 如多旅行商问题(MTSP)^[1]、车辆调度问题(CVRP)^[2]、离散批量计划问题(DLSP)^[3]等; 从实际应用的观点看, 很多工程问题都可以归结为此类问题, 如冶金或者化工生产

中的炉次调度^[4-5]、钢铁生产中的批量轧制调度问题等^[6-7].

目前对于ATSP问题的研究算法主要有两个方向: 1) 数学规划方法, 以寻找最优解为目的, 主要方法有: 分支定界法(branch and bound)、列生成(column generation)算法、多面体(polyhedral approach)分析等^[8-10]; 2) 启发式方法, 以寻求满意解或近优解为目的, 主要成果有meta-heuristic算法^[11-13]. 数学规划方法是基于精确的数学模型的求解, 能够得到问题的最优解或者比较接近最优解的次优解,

但是计算复杂度很高,这对于大规模问题是难以接受的.而启发式方法则比较灵活,一般来讲是多项式算法,但是对于解的质量如何无法判断,这就类似于黑箱操作.这就需要能够对解的质量和运行时间做一个有效的折衷.集成数学规划与启发式算法的优点在于,通过数学分析获得问题内在的规律,能够指导启发式算法的搜索.当时间充分时可以给出最优解,当时间紧迫时,可以给出带界估计的近优解.数学规划方法通常是采用逼近的方法,即将求解一个难问题简化为求解多个简单问题.因此,在这个过程中,获得的是关于原始问题下界(最小化问题)的一些信息.而启发式算法通常只搜索原始问题的可行域,获得的是原始问题上界的信息.本文的设计目的是同时利用上界、下界信息,从全局上来加速算法向最优解的收敛.

从反馈校正控制原理出发,设计了自收敛优化算法框架.反馈校正控制系统中,控制器对受控对象施加控制作用,依据受控量的反馈信息,用来不断校正控制量,从而实现对被控量进行控制的任务.基于这个原理,本文设计了以弧排除算法为核心的ATSP求解框架如下:

① 该框架以ATSP问题的全部可行弧集合作为“参考输入”;

② 以ATSP最优解的上界(可行解)算法和下界(估计)算法作为“受控对象”,“受控对象”的输入为ATSP最优解的潜在可行弧集,其输出为上、下界差值,系统控制目标是使得上下界差值为零(当输出为零或很小时,则找到最优解或近优解);

③ 若“受控对象”输出不为零或比较大,则以弧排除算法作为“校正控制器”,计算出与ATSP最优解无关的弧集,并从“参考输入”中剔除这些弧集,则剩余的弧集合(也即最优解潜在可行弧集)重新输入到“受控对象”,实现迭代计算.

注意到弧排除算法是依据ATSP问题松弛模型对偶关系推断ATSP最优解无关弧集合的新方法.反馈校正框架的收敛性可以从两方面体现:① 通过上、下界差值“反馈”给“校正控制器”的弧排除算法,可有效地缩小上、下界算法的搜索空间.② 搜索空间的缩小反过来加速上、下界算法的收敛速度,并缩小上、下界差值.这两种因素相互作用,相互影响,算法是自收敛的.随着这个过程不断的迭代,最终能够加速找到最优解.该方法以对偶原理为基础,以启发式方法为辅助,将两者集成在一个统一的框架之中.该算法框架将从理论上证明,无论是收敛速度或者求解质量上,其都优于独立使用一种算法.

2 ATSP问题模型(Models of ATSP problem)

ATSP问题的数学模型可以用图论描述为:对一个完全图 $G = (V, A)$,其中: $V = \{1, \dots, n\}$ 是图中

节点的集合, $A = \{(i, j) | i \in V, j \in V\}$ 是连接两节点的弧集合, c_{ij} 是弧 $(i, j) \in A$ 的权值(其中 $c_{ii} = \infty, \forall i \in V$).求

$$C^* = \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij}, \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1,$$

$$S \subset \{1, 2, \dots, n\}, 2 \leq |S| \leq n - 2, \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i, j \in A, \quad (5)$$

ATSP问题是NP-Hard的.

3 算法原理及其实施(The principle and realization of the algorithm)

3.1 基本原理(Basic principle)

一个最小化组合优化问题(COP)通常可描述为一个三元组 $P = (S, f, \Omega)$,其中: $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ 是全体候选解集合; $f(s_i)$ 是 s_i 对应的目标函数; Ω 是约束集,目的是在 s 中寻找出满足 Ω 的最优解 s^* ,使得

$$f(s^*) = \min(s_i), \forall s_i \in S, s_i \text{ 满足 } \Omega.$$

组合优化问题的解都是由一些元素构成,比如ATSP的解是一个哈密顿路径,它是由一些弧所构成的,如果弧变化了或者弧所在位置变化了,所构成的解也就不同了.因此,可以从解的元素集来定义组合优化问题:令 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{|A|}\}$ 为组合优化问题 $P = (S, f, \Omega)$ 的解元素(component)空间,一个候选解可以看作是定义在 A 中的一个序列,因此候选解集 S 可以通过集合 A 来定义,即 $S = \{s = \langle a_{[1]}, a_{[2]}, \dots, a_{[i]}, \dots \rangle | a_{[i]} \in A\}$,其中 $[i]$ 表示第 i 个位置.

解空间 s 和解元素空间 A 有着极大的关系,如果能减少 A 的元素个数,就能大大缩小 s ,这就是本算法的出发点.图1给出了算法的整体框架.图1中:下界生成器产生下界(LB),上界生成器产生上界(UB),解元素排除过程(component pricing out)可看作为一个过滤装置,通过该装置将一些不属于最优解或者没有必要搜索的解元素分离出来,并在下一步运行中排除这些元素.从而减少算法的搜索空间,加速整个算法的收敛,减少GAP.因此,在整个算法过程中,如何准确而又快速的能够排除出这些解元素将是反馈校正算法成败的关键,但是对于不同的优化问题都有各自不同的特点,因此其解元素排除的过程也都因问题而异.

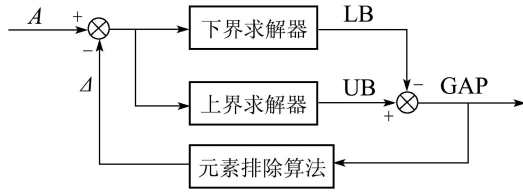


图1 基于反馈校正原理的优化算法基本框架

Fig. 1 A fundamental framework based on feedback adjustment mechanism

3.2 ATSP问题自收敛算法原理及其实现(The principle and realization of automatic convergence algorithm on ATSP problems)

对于ATSP问题, 下界生成器采用基于分配问题(AP)松弛的分支定界(B&B)框架, 即将约束(4)松弛后, 问题(1)–(5)转化为一个简单的分配问题, 通过求解一系列的AP问题最终来获得ATSP的最优解. 上界生成器采用蚁群算法(ACO)^[13], 图2给出了求解ATSP问题具体实现的算法框架.

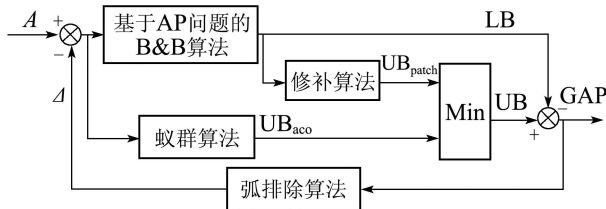


图2 ATSP问题反馈校正优化算法实现框架

Fig. 2 An implementation with feedback adjustment mechanism for ATSP

ACO和B&B主要用于分别提供ATSP最优解的上下界, 采用ACO算法的原因有两个方面: i) ACO已被很多学者成功应用到解各类组合优化问题^[14–16], 而且其全局收敛性能够有效的保证^[17–18]. ii) ACO本质上属于构造型随机优化算法, 解元素空间的大小与ACO收敛速度有着直接的关系. 尽管ACO算法已经有很多变形, 但是主要的工作是基于不同问题的ACO算法设计或者ACO与其他算法的混合算法, 对于ATSP问题的求解, ACO算法仍以文献[13]为最佳. B&B算法是一种确定性算法^[8], 能够求出最优解, 但需要的时间无法估计. 而修补算法(PATCH)算法是由Karp^[19]提出, 用于修复AP问题的产生不可行解为ATSP可行解. 本研究的目的在于, 通过算法之间的信息交换来简化问题, 从而提升效率, 而不是分别对ACO算法与B&B算法流程本身来改进.

3.3 弧排除算法(Arc elimination algorithm)

弧排除过程是整个反馈校正算法框架中最重要的一个环节, 其主要作用是降低解空间维数. 对于ATSP问题, 文献[8]给出了如下计算公式:

$$\Delta_1 = \{(i, j) \in A | \bar{c}_{ij} \geq UB - LB_0\}, \quad (6)$$

其中: LB_0 是式(1)–(3)(5)构成的原始分配问题最优解目标值, UB 为当前的最好解的目标值, $\bar{c}_{ij}$ 是原始分配问题的简约成本(reduced cost). 根据线性规划对偶理论有 $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - u_j$; 而 u_i, u_j 分别对应于式(2)–(3)在分配问题中的对偶变量. 总结文献[8], 有如下引理1:

引理1 后续迭代寻优路径中可排除 Δ_1 中的弧.

式(6)给出了计算公式简单易于实施, 但是对于增加成本的下界估计相对比较简单. 因此, 在式(6)基础上, 给出了一个更紧凑成本增加的下界估计, 则排除弧的计算公式变为

$$\Delta_2 =$$

$$\{(i, j) \in A | \bar{c}_{ij} + \bar{d}_{col^*[j], row^*[i]} \geq UB - LB_0\}, \quad (7)$$

其中: 向量 col^*, row^* 是原始分配问题的最优解, $col^*[j]$ 表示第 j 列对应的行, $row^*[i]$ 表示第 i 行对应的列, $\bar{d}_{s,t}$ 是定义在图 $\bar{G}$ 上的两个节点 s, t 的最短距离, $\bar{G}$ 称之为原始分配问题的剩余图(residual graph). 上述结论, 可归纳为如下定理1:

定理1 后续迭代寻优路径中可排除式 Δ_2 的弧.

证 为了清楚的说明这个结论, 需要了解分配问题剩余图的概念. 首先将一个分配问题映射成一个二分图中的最佳匹配问题(weighted bipartite matching problem), 如图3(a)所示, 用 $U = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示行节点和 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示列节点, 最佳匹配问题就是为每个在 U 中的节点匹配一个在 V 中的节点, 使得匹配成本最低, 且这样的匹配中, 行节点和列节点是一一对应的. 假设已经获得该问题的最佳匹配 X_{opt} , 这个匹配 X_{opt} 对应于原始分配问题的最优解 col^*, row^* , 且这个最佳匹配 X_{opt} 的成本为 $C(X_{opt}) = LB_0$, 其中

$$C(X) = \sum_{(g,h) \in X} c_{g,h}.$$

本文目的是通过下界的信息, 来获得当某条弧 $(i, j) \notin X$ 时, 它是否能够存在于ATSP问题最优解之中. 同式(6)的证明类似, 采用反证法, 如果某个匹配 X 必须包括弧 (i, j) , 则原匹配 X 中, 存在原本 (k, j) 和 $(i, l) \in X$ 的弧, 必定不能存在于 X 中, 其中: $k = col^*[j] \in U, l = row^*[i] \in V$ (见图3(a)).

对于行节点 k 和列节点 l 都需要重新匹配, 根据分配问题的线性规划理论^[20], 重新匹配的最小成本等价于节点 $k \rightarrow l$ 在剩余图 $\bar{G}$ 上的最短路径, 如图3(b)所示. 剩余图 $\bar{G}$ 的定义如下: $\bar{G} = (U \cup V, \bar{D} \cup \bar{R})$, 其中: $U \cup V$ 为节点集, $\bar{D} \cup \bar{R}$ 为弧集, 其中 $\bar{D}$ 为

正向弧集:

$$\tilde{D} = \{(g, h) | g \in U, h \in V, (g, h) \in A\} \setminus \{(k, j), (i, l)\},$$

$$\bar{c}_{g,h} = c_{g,h} - u_g - v_h, (g, h) \in \tilde{D},$$

$\tilde{R}$ 为逆向弧集:

$$\tilde{R} = \{(h, g) | h \in V, g \in U, (g, h) \in X\} \setminus \{(k, j), (i, l)\},$$

$$\bar{c}_{h,g} = 0, (h, g) \in \tilde{R}.$$

容易得见, 节点 $k \rightarrow l$ 在 $\bar{G}$ 上的每一条路径(除路径 (k, l) 外)都是在 $\tilde{D}$ 和 $\tilde{R}$ 交替形成. 将 $\{(k, j), (i, l)\}$ 排除在 $\bar{G}$ 外, 使得弧 (j, i) 不可能存在于节点 $k \rightarrow l$ 在 $\bar{G}$ 上的最短路径之中. 这样一来对于新的匹配 X , 其增加的成本有如下公式:

$$C(X') - C(X_{\text{opt}}) \geq \bar{c}_{ij} + \bar{d}_{k,l}. \quad (8)$$

等号成立时, X 为包含 (i, j) 的最佳匹配. 而包含 (i, j) 的最佳匹配的成本只是包含 (i, j) 的 ATSP 最优解目标值的下界, 如果式(7)满足, 即包含 $(i, j) \in \Delta_2$ 的 ATSP 最优解目标值一定不低于当前上界(可行解的目标值), 因此如果要找比当前解更好的解, 这些弧可以不必考虑. 证毕.

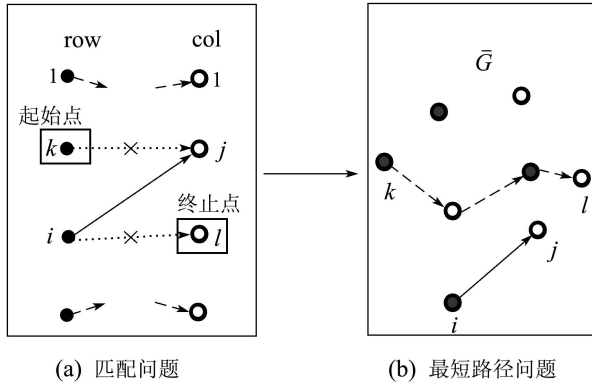


图3 弧排除过程的图例说明

Fig. 3 A graphic illustration for arc-excluding

需要说明的是: $\bar{d}_{k,l}$ 的求解过程实际上就是求解 AP 问题的基于最短路径的对偶方法, 此处只不过是利用对偶信息来排除一些弧. 由于 $\bar{c}_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in \tilde{D} \cup \tilde{R}$, 且是整数, 由 Dijkstra's 算法, 其解最短路径的复杂度为 $O(n^2)$.

4 优化算法的性能分析(Analysis of character of optimization algorithm)

算法的性能分析主要是指算法能否快速的寻优的过程, 通常包含: ① 算法初值的选取对算法性能的影响, 即初始值的鲁棒性; ② 算法迭代过程的动力学分析, 即算法的收敛性分析. 这里考虑算法框架的总体性能, 除了框架中单个算法本身的性能影响到整体算法性能的发挥, 初始上、下界的取值对于

整个算法的影响还是很大的. 下面从两个方面分析算法的性能.

4.1 初始上、下界的选取(Selection of the initial upper and lower bounds)

初始下界 LB_0 的选取主要依靠求解一个原始的分配问题, 初始上界主要依靠 PATCH 算法. 对于随机 ATSP 问题, 引用文献[19, 21] 结论有如下引理2:

引理 2 如果一个 $n \times n$ 成本矩阵 C , 它的每个元素都是均匀分布在 $[0, 1]$, 那么当 $n \rightarrow \infty$, 下式以概率1收敛:

$$\frac{(\text{UB}_{\text{patch}} - \text{LB}_0)}{\text{LB}_0} < 9(\ln n)^{3/2} \cdot n^{-0.24},$$

其中 UB_{patch} 表示用 PATCH 算法获得的可行解. 这个引理说明, 对于完全随机的问題, PATCH 算法能够近似1的概率产生最优解.

4.2 框架整体收敛性分析(Analysis of the entire convergence of the frame)

首先简单陈述一下两种算法的演算过程. 基于分配问题松弛的 ATSP 求解通常是嵌在分支定界框架(B&B)之中, 每一次分支都会产生一些新的 AP 问题, 整个过程就是不断的分支, 然后求解 AP 的过程, 直至所有的分支都遍历过. 而 ACO 算法是一种随机构造型算法, 其构造的过程通过信息素和一些局部信息在概率意义下选取下一步的行进方向. 在 B&B 过程中, 通过上、下界的比较来排除一些分支, 从而避免了穷举. 在 ACO 运行过程中, 通过始终保留最优解的可能性, 从而确保了 ACO 的全局收敛性. 因此, 对于反馈校正框架的总体性能分析, 有如下两个推论:

推论 1 反馈机制下的 ACO 能够以概率1收敛到最优解, 且具有比单独使用 ACO 算法更快的收敛速度.

证 反馈机制下的 ACO 算法并不改变 ACO 的全局收敛性, 而搜索空间的减小使得蚂蚁每一步找到最优弧的概率增加. 根据 ACO 的算法流程可知

$$P(s_{k+1} = j | s_k = i) = \begin{cases} \frac{\tau(i, j)^\alpha \cdot \eta(i, j)^\beta}{\sum_{y \in V_k, (i, y) \in A} \tau(i, y)^\alpha \cdot \eta(i, y)^\beta}, & y \in V_k, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (9)$$

公式(9)表示, 蚂蚁第 k 步在城市 i 向 $k+1$ 步移动到城市 j 的概率. 其中: $\tau(i, j)$, $\eta(i, j)$ 分别表示弧 (i, j) 上的信息素和局部信息值, V_k 表示在第 k 步是该蚂蚁尚未访问的城市. 在下一步的移动过程中必定有一个城市是最优的, 假定 j^* 是下一步最优的移动, 则移动到节点 j^* 的概率为

$$P(s_{k+1} = j^* | s_k = i) = \frac{\tau(i, j^*)^\alpha \cdot \eta(i, j^*)^\beta}{\sum_{y \in V_k, (i, y) \in A} \tau(i, y)^\alpha \cdot \eta(i, y)^\beta}. \quad (10)$$

因为 $A \supseteq A \setminus \Delta$ (A 是原来的弧集合, $A \setminus \Delta$ 是反馈校正后的弧集合), 所以必有

$$\frac{\tau(i, j^*)^\alpha \cdot \eta(i, j^*)^\beta}{\sum_{y \in V_k, (i, y) \in \{A \setminus \Delta\}} \tau(i, y)^\alpha \cdot \eta(i, y)^\beta} \geq \frac{\tau(i, j^*)^\alpha \cdot \eta(i, j^*)^\beta}{\sum_{y \in V_k, (i, y) \in A} \tau(i, y)^\alpha \cdot \eta(i, y)^\beta}. \quad (11)$$

证毕.

推论 2 反馈校正框架有利于B&B算法减少搜索的分支.

证 由于B&B是通过直接比较上、下界来减少搜索的分支的. 因此其分支定界效用与问题的上、下界直接相关. 首先利用ACO的全局收敛性, 使得上界能够不断的收敛. 在分支搜索的过程, 父问题和子问题都是一个AP问题, 它们的不同之处在于子问题的约束继承了父问题的约束, 并且增加了一些新的约束, 但是总体变化不大. 相对于原始AP问题, 即分支搜索树上的主节点, 称其他节点为MAP (modified AP) 问题^[8], 也即分支搜索树上除主节点之外的其他节点. 设 $\exists$ 父问题为 MAP_k , 其产生的子问题为 MAP_l , 则以下公式成立:

$$C_{opt}(MAP_l) \geq C_{opt}(MAP_k), \quad (12)$$

$$\Delta_l = \{(i, j) \in A \setminus \{A_l^E, A_l^I\} | \bar{c}_{ij}^* + \bar{d}_{col_i^*, row_j^*[i]} \geq D\},$$

$$D = UB - C_{opt}(MAP_l), \quad (13)$$

$$\{\Delta_l \cup A_l^E \cup A_l^I\} \supset \{\Delta_k \cup A_k^E \cup A_k^I\}. \quad (14)$$

式(12)表明随着分支的深入, 子问题的目标值不断的增加, 其中 $C_{opt}(AP)$ 表示分配问题AP的最优目标值, 这是由于子问题相对于父问题约束增加了.

式(13)是式(7)在 MAP_l 上的特例, 表明对于节点 l 的子节点的搜索中, 在 Δ_l 中的弧可以排除, 其中: col_i^*, row_j^* 是 MAP_l 的最优解; $A_l^E = \{(i, j) \in A : x_{ij} \equiv 0\}$ 表示在 MAP_l 中必须排除的弧集, $A_l^I = \{(i, j) \in A | x_{ij} \equiv 1\}$ 表示在 MAP_l 中必须包含的弧集, A_l^E 与 A_l^I 是在分支过程中产生的与反馈校正排除的弧无关.

式(14)隐含的说明, 随着分支的深入, 其排除的弧集会越来越多, 排除的弧集越多, 有助于使其子问题朝两个方向加速行进, 要么获得一个ATSP的可行解, 要么无解. 这两种选择都是笔者希望看到的, 因为无论到那种情况, 都可以使这个分支搜索终结. 因

此相对于经典的B&B算法, 反馈校正算法能够加速排除不必要的分支, 从而降低算法的时间复杂度.

证毕.

注 1 $C_{opt}(MAP_l)$ 不是原ATSP问题的下界, 而是在解中的弧必须满足 $A_l^E \cup A_l^I$ 条件下的ATSP问题的下界.

5 数值仿真(Numerical simulation)

为了验证算法的有效性, 对19个benchmark问题 (<http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsplib.html>) 进行测试. 整个算法的仿真环境为PC机: 2.8 G Pentium IV处理器, 512M内存, VC++6.0开发环境, B&B算法和ACO算法为两个同等优先级线程独立运行, 算法实施采用多线程(multi-thread)实现, 当找到一个新的当前最好可行解时, 进行弧删除过程, 如图4所示的流程图.

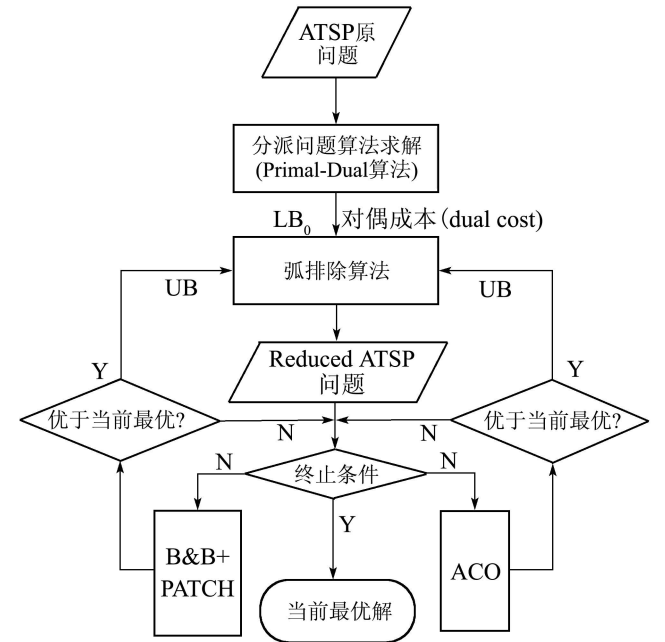


图4 基ATSP问题多线程反馈校正算法实施框架图

Fig. 4 The multithread based implementation of ATSP with feedback adjustment

为了表明新弧排除算法的优越性, 图5给出了对 Δ_1 方法和 Δ_2 排除弧的比例比较. 两种过程的上、下界均由 UB_{patch} , LB_0 给出, 其中排除弧的比例的计算公式为

$$|\Delta|/|A| \times 100\%, \quad (15)$$

其中: Δ 为排除弧集, A 为全部参考弧集. 从图4中可以看出, 在初始阶段的过程中, Δ_2 显然比 Δ_1 包含的弧集更多, 尽管 Δ_2 的运行比 Δ_1 局部增加了 $O(n^2)$ 的时间复杂度, 但是初始过程的微小的简化都会对后续过程带来非常重要的影响, 从全局意义上还是能够减少时间的复杂度.

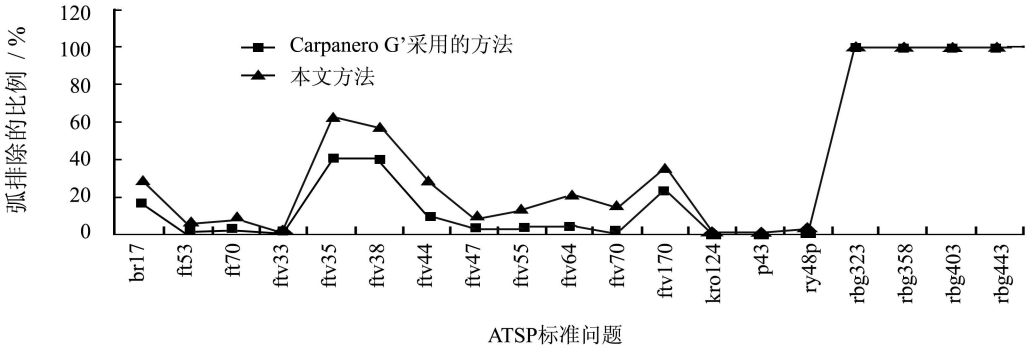


图 5 基于两种排除弧过程在初始阶段的排除弧比例

Fig. 5 Comparison between two arc-excluding procedures

为了公平的比较算法的搜索性能,以ACO收敛稳定所需的CPU时间为基准,ACO算法参数取自文献[13],其中蚂蚁的数目为10只,最大迭代次数为1500.此时ACO会收敛到一个稳定值.表1统计了19个benchmark问题在相同运行时间之内的解比较,B&B+PATCH取自文献[8],其中B&B采取深度优先规则.反馈校正算法I:采用引理1的弧排除方法;反馈校正算法II:采用定理2的弧排除方法.为了比较弧排除算法对于适应值计算次数的影响,图6给出了4种算法的统计结果.从表1和图6可以

得出如下结果:

从算法搜索性能上看有:

反馈校正算法II $\geq$ 反馈校正算法I $\geq$ MAX B&B+PATCH, ACO.

从适应值的计算次数统计来看有:

ACO $\geq$ 反馈校正算法I $\geq$ 反馈校正算法II $\geq$ B&B+PATCH.

注 2 对于最后4个大规模ATSP,在B&B搜索树上的根节点(root node)对应的解正好是最优解,所以其适应值计算次数为1次.

表 1 对基准问题的4种算法性能比较

Table 1 Performance comparison of four algorithms for benchmark problems

问题	最优解	算法性能(gap/%)			
		ACO方法	B&B+PATCH方法	反馈校正算法I	反馈校正算法II
br17	39	0.00	15.20	0.00	0.00
ft53	6905	1.20	18.10	0.00	0.00
ft70	38673	0.00	6.50	2.30	0.00
ftv33	1286	0.30	0.00	0.00	0.00
ftv35	1473	0.00	0.00	0.00	0.00
ftv38	1530	0.30	0.00	0.00	0.00
ftv44	1613	0.00	0.00	0.00	0.00
ftv47	1776	8.20	0.50	0.00	0.00
ftv55	1608	10.30	0.00	0.00	0.00
ftv64	1839	0.50	0.00	1.70	0.00
ftv70	1950	7.40	12.80	3.20	0.00
ftv170	2755	9.30	15.20	10.50	9.70
kro124	36230	0.00	25.10	0.00	0.00
p43	5620	8.40	32.60	0.00	0.00
ry48p	14422	4.30	8.60	0.00	0.00
rgb323	1326	8.50	0.00	0.00	0.00
rgb358	1163	9.50	0.00	0.00	0.00
rgb403	2465	1.20	0.00	0.00	0.00
rgb443	2720	12.70	0.00	0.00	0.00

$$\text{gap} \triangleq |s_{\text{opt}} - s| / s_{\text{opt}} \times 100\%.$$

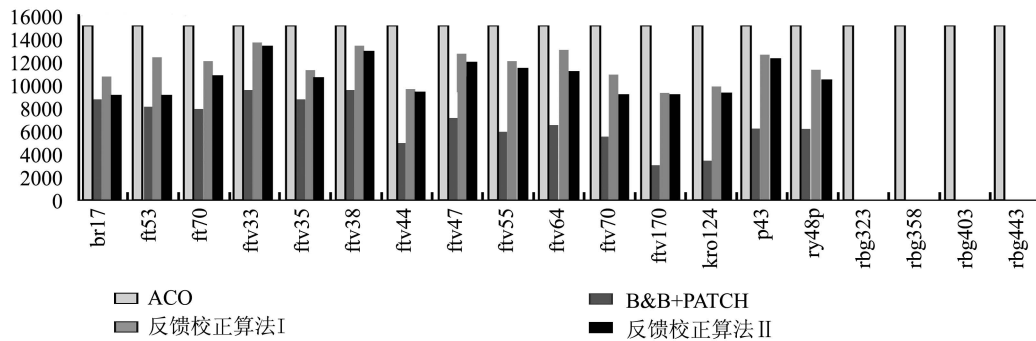


图6 4种算法之适应值计算次数比较

Fig. 6 Comparison between four methods in terms of the searched solution quantity

从仿真结果可以看出ACO对于小规模问题性能较好,随着问题规模增大ACO变差,其根本原因在于ACO算法在求解大规模问题时的搜索效率低下,虽然B&B+PATCH在大规模问题具有优势(其理论依据来自引理2),但对于一些小规模问题却显得无能为力,而反馈校正算法则集成了两种算法的优势.对于问题ftv64, ftv70, ftv170表明定理1提出的弧排除算法能够比引理1提出的弧排除算法更为有效,尽管弧排除算法会增加计算量,看似搜索的适应值少了,但是从整体上却提升了算法的搜索效率,减少了不必要的搜索.为了更清楚的说明这点,图7以ftv70问题为例,说明了在两种弧排除后,ACO搜索性能曲线比较,可以看出当非最优弧排除后,搜索会更加专注于潜在的最优区域,加快向最优解的收敛速度.

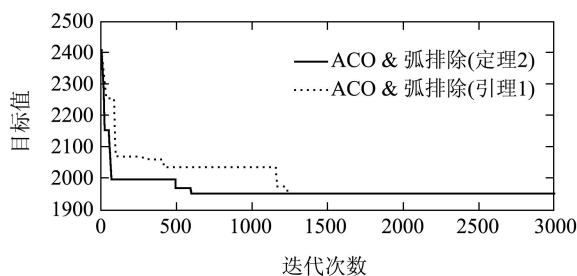


图7 两种弧排除下的ACO收敛曲线比较(ftv70)

Fig. 7 Comparison of ACO convergent curves with two arc-excluding algorithms (ftv70)

6 结论(Conclusion)

本文的工作是将反馈校正控制的思想引入到解决组合优化问题之中的一种探索,本质上属于数学规划方法与启发式方法的深度集成,相对一般而言的混合算法更加具有理论和实际的优势.该思想不仅限于针对ATSP问题,对于其他组合优化问题也有一定的借鉴意义.但是,和任何类型的算法一样,该算法的局限性也是存在的,主要在于没有一个统一的框架来给出排除解空间元素的这

一过程,不同的问题都有不同的排除形式,甚至,对于某些问题这个过程可能会相当复杂.

致谢 感谢 University of Amsterdam 的 Roy Jonker教授和Ton Volgenant教授提供基于Primal-Dual算法分配问题的源代码.

参考文献(References):

- [1] TOLGA B. The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures [J]. *The International Journal of Management Science*, 2005, 34(1): 209 – 219.
- [2] TOTH P, VIGO D. Models relaxations and exact approaches for the capacitated vehicle routing problem [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2002, 123(1): 487 – 512.
- [3] SALOMON M, SOLOMON M M, WASSENHOVE L N V, et al. Solving the discrete lotsizing and scheduling problem with sequence dependent set-up costs and set-up times using the traveling salesman problem with time windows [J]. *European Journal of Operation Research*, 1997, 100(1): 494 – 513.
- [4] MARC G, WILSON L P, CAROLING G. Scheduling continuous casting of aluminum using a multiple objective ant colony optimization metaheuristic [J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, 143(1): 218 – 229.
- [5] CHIO J, REALFF M J, LEE J H. An algorithmic framework for improving heuristic solutions part I. A deterministic discount couple traveling salesman problem [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2004, 28(1): 1285 – 1296.
- [6] PAN C, YANG G K. A method of solving a large-scale rolling batch scheduling problem in steel production using a variant of column generation [J]. *Computer and Industrial Engineering*, 2009, 56(1): 165 – 178.
- [7] 任会之, 唐立新. 考虑库区吊机能力的板坯倒垛问题的建模与优化方法研究 [J]. *自动化学报*, 2010, 36 (4): 586 – 592. (REN Huizhi, TANG Lixin. Study on modelling and optimization method for the slab stack shuffling problem considering area crane capacity [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(4): 586 – 592.)
- [8] CARPANETO G, DELLANICO M, TOTH P. Exact solution of large-scale, asymmetric traveling salesman problems [J]. *ACM Transaction on Mathematical Software*, 1995, 21(4): 394 – 409.
- [9] ANDREAS W, MAUD G L, TORBJN L. A stabilized column generation scheme for the traveling salesman subtour problem [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2006, 154(1): 2212 – 2238.
- [10] FISCHETTI M, TOTH P. A polyhedral approach to the asymmetric traveling salesman problem [J]. *Management Science*, 1997, 43(11): 1520 – 1536.

- [11] CHEN Shiming, CHIEN Chihyao. Solving the traveling salesman problem based on the genetic simulated annealing ant colony system with particle swarm optimization techniques [J]. *Expert Systems with Application*, 2011, 38(12): 14439 – 14450.
- [12] YU Bin, YANG Zhongzhen. An ant colony optimization: the period vehicle routing problem with time window [J]. *Transportation Research part E*, 2011, 47(1): 166 – 181.
- [13] DORIGO M, GAMBARDELLA L M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1997, 1(1): 53 – 66.
- [14] YANG Jingan, ZHUANG Yanbin. An improved ant colony optimization algorithm for solving a complex combinatorial optimization problem [J]. *Applied Soft Computing*, 2010, 10(1): 653 – 660.
- [15] 任志刚, 冯祖仁, 张兆军. 多优解更新信息素的混合行为蚁群算法 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(9): 1201 – 1206.
(REN Zhigang, FENG Zuren, ZHANG Zhaojun. Hybrid-behavior ant-colony optimization algorithm with pheromone updated by multiple good solutions [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(9): 1201 – 1206.)
- [16] 牟峰, 袁晓辉, 王慈光, 等. 基于灰预测和正态云的参数自适应蚁群遗传算法 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(6): 701 – 707.
(MOU Feng, YUAN Xiaohui, WANG Ciguang, et al. Ant-colony-genetic algorithm with adaptive parameters based on grey prediction and normal cloud [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(6): 701 – 707.)
- [17] STUTZLE T, DORIGO M. A short convergence proof for a class of ant colony optimization algorithms [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computations*, 2002, 6(4): 357 – 365.
- [18] 金劲, 洪毅, 赵付青, 等. 多约束条件蚁群优化算法的收敛性分析及其应用 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(10): 1353 – 1359.
(JIN Jin, HONG Yi, ZHAO Fuqing, et al. Convergence analysis of multiple constrained routing-based ant colony optimization algorithm and its application [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(10): 1353 – 1359.)
- [19] KARP R M. A patching algorithm for the nonsymmetrical traveling sales-man problem [J]. *SIAM Journal of Computing*, 1979, 8(4): 561 – 573.
- [20] DELLAMICO M, TOTH P. Algorithms code for dense assignment problems: the state of the art [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2000, 100(1): 17 – 48.
- [21] FRIEZE A, SORKIN B G. The probabilistic relationship between the assignment and asymmetric traveling salesman problems [J]. *SIAM Journal of Computing*, 2007, 36(5): 1435 – 1452.

作者简介:

白 杰 (1980–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为生产调度与优化、智能进化算法, E-mail: baijie@sjtu.edu.cn;

朱 俊 (1983–), 男, 工程师, 目前研究方向为生产管理与优化设计、智能电网产品设计, E-mail: zhu_jun@sina.com.cn;

杨根科 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为供应链管理设计与、混合系统控制, E-mail: gkyang@sjtu.edu.cn;

潘常春 (1979–), 男, 助理研究员, 目前研究方向为生产调度与优化、R2R控制算法设计, E-mail: pan_cc@sjtu.edu.cn.