

基于Lanchester方程的作战混合动态系统最优变招控制

陈向勇¹, 井元伟¹, 李春吉²

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 东北大学 系统科学研究所, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 根据作战混合动态过程特性, 提出了一种基于Lanchester方程的作战混合动态系统模型. 该模型可较好的描述离散事件驱动的对阵招法和连续作战实力变化之间的相互作用. 在合理战术假设的基础上, 讨论了作战混合动态系统最优变招控制问题. 首先, 利用微分对策理论得到了作战招法存在的必要条件. 进而对作战变招过程进行分析, 并提出了一种最优变招控制策略的求解方法. 最后, 应用算例验证了所构建作战混合系统模型和所设计最优变招策略的可行性.

关键词: Lanchester方程; 作战混合动态系统; 最优变招控制; 微分对策

中图分类号: E072; E917; TP273

文献标识码: A

Optimal variable tactic control of warfare hybrid dynamic system based on Lanchester equation

CHEN Xiang-yong¹, JING Yuan-wei¹, LI Chun-ji²

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China;

2. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: According to the characteristics of warfare hybrid dynamic process, we develop a warfare hybrid dynamic system model by using Lanchester equation, which better describes the interaction between discrete event-driven tactics and the strength changes in continuous fighting. We also investigate the optimal variable tactic control for the warfare hybrid dynamic system under certain reasonable assumptions. In the existing condition of the warfare tactics based on the differential game theory, we analyze the process of variable tactics and propose the solving method for determining the optimal strategy for variable tactic control. A numerical example shows the feasibility of the warfare hybrid system and the effectiveness of the developed optimal variable tactics.

Key words: Lanchester equation; warfare hybrid dynamic systems; optimal variable tactics control; differential game

1 引言(Introduction)

作战混合动态过程分析是军事理论工作者关心的重要问题之一. 近年来, 如何构建合理的定量模型来描述作战混合动态过程成为了研究热点. 文献[1]以一个空战实例为背景, 分析了事件域内作战变招控制和时间域内作战变值控制的混合对策问题(hybrid game)的构成, 指出了一系列需要解决的关键技术. 文献[2]对一类海战实例的混合对策问题也进行了分析和研究. 然而, 上述文献未对作战混合系统的建模问题以及控制问题做实质性的研究.

作为第一个用来定量描述和预测作战发展趋势的数学方程, Lanchester方程^[3-4]已经成为作战指挥决策应用最为广泛的方法之一, 基于Lanchester方程的作战问题研究也成为了军事运筹与系统工程的重要分支, 为用近代数学方法研究战争开拓了新的领域. 文献[5-6]借助Lanchester方程, 对兵力资源优化

分配问题进行了研究. 文献[7-8]研究基于Lanchester方程的兵力增援优化控制问题. 文献[9-10]利用Lanchester方程和微分对策^[11-12]研究了最优火力分配的优化对策问题, 给出了作战对策的最优性条件和求解方法. 文献[13-14]利用Lanchester方程对实际战争进行了定量描述, 研究结果和历史数据相一致. 上述文献都是基于Lanchester方程对作战杀伤过程进行定量描述. 由此, 利用Lanchester方程构建作战混合动态系统模型, 进而设计有效合理的作战混合动态策略成为了作战指挥决策研究的可行方向之一.

受文献[1-2, 5, 9, 15]的启发, 针对作战混合动态过程特性, 本文首先构建了一类基于Lanchester方程的作战混合动态系统模型. 该模型最显著的特点是可以较好的描述离散事件驱动的对阵招法和连续实力变化之间的相互作用, 为作战行动的定量分析研

究提供了较好的模型基础. 进而本文在合理战术假设的基础上, 研究了该类作战混合系统最优变招控制问题, 依据微分对策原理^[11-12]给出最优招法存在的条件, 在此基础上, 对作战变招过程进行了分析, 给出了最优变招策略的求解方法. 最后, 应用算例说明了所建立系统模型和所设计控制方案的可行性.

2 作战混合动态系统模型(Warfare hybrid dynamic system model)

作战动态过程是指交战双方的作战实力变化按照一定的变招(改变双方作战单位对阵的招法策略)从一个连续系统变换到另一个连续系统, 每一次变招后系统状态按照下一个系统过程运行, 如此构成了混合动态的作战过程. 由此, 依据文献[15]给出的混合动态系统建模原则, 利用Lanchester方程对作战混合系统进行建模.

这里给出如下战术假设:

假设 1 设交战双方X和Y分别有 m 和 n 个作战单位, X 方的第 i ($i = 1, \dots, m$)个作战单位数量为 $x_i(t)$, Y 方的第 j ($j = 1, \dots, n$)个作战单位数量为 $y_j(t)$. $x_i(0) = x_{i0}$ 和 $y_j(0) = y_{j0}$ 为初始状态.

假设 2 设交战双方在时间 t_k ($1 \leq k < \infty$)时进行变招, 其中: 变招时刻 $t_k \in [t_0, t_f]$, $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq \dots \leq t_f$, t_0 为初始时刻. 设定 e_s ($s = 1, \dots, k$)为驱动招法在 t_s 发生变化的离散事件变量, 则变招路径为

$$r = ((t_0, e_0), \dots, (t_k, e_k)), \quad (1)$$

其中 (t_s, e_s) 表示在 t_s 时刻变招发生.

考虑一类如下描述作战混合过程的系统模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \psi_{ji e_s} y_j(t) + \sum_{j=1}^n \psi_{ji e_s} u_{ji}(t), \\ \dot{y}_j(t) = - \sum_{i=1}^m \beta_{ij} \phi_{ij e_s} x_i(t) + \sum_{i=1}^m \phi_{ij e_s} v_{ij}(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中: β_{ij} 为 X 方的第 i 个作战单位对 Y 方的第 j 个作战单位的非负损耗系数; α_{ji} 为 Y 方的第 j 个作战单位对 X 方的第 i 个作战单位的非负损耗系数. $u_{ji}(t)$ 和 $v_{ij}(t)$ 为相应作战单位的兵力增援率. 开关型变量 $\psi_{ji e_s} \in \{0, 1\}$ 和 $\phi_{ij e_s} \in \{0, 1\}$ 为相应作战单位的对阵招法. 定义 Ψ_{e_s} 和 Φ_{e_s} 为离散事件驱动下的变招矩阵, 这里

$$\Psi_{e_s} = \begin{bmatrix} \psi_{11 e_s} & \dots & \psi_{1n e_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1n e_s} & \dots & \psi_{nn e_s} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{e_s} = \begin{bmatrix} \phi_{11 e_s} & \dots & \phi_{m1 e_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1m e_s} & \dots & \phi_{mn e_s} \end{bmatrix}.$$

由假设2可知, 事件 e_s 驱动下的变招演化满足

$$\Psi_{e_{s-1}} \times e_s \rightarrow \Psi_{e_s}, \quad \Phi_{e_{s-1}} \times e_s \rightarrow \Phi_{e_s}. \quad (3)$$

注 1 开关型逻辑变量 $\psi_{ji e_s}$ 和 $\phi_{ij e_s}$ 的取值对应于交

战双方作战单位的对阵关系:

$$\begin{cases} \psi_{ji e_s} = \begin{cases} 0, & y_j \text{ 与 } x_i \text{ 不对阵,} \\ 1, & y_j \text{ 集中全部兵力与 } x_i \text{ 对阵.} \end{cases} \\ \phi_{ij e_s} = \begin{cases} 0, & x_i \text{ 与 } y_j \text{ 不对阵,} \\ 1, & x_i \text{ 集中全部兵力与 } y_j \text{ 对阵.} \end{cases} \end{cases}$$

注 2 Ψ_{e_s} 和 Φ_{e_s} 受离散事件 e_s 驱动发生变化, 从而使系统(2)受变招影响发生变化. 如果式(3)成立, 则表明从 $\Psi_{e_{s-1}}$ 和 $\Phi_{e_{s-1}}$ 对应的连续子系统变换到 Ψ_{e_s} 和 Φ_{e_s} 对应的连续子系统. 作战过程中变招次数决定了子系统的个数.

3 作战混合系统的最优变招控制(Optimal variable tactics control of warfare hybrid dynamic systems)

3.1 问题描述(Problem statement)

本文最优变招控制策略求解将基于以下假设:

假设 3 交战双方遵守“集中火力进攻”的战术原则, 即开关型变量 $\psi_{ji e_s}$ 和 $\phi_{ij e_s}$ 满足

$$\sum_{i=1}^m \psi_{ji e_s} = 1, \quad \sum_{j=1}^n \phi_{ij e_s} = 1.$$

假设 4 设作战有效时间段为 $[0, T]$, 并假设在终止时刻 T 之前, 双方各作战单位没有被完全消灭.

考虑如下的性能指标:

$$J = \sum_{i=1}^m \eta_i x_i(T) - \sum_{j=1}^n \theta_j y_j(T), \quad (4)$$

其中: η_i 和 θ_j 表示对相应作战单位在重要性的一种加权, 即相对作战指数^[5,9]; $\eta x(T)$ 和 $\theta y(T)$ 表示交战双方在时刻 T 的作战剩余总实力.

作战混合系统最优变招控制问题表述为: 寻找交战双方的变招次数 k , 变招时刻 t_k ($1 \leq k < \infty$)以及变招序列 $\Psi_{e_s}^*$ 和 $\Phi_{e_s}^*$ ($s = 1, \dots, k$)使性能指标满足

$$J(\Psi_{e_s}^*, \Phi_{e_s}^*) = \max_{\Phi_{e_s}} \min_{\Psi_{e_s}} J(\Psi_{e_s}, \Phi_{e_s}) = \min_{\Psi_{e_s}} \max_{\Phi_{e_s}} J(\Psi_{e_s}, \Phi_{e_s}). \quad (5)$$

注 3 相对作战指数 η 和 θ 引入的目的在于衡量交战双方在 T 时刻的各类作战单元的作战效果. 而式(5)表示交战双方尽可能保存自己的实力, 同时最大可能的消灭敌人.

注 4 性能指标描述的是连续变量的性能, 由于开关变量只表明作战单位的对阵选择, 所以不用专门选取离散变量指标. 当系统初值确定后, 状态变化就由变招策略 Ψ_{e_s} 和 Φ_{e_s} 决定, 因此 J 就间接由双方变招策略所确定.

3.2 交战双方最优变招策略求解方法(Solving method for optimal variable tactics)

下面首先给出交战双方最优招法的存在条件. 而对变招过程进行定量分析. 最后给出最优变招策略的求解方法.

针对上述策略求解问题, 引入伴随函数

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n)^T,$$

以及Hamilton函数

$$\begin{aligned} H(x, y, \lambda, \mu, \Psi, \Phi, t) = & - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{ji} \psi_{ji e_s} \right) y_j - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \beta_{ij} \phi_{ij e_s} \right) x_i + \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i u_{ji}(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu_j v_{ij}(t). \end{aligned}$$

于是, 根据微分对策理论^[11-12]的双边极值(极大极小)原理, 交战双方最优招法 Ψ_{e_s} 和 Φ_{e_s} 存在的必要条件是存在相应的伴随函数 $\lambda^*(t)$ 和 $\mu^*(t)$ 使之满足

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \mu_j \beta_{ij} \phi_{ij e_s}, \\ \dot{\mu}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{ji} \psi_{ji e_s}, \\ \lambda_i(T) = \frac{\partial J}{\partial x_i} = \eta_i, \\ \mu_j(T) = \frac{\partial J}{\partial y_j} = -\theta_j. \end{cases} \quad (6)$$

并对于每一时间 $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} H(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*, \Psi_{e_s}^*, \Phi_{e_s}^*, t) = \\ \max_{\Phi_{e_s}} \min_{\Psi_{e_s}} H(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*, \Psi_{e_s}, \Phi_{e_s}, t) = \\ \min_{\Psi_{e_s}} \max_{\Phi_{e_s}} H(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*, \Psi_{e_s}, \Phi_{e_s}, t). \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)可知

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i(t) < 0, \quad \dot{\mu}_j(t) > 0, \\ \lambda_i(T) > 0, \quad \mu_j(T) < 0. \end{cases}$$

因此, 对于任意 $t \in [0, T]$, 总有

$$\lambda_i(t) > 0, \quad \mu_j(t) < 0.$$

由此, 条件(7)就转化为

$$\begin{cases} \max_{\Phi_{e_s}} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n -\mu_j^* \beta_{ij} \phi_{ij e_s} \right) x_i^*, \\ \max_{\Psi_{e_s}} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \alpha_{ji} \psi_{ji e_s} \right) y_j^*. \end{cases} \quad (8)$$

由于 $x_i^* > 0, y_j^* > 0$, 条件(8)转化为

$$\begin{cases} \max_{\Phi_{e_s}} \sum_{j=1}^n (-\mu_j^*) \beta_{ij} \phi_{ij e_s}, \\ \max_{\Psi_{e_s}} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \alpha_{ji} \psi_{ji e_s}. \end{cases} \quad (9)$$

由条件(9)知, $\sum_{j=1}^n (-\mu_j^*) \beta_{ij} \phi_{ij e_s}$ 和 $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \alpha_{ji} \psi_{ji e_s}$ 分别为 $-\mu_j^* \beta_{ij}$ 和 $\lambda_i^* \alpha_{ji}$ 的加权平均和, 则交战双方的最优招法满足条件(10)和条件(11).

$$\psi_{ji e_s}^* = \begin{cases} 1, \max_i (\lambda_i^* \alpha_{ji}) = \lambda_{i^*}^* \alpha_{ji^*}, \\ 0, \max_i (\lambda_i^* \alpha_{ji}) \neq \lambda_{i^*}^* \alpha_{ji^*}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\phi_{ij e_s}^* = \begin{cases} 1, \max_j (-\mu_j^* \beta_{ij}) = -\mu_{j^*}^* \beta_{ij^*}, \\ 0, \max_j (-\mu_j^* \beta_{ij}) \neq -\mu_{j^*}^* \beta_{ij^*}. \end{cases} \quad (11)$$

注5 由于 $\lambda_i(t)$ 和 $\mu_j(t)$ 是连续变化的, 因此 $\lambda_i^*(t) \alpha_{ji}$ 和 $\mu_j^*(t) \beta_{ij}$ 也是连续变化的, 从而交战双方最优招法策略在一段时间内保持稳定不变. 由此可知, 在临近 T 时刻的一段时间区间 $[T - \delta, T]$ 内, 交战双方的最优作战招法是保持稳定不变的.

首先对 X 方的变招过程进行分析. 针对 X 方变招发生成立的条件, 给出如下定理.

定理1 若在临近 T 时刻的一段时间区间 $[\Delta_k, T]$ 内, 至少存在两个 $\mu_{j_l}(t) \beta_{ij_l}$ 和 $\mu_{j_g}(t) \beta_{ij_g}$ ($l, g \in \{1, \dots, n\}$ 为下标集且 $j_l \neq j_g, t \in (\Delta_k, T]$)使得下列关系式成立:

$$-\mu_{j_l}(t) \beta_{ij_l} < -\mu_{j_g}(t) \beta_{ij_g}, \quad (12)$$

$$-\mu_{j_l}(\Delta_k) \beta_{ij_l} = -\mu_{j_g}(\Delta_k) \beta_{ij_g}, \quad (13)$$

$$-\dot{\mu}_{j_l}(\Delta_k) \beta_{ij_l} < -\dot{\mu}_{j_g}(\Delta_k) \beta_{ij_g}, \quad (14)$$

则 X 方在 $t = \Delta_k$ 的左邻域内

$$-\mu_{j_l}(t) \beta_{ij_l} > -\mu_{j_g}(t) \beta_{ij_g} \quad (15)$$

成立, 即 X 方在时间区间 $[t, T]$ ($t < \Delta_k$)内有变招发生, 且 Δ_k 为变招发生的最小时刻.

证 由式(11)知, 在 T 时刻 X 方的最优招法满足

$$\phi_{ij e_s}^* = \begin{cases} 1, \max_j (-\mu_j^*(T) \beta_{ij}) = -\mu_{j^*}^*(T) \beta_{ij^*}, \\ 0, \max_j (-\mu_j^*(T) \beta_{ij}) \neq -\mu_{j^*}^*(T) \beta_{ij^*}. \end{cases} \quad (16)$$

由此, 在临近 T 时刻的一段时间区间 $(\Delta_k, T]$ 内一定存在至少两个 $\mu_{j_l} \beta_{ij_l}, \mu_{j_g} \beta_{ij_g}$ ($j_l \neq j_g$)满足

$$-\mu_{j_l}(t) \beta_{ij_l} < -\mu_{j_g}(t) \beta_{ij_g}.$$

由式(14)可得

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\mu_{j_l}(\Delta_k) \beta_{ij_l} - (-\mu_{j_l}(\Delta_k - \varepsilon) \beta_{ij_l})}{\varepsilon} < \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\mu_{j_g}(\Delta_k) \beta_{ij_g} - (-\mu_{j_g}(\Delta_k - \varepsilon) \beta_{ij_g})}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

结合等式(13), 可知

$$-\mu_{j_l}(\Delta_k - \varepsilon) \beta_{ij_l} > -\mu_{j_g}(\Delta_k - \varepsilon) \beta_{ij_g}.$$

由于在 Δ_k 的右区间内,

$$-\mu_{j_l}(\Delta_k + \varepsilon) \beta_{ij_l} < -\mu_{j_g}(\Delta_k + \varepsilon) \beta_{ij_g}$$

成立. 因此, X 方的作战招法在时刻 Δ_k ($0 < \Delta_k < T$)发生变化, 即交战双方的对阵发生变化.

下面证明 Δ_k 为在时间区间 $(\Delta_k, T]$ 内发生变招的最小时刻. 假设 Δ_{k1} ($\Delta_{k1} < \Delta_k$)为临近 T 时刻变招发生的最小时刻, 可得

$$-\mu_{j_l}(\Delta_{k1} + \varepsilon) \beta_{ij_l} < -\mu_{j_g}(\Delta_{k1} + \varepsilon) \beta_{ij_g},$$

$$-\mu_{j_l}(\Delta_{k1} - \varepsilon) \beta_{ij_l} > -\mu_{j_g}(\Delta_{k1} - \varepsilon) \beta_{ij_g}.$$

利用式(12)-(14)可得, 在时间区间 $(\Delta_{k1}, T]$ 内,

$$-\mu_{j_l}(t)\beta_{i_{j_l}} < -\mu_{j_g}(t)\beta_{i_{j_g}}, t \in (\Delta_k, T]$$

成立. 这与下列不等式矛盾:

$$-\mu_{j_l}(\Delta_k - \varepsilon)\beta_{i_{j_l}} > -\mu_{j_g}(\Delta_k - \varepsilon)\beta_{i_{j_g}}.$$

所以 Δ_k 为临近 T 时刻区间内发生变招的最小时刻.

证毕.

注 6 利用式(13), 方程(6)和条件(16), 可得 Δ_k 值, 进而可得 $-\dot{\mu}_{j_l}(\Delta_k)\beta_{i_{j_l}}$ 和 $-\dot{\mu}_{j_g}(\Delta_k)\beta_{i_{j_g}}$ 的值. 利用定理1对变招过程分析, 依据式(11)求解获得变招前后的最优招法.

同理, 针对 Y 方, 给出描述变招发生的定理2.

定理 2 若在临近 T 时刻的一段时间区间 $[\Gamma_k, T]$ 内, 至少存在两个 $\lambda_{i_a}\alpha_{j_{i_a}}, \lambda_{i_b}\alpha_{j_{i_b}} (r, s \in \{1, \dots, m\})$ 为下标集且 $i_a \neq i_b, t \in (\Gamma_1, T]$ 使得

$$\lambda_{i_a}(t)\alpha_{j_{i_a}} < \lambda_{i_b}(t)\alpha_{j_{i_b}}, \quad (17)$$

$$\lambda_{i_a}(\Gamma_k)\alpha_{j_{i_a}} = \lambda_{i_b}(\Gamma_k)\alpha_{j_{i_b}}, \quad (18)$$

$$\dot{\lambda}_{i_a}(\Gamma_k)\alpha_{j_{i_a}} < \dot{\lambda}_{i_b}(\Gamma_k)\alpha_{j_{i_b}} \quad (19)$$

成立, 则 Y 方在 $t = \Gamma_k$ 的左邻域内有

$$\lambda_{i_a}(t)\alpha_{j_{i_a}} > \lambda_{i_b}(t)\alpha_{j_{i_b}} \quad (20)$$

成立. 即 Y 方在时间区间 $[t, T] (t < \Gamma_k)$ 内有变招发生, 且 Γ_k 为变招发生的最小时刻.

证 类似定理1的证明, 可知定理2成立, 证明略.

根据定理1和定理2, 下面给出从终止时刻往前逐级求取作战系统最优变招控制策略的具体步骤.

Step 1 利用 $\lambda_i(T)$ 和 $\mu_j(T)$, 可求解双方在临近终止时刻 T 区间内的最优招法 Ψ_{e_k} 和 Φ_{e_k} , 寻找双方满足定理1和2的变招发生的最小时刻 Δ_k 和 Γ_k .

Step 2 依据 $\lambda_i(\Delta_k)$ 和 $\mu_j(\Gamma_k)$, 求解在 Δ_k 和 Γ_k 的临近时间区间内的最优招法 $\Psi_{e_{k-1}}$ 和 $\Phi_{e_{k-1}}$, 寻找交战双方满足变招原理发生的最小时刻 Δ_{k-1} 和 Γ_{k-1} .

Step 3 如此持续下去, 当在临近时刻 Δ_1 和 Γ_1 的时间区间 $[0, \Delta_1]$ 和 $[0, \Gamma_1]$ 内不能获得满足变招原理最小时刻时, 求解终止.

Step 4 对 $\Delta_1, \dots, \Delta_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ 排序, 可得驱动变招发生的离散事件为 $e = \{e_1, \dots, e_f\} (0 \leq f < \infty)$ 和变招路径为 $r = ((t_1, e_1), \dots, (t_f, e_f))$, 其中: $t_f \in \{\Delta_1, \dots, \Delta_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ 为变招时刻, e_f 为驱动交战双方变招发生的离散事件.

4 算例分析(Example analysis)

算例 1 设交战双方的实力向量为 $x = x_1$ 和 $y = (y_1, y_2)^T$, 可得描述作战混合过程的系统模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sum_{j=1}^2 \alpha_{j1} \psi_{j1_{e_k}} y_j + \sum_{j=1}^2 \psi_{j1_{e_k}} u_{j1}, \\ \dot{y}_1 = -\beta_{11} \phi_{11_{e_k}} x_1 + \phi_{11_{e_k}} v_{11}, \\ \dot{y}_2 = -\beta_{12} \phi_{12_{e_k}} x_1 + \phi_{12_{e_k}} v_{12}, \end{cases} \quad (21)$$

其中: x_1, y_1 和 y_2 分别为交战双方各作战兵力数(单位: 万人); t 为战斗时间(单位: 天); $\alpha_{ji} (i = 1; j = 1, 2)$ 和 β_{ij} 为损耗系数(单位: 万人/天). 考虑如下描述的性能指标为

$$J = \eta_1 x_1 - \theta_1 y_1 - \theta_2 y_2. \quad (22)$$

系统的参数设定如下:

$$\alpha_{11} = 9, \alpha_{21} = 1, \beta_{11} = \beta_{12} = 1, \eta_1 = 9, \theta_1 = 1, \theta_2 = 9, x_{10} = 100, y_{10} = 30, y_{20} = 30, u_{11} = 0, u_{21} = 0, v_{11} = v_{12} = 0, T = 0.489.$$

由式(10)和式(11)可得, 交战双方最优招法满足

$$\begin{cases} \psi_{11_{e_k}}(t) = \psi_{21_{e_k}}(t) = 1, & 0 \leq t \leq T, \\ \phi_{11_{e_k}}(t) + \phi_{12_{e_k}}(t) = 1, \end{cases}$$

按照给出的变招分析过程, 由于作战方 X 只有一个作战单元 x_1 , 因此作战方 Y 在整个作战时段 $[0, T]$ 内不存在变招. 由此, 针对作战方 X , 设定 $t_0 = T$ 为初始时间值, $\lambda(t), \mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 的初始值为 $\lambda(T) = 9, \mu_1(T) = -1$ 和 $\mu_2(T) = -9$; 同时设定步长值 $\kappa = 0.001$, 由此可知 $t = t_0 - \chi\kappa$, 其中 χ 为循环次数. 依据本文给出的定理1和2, 求解可知当 $\chi = 105$ 时, 变招发生. 对应时刻为 $\Delta_1 = 0.384$. 基于上述求解结果, X 方作战最优招法为

$$\begin{cases} \phi_{11_{e_k}}(t) = 1, \phi_{12_{e_k}}(t) = 0, & 0 < t \leq \Delta_1, \\ \phi_{11_{e_k}}(t) = 0, \phi_{12_{e_k}}(t) = 1, & \Delta_1 < t \leq T. \end{cases}$$

进而可得驱动变招发生的离散事件为

$$e_1 = \{(\Psi_{e_0}, \Psi_{e_1}), (\Phi_{e_0}, \Phi_{e_1})\},$$

其中:

$$\Psi_{e_0} = \Psi_{e_1} = [1 \ 1], \Phi_{e_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Phi_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由此, 基于系统(21)和性能指标(22)的最优变招策略的求解结果为: 作战双方的变招次数为1次; 变招时刻为 $\Delta_1 = 0.384$; 交战双方最优变招策略 $\Psi_{e_s}^*$ 和 $\Phi_{e_s}^*$ 满足

$$\begin{cases} \psi_{11_{e_0}}^*(t) = \psi_{21_{e_0}}^*(t) = 1, & 0 < t \leq \Delta_1, \\ \phi_{11_{e_0}}^*(t) = 1, \phi_{12_{e_0}}^*(t) = 0, \\ \psi_{11_{e_0}}^*(t) = \psi_{21_{e_1}}^*(t) = 1, & \Delta_1 \leq t \leq T, \\ \phi_{11_{e_0}}^*(t) = 0, \phi_{12_{e_1}}^*(t) = 1, \end{cases}$$

对应驱动变招发生的离散事件为 e_1 ; 变招路径为 $r = ((0, e_0), (\Delta_1, e_1))$; 最优性能指标为 $J^* = 44.152$.

图1给出了交战双方各作战单位的状态变化轨线. 由图1可知, 双方各作战单位状态在 Δ_1 时刻发生变化, 即变招发生. 同时, 双方状态变化具有非负性, 且双方作战招法和变招的发生在时间段 $[0, T]$ 内是始终成立的.

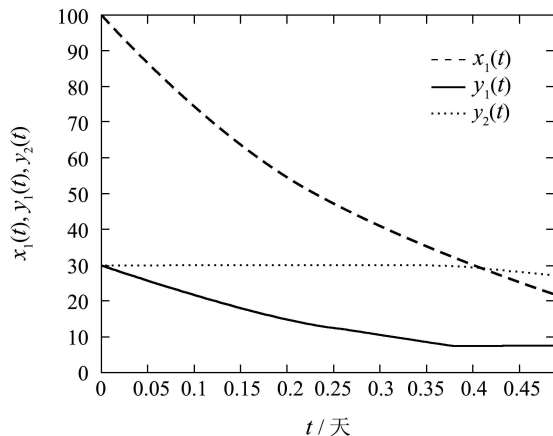


图1 交战双方各作战单位兵力变化轨迹

Fig. 1 Strength change curves of each combat unit on both sides

算例2 考虑系统(21)和性能指标(22), 设定 $\theta_1 = 9$, $\theta_2 = 1$, 其余系统参数与算例1相同. 针对给出的算例2可知, 按照变招分析过程, 依据定理1和2以及对应的求解方法可知, 在 $[0, T]$ 的时间区间内不存在变招的发生. 同时可知最优招法策略的求解结果为

$$\begin{cases} \psi_{11_{e_0}}^*(t) = \psi_{21_{e_0}}^*(t) = 1, \\ \phi_{11_{e_0}}^*(t) = 1, \phi_{12_{e_0}}^*(t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t \leq T.$$

针对算例1和2所给出的求解结果, 对变招发生的原因进行分析. 在算例1中, 在 $[0, \Delta_1]$ 时间区间内 X 方之所以选择攻击 Y 方的第1个作战单位 y_1 是由于受交战双方作战损耗系数 α_{ji} ($i = 1; j = 1, 2$)和 β_{ij} 的影响. 而在 $[\Delta_1, T]$ 时间区间内 X 方发生变招选择攻击 Y 方的第2个作战单位 y_2 是受作战指数 η_i 和 η_j 的影响, 即由于作战指数与实际交战过程中的各类作战单位的作战效果不一致使得作战过程中发生变招. 而在算例2中, 由于作战指数 θ_j ($j = 1, 2$)与损耗系数 α_{11} 和 α_{21} 的一致性, 可知在给定的时间区间 $[0, T]$ 内不存在作战招法需要随时间发生变化的现象, 即作战过程中不发生变招.

5 结论(Conclusion)

本文从交战过程的混合动态特性出发, 研究了一类基于Lanchester方程的作战混合动态系统建模和最优变招策略求解问题, 模型的建立揭示了一类复杂系统的运行机制, 从定量角度较好的描述了作战过程的混合动态特性. 随时间变化的最优对阵招法策略的求解结果表明在新的战斗环境影响下指导战斗的战术原则是存在的. 最后数值算例的求解和分析有效的验证了所构建模型和所设计控制方案的可行性. 然而, 文中战术假设和参数的选定, 虽然有助于建立系统模型的求解, 但可能一定程度上降低了所描述问题的真实性, 如何权衡模型易于求解与结果真实性将是今后需要进一步研究的工作.

参考文献(References):

- [1] 徐心和, 石鸿雁. 一个空战实例中的混合对策问题 [C] //第19届中国控制与决策学术年会. 沈阳: 东北大学出版社, 2007: 913 - 916. (XU Xinhe, SHI Hongyan. A case study: air fight problem and hybrid game [C] //Proceedings of 19th Chinese Control and Decision Conference. Shenyang: Northeastern University Press, 2007: 913 - 916.)
- [2] 陈向勇, 井元伟, 李春吉, 等. 基于Lanchester方程的一类海战实例的决策分析 [J]. 东北大学学报(自然科学版), 2009, 30(4): 535 - 538. (CHEN Xiangyong, JING Yuanwei, LI Chunji, et al. Analysis of optimum strategy using Lanchester equation for naval battles like Trafalgar [J]. Journal of Northeastern University(Natural Science), 2009, 30(4): 535 - 538.)
- [3] LANCHESTER F W. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm [M]. 2nd Edition. Constable, London: Lanchester Press, 1999.
- [4] TAYLOR J G. Lanchester Models of Warfare [M]. Arlington, Virginia: Operations Research Society of America, Military Applications Section, 1983. 2.
- [5] 沙基昌. 数理战术学 [M]. 北京: 科学出版社, 2003. (SHA Jichang. Mathematic Tactics [M]. Beijing: Science Press, 2003.)
- [6] SHEEBA P S, GHOSE D. Optimal resource allocation and redistribution strategy in military conflicts with Lanchester square law attrition [J]. Naval Research Logistics, 2008, 55(7): 581 - 591.
- [7] HELMBOLD R L. Direct and inverse solution of the Lanchester square law with general reinforcement schedules [J]. European Journal of Operational Research, 1994, 77(3): 486 - 495.
- [8] CHEN H M. An optimal control problem in determining the optimal reinforcement schedules for the Lanchester equations [J]. Computers and Operations Research, 2003, 30(7): 1051 - 1066.
- [9] 李登峰, 孙涛, 王永春. 舰艇编队信息战火力分配微分对策模型及求解 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1163 - 1166. (LI Dengfeng, SUN Tao, WANG Yongchun. Differential game model and its solution for the firepower - assignment in vessel formations in information war [J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(6): 1163 - 1166.)
- [10] YAN J J, WANG Y, WANG X Y. Modeling and simulation of Lanchester equation based on game theory [C] //Proceedings of International Conference on the Business Management and Electronic Information. New York, USA: IEEE, 2011: 212 - 214.
- [11] ISSACS R. Differential Games [M]. New York: John Wiley and Sons Press, 1965.
- [12] DRAGUNA V, FRANK L. Adaptive dynamic programming for on-line solution of a zero - sum differential game [J]. Journal of Control Theory and Applications, 2011, 9(3): 353 - 360.
- [13] LUCAS T W, TURKES T. Fitting Lanchester models to the battles of Kursk and Ardennes [J]. Naval Research Logistics, 2004, 51(1): 95 - 116.
- [14] JOHNSON I R, MACKAY N J. Lanchester models and the battle of Britain [J]. Naval Research Logistics, 2011, 58(3): 210 - 222.
- [15] 郑大钟, 赵千川. 离散事件动态系统 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 412 - 420. (ZHENG Dazhong, ZHAO Qianchuan. Discrete Event Dynamic Systems [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001: 412 - 420.)

作者简介:

陈向勇 (1983-), 男, 博士, 研究领域为作战指挥决策和对策理论与应用, E-mail: cxy8305@163.com;

井元伟 (1956-), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为复杂系统和复杂性科学, E-mail: ywjing@mail.neu.edu.cn;

李春吉 (1963-), 男, 教授, 硕士生导师, 研究领域为算子理论和系统科学, E-mail: chunjili2000@yahoo.com.cn.