第 29 卷第 9 期
2012 年 9 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 29 No. 9
Sep. 2012

文章编号: 1000−8152(2012)09−1215−08

二型直觉模糊集

赵　涛[1], 肖　建[2]

(1. 西南交通大学 交通运输与物流学院, 四川 成都 610031; 2. 西南交通大学 电气工程学院, 四川 成都 610031)

摘要: 二型模糊集和直觉模糊集都具有很强的实际应用背景. 二型模糊集增强了系统处理不确定性的能力, 直觉模糊集为解决人们判断问题所出现的犹豫信息提供了理论依据. 本文在二型模糊集和直觉模糊集的基础上, 给出了二型直觉模糊集的概念, 证明了二型直觉模糊集是一型模糊集、直觉模糊集、区间值模糊集、区间值直觉模糊集的广义形式, 讨论了二型直觉模糊集的基本运算和二型直觉模糊关系. 最后, 研究了基于二型直觉模糊理论的近似推理, 并实例说明了二型直觉模糊集的实际应用背景.

关键词: 二型直觉模糊集; 二型模糊集; 直觉模糊集; 区间值直觉模糊集; 模糊数直觉模糊集

中图分类号: TP18　　　**文献标识码**: A

Type-2 intuitionistic fuzzy sets

ZHAO Tao[1], XIAO Jian[2]

(1. School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 610031, China;
2. School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 610031, China)

Abstract: Type-2 fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets have a wide range of practical applications. Type-2 fuzzy sets enhance the ability of the system for dealing with uncertainties. Intuitionistic fuzzy sets provide a theoretical basis to manage the hesitation information appearing to people in judging questions. In this paper, we introduce the concept of type-2 intuitionistic fuzzy sets under type-2 fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets. Furthermore, we prove that type-2 intuitionistic fuzzy sets are the generalized forms of type-1 fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. The basic operations of type-2 intuitionistic fuzzy sets and type-2 intuitionistic fuzzy relations are discussed. Finally, the approximation reasoning based on the type-2 intuitionistic fuzzy theory is studied. A practical example illustrates the practical application background of type-2 intuitionistic fuzzy sets.

Key words: type-2 intuitionistic fuzzy sets; type-2 fuzzy sets; intuitionistic fuzzy sets; interval-valued intuitionistic fuzzy sets; fuzzy number intuitionistic fuzzy sets

1　引言(Introduction)

自1965年数学家Zadeh提出模糊集理论[1](又被称为一型模糊集)以来, 经过几十年的研究与发展, 已经在理论与应用上取得了巨大的进步. 模糊集理论已经成为处理不确定信息和知识的重要数学工具. 目前它已经在聚类分析、图像识别、自动控制、人工智能等方面得到了成功的应用.

为了增强系统处理不确定性的能力, 多重不确定性研究越来越受到重视. 1975年, Zadeh提出的二型模糊集[2]作为一种处理多重不确定性的数学工具, 给出了解决复杂系统的新思路, 由于二型模糊集计算复杂, 很多学者都首先致力于研究特殊的二型模糊集——区间值模糊集[2], 并将其成功运用到了许多领域[3–4]. 对于最一般的二型模糊集, 至到1998年, Mendel等人建立了二型模糊逻辑系统[5–7], 提出了二型模糊逻辑系统的降型方法[8–9], 并将其成功运用于时变信道均衡化问题, 二型模糊集才得到了极大的发展[10–11]. 模糊集的另一种推广形式是1983年Atanassov提出的直觉模糊集[12–13], 它通过设定隶属度和非隶属度很好的解决了人们判断问题的肯定程度、否定程度以及踌躇程度3种状态信息, 它更加细腻地刻画了模糊性的本质. 1989年Atanassov和Gargov又提出区间值直觉模糊集[14], 并于同一文献指出区间值模糊集等同于直觉模糊集. 文献[15]利用三角模糊数定义了一种新的模糊数直觉模糊集, 同时给出了模糊数直觉模糊集的一些运算. 文献[16]在文献[15]的基础上, 基于模糊结构元的方法将三角模糊数拓展到了一般的模糊数上, 因而所定义模糊数直觉模糊集更具普遍性. 然而, 文献[16]所提出的模糊数直觉模糊集对隶属度和非隶属度的要求仍过于强烈, 即隶属度和非隶属度都必须是[0, 1]上所有α–水平截集为闭区间的连续标准凸一型模糊集. 另一方面, 文献[16]关于模糊数直觉模糊集的基本运算都是基于模糊结构元间接给出,

收稿日期: 2011−09−18; 收修改稿日期: 2012−03−15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51177137, 61134001).

这限制了它在实际中的应用. 基于此, 为了给模糊集理论一个统一的理论框架, 同时为了更好地处理复杂系统的高度不确定性和人们判断问题的踌躇性, 本文在二型模糊集和直觉模糊集的基础上, 给出了二型直觉模糊集的概念, 并指出一型模糊集、直觉模糊集、区间值模糊集、区间值直觉模糊集都是二型直觉模糊集的特殊表现形式, 讨论了二型直觉模糊集的基本运算与二型直觉模糊关系. 最后, 研究了基于二型直觉模糊理论的近似推理.

2 预备知识(Preliminaries)

本节主要给出二型模糊集与直觉模糊集的基本概念及相应运算.

定义 1[7] 设X为论域, 一个二型模糊集A可以描述为

$$A=\int_{x\in X}u_A(x)/x=\int_{x\in X}[\int_{u\in J_x}f_x(u)/u]/x,\ J_x\subseteq[0,1],$$

其中: J_x是x的主要成员, $f_x(u)$是x的次级隶属度.

定义 2[12–13] 设X为论域, 称$A=\{<x,u_A(x),v_A(x)>|x\in X\}$为$X$上的直觉模糊集, $u_A:X\rightarrow[0,1]$, $v_A:X\rightarrow[0,1]$且对任意的$x\in X$满足$0\leqslant u_A(x)+v_A(x)\leqslant 1$. 其中: $u_A(x)$表示x对A隶属程度, $v_A(x)$表示x对A非隶属程度, $\pi_A(x)=1-u_A(x)-v_A(x)$表示x对A的踌躇程度.

下面给出二型模糊集及直觉模糊集的基本运算.

定义 3[12–13] 设A,B是论域X上的两个直觉模糊集, 令

$$A=\{<x,u_A(x),v_A(x)>|x\in X\},$$
$$B=\{<x,u_B(x),v_B(x)>|x\in X\},$$

则

$$A\cup B=\{<x,u_A(x)\vee u_B(x),v_A(x)\wedge v_B(x)>|x\in X\},$$
$$A\cap B=\{<x,u_A(x)\wedge u_B(x),v_A(x)\vee v_B(x)>|x\in X\},$$
$$A^c=\{<x,v_A(x),u_A(x)>|x\in X\}.$$

定义 4[17–18] 设A,B是论域X上的两个二型模糊集, 令

$$A=\int_{x\in X}u_A(x)/x=\int_{x\in X}[\int_{u\in J_x^u}f_x(u)/u]/x,\ J_x^u\subseteq[0,1],$$
$$B=\int_{x\in X}u_B(x)/x=\int_{x\in X}[\int_{w\in J_x^w}g_x(w)/w]/x,\ J_x^w\subseteq[0,1],$$

则

$$u_{A\cup B}(x)=u_A(x)\cup u_B(x)=\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w}f_x(u)\wedge g_x(w)/u\vee w,$$
$$u_{A\cap B}(x)=u_A(x)\cap u_B(x)=\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w}f_x(u)\wedge g_x(w)/u\wedge w,$$
$$u_{A^c}(x)=\neg u_A(x)=\int_{u\in J_x^u}f_x(u)/(1-u).$$

引理 1[17–18] 在$\cup,\cap,c$运算下, 论域X上的任意二型模糊集满足交换律、结合律、幂等律、对合律、De Morgan律.

一般地, 分配律和吸收律不成立.

3 二型直觉模糊集(Type-2 intuitionistic fuzzy sets)

二型模糊集和直觉模糊集都有很强的实际应用背景, 将二者合二为一, 是很自然的推广形式. 在复杂系统中, 存在这样一类问题: 人们判断问题时, 支持的隶属度、反对的隶属度及踌躇的隶属度均表现为[0, 1]上的一型模糊集. 为了给解决这类问题提供一定的理论基础, 本节主要给出二型直觉模糊集的概念, 并且讨论其和常见模糊集的关系.

定义 5 设X为论域, 称

$$A=\{<x,u_A(x),v_A(x)>|x\in X\}$$

为X上的二型直觉模糊集. 如果

$$u_A(x)=\int_{u\in J_x^u}f_x(u)/u,\ J_x^u\subseteq[0,1],$$
$$v_A(x)=\int_{v\in J_x^v}g_x(v)/v,\ J_x^v\subseteq[0,1],$$

且对任意的$x\in X$满足

$$\max_{u\in J_x^u}(f_x(u)*u)+\max_{v\in J_x^v}(g_x(v)*v)\leqslant 1,$$

$u_A(x)$表示x对A隶属程度, $v_A(x)$表示x对A非隶属程度,

$$\pi_A(x)=\int_{u\in J_x^u}\int_{v\in J_x^v}f_x(u)\wedge g_x(v)/\max(0,1-u-v)$$

表示x对A踌躇程度.

事实上, 若忽略对隶属度与非隶属度的限制条件, 且对任意的$x\in X$, $u_A(x)$和$v_A(x)$为[0, 1]上的三角模糊数, 则二型直觉模糊集退化为文献[15]所定义的模糊数直觉模糊集. 若对任意的$x\in X$, $u_A(x)$和$v_A(x)$为$[0,1]$上的一般模糊数, 则二型直觉模糊集退化为文献[16]所定义的模糊数直觉模糊集. 若对任意的$x\in X$, 令

$$u_A(x)=\int_{u\in J_x^u}f_x(u)/u,$$

$$v_A(x)=\int_{u\in J_x^u} f_x(u)/(1-u),$$

其中$J_x^u\subseteq[0,1]$, 则$v_A(x)=\neg u_A(x)$, 二型直觉模糊集就退化为普通的二型模糊集. 可见, 二型直觉模糊集的概念更具普遍性.

例 1　设X是论域, 令

$$A=\{<x,u_A(x),v_A(x)>|x\in X\},$$

若$\forall x\in X$有

$$u_A(x)=\int_{u\in J_x^u} f_x(u)/u=0.8/0.7+0.6/0.8,$$

$$v_A(x)=\int_{v\in J_x^v} g_x(v)/v=0.9/0.1+0.8/0.2,$$

则

$$\begin{aligned}&\forall x\in X,\\&\max_{u\in J_x^u}(f_x(u)*u)+\max_{v\in J_x^v}(g_x(v)*v)=\\&\max(0.8*0.7,0.6*0.8)+\\&\max(0.9*0.1,0.8*0.2)=0.72\leqslant 1,\end{aligned}$$

故A是X上的二型直觉模糊集. 另外, x对A踌躇程度可表达为

$$\begin{aligned}&\pi_A(x)=\\&\frac{0.8\wedge 0.9}{1-0.7-0.1}+\frac{0.8\wedge 0.8}{1-0.7-0.2}+\\&\frac{0.6\wedge 0.9}{1-0.8-0.1}+\frac{0.6\wedge 0.8}{1-0.8-0.2}=\\&\frac{0.8}{0.2}+\frac{0.8}{0.1}+\frac{0.6}{0.1}+\frac{0.6}{0}=\\&\frac{0.8}{0.2}+\frac{0.8}{0.1}+\frac{0.6}{0}.\end{aligned}$$

定理 1　二型直觉模糊集是区间值直觉模糊集、直觉模糊集、区间值模糊集、一型模糊集的拓展形式.

证　在定义5中, 若对任意的$x\in X$, 令

$$u_A(x)=\int_{u\in J_x^u} 1/u, v_A(x)=\int_{v\in J_x^v} 1/v,$$

其中$J_x^u\subseteq[0,1]$和$J_x^v\subseteq[0,1]$为闭区间, 则

$$\pi_A(x)=\int_{u\in J_x^u}\int_{v\in J_x^v} 1/(1-u-v),$$

显然二型直觉模糊集退化为区间值直觉模糊集.

若对任意的$x\in X$, 令

$$u_A(x)=\int_{u\in J_x^u} 1/u,\ v_A(x)=\int_{v\in J_x^v} 1/v,$$

其中: $J_x^u\in[0,1]$, $J_x^v\in[0,1]$, 则$\pi_A(x)=\int_{u\in J_x^u}\int_{v\in J_x^v} 1/(1-u-v)$, 显然二型直觉模糊集退化为直觉模糊集. 文献[14]指出直觉模糊集等同于区间模糊集, 易见二型直觉模糊集可退化为区间值模糊集, 事实上, $x\in X$在区间值模糊集中的隶属度可以表示为$[J_x^u,1-J_x^v]$.

若对任意的$x\in X$,

$$u_A(x)=\int_{u\in J_x^u} 1/u,\ v_A(x)=\int_{u\in J_x^u} 1/(1-u),$$

其中$J_x^u\in[0,1]$, 则$\pi_A(x)=1/0$, 显然二型直觉模糊集退化为一型模糊集.　　证毕.

由定理1可知, 二型直觉模糊集是区间值直觉模糊集、直觉模糊集、区间值模糊集、一型模糊集的拓展形式, 在一定程度上, 为众多模糊集建立了统一的理论框架.

4　二型直觉模糊集的基本运算(Basic operations of type-2 intuitionistic fuzzy sets)

为了适应描述不同的对象, 基于直觉模糊集和二型模糊集的运算公式, 下面给出二型直觉模糊集的基本运算.

定义 6　设A,B是论域X上的两个二型直觉模糊集, 令

$$A=\{<x,u_A(x),v_A(x)>|x\in X\},$$

其中:

$$u_A(x)=\int_{u\in J_x^u} f_x(u)/u, J_x^u\subseteq[0,1],$$

$$v_A(x)=\int_{v\in J_x^v} g_x(v)/v, J_x^v\subseteq[0,1],$$

$$B=\{<x,u_B(x),v_B(x)>|x\in X\},$$

其中:

$$u_B(x)=\int_{w\in J_x^w} h_x(w)/w, J_x^w\subseteq[0,1],$$

$$v_B(x)=\int_{p\in J_x^p} k_x(p)/p, J_x^p\subseteq[0,1].$$

定义如下运算:

1)

$$\begin{aligned}&A\cap B=\\&\{<x,u_A(x)\cap u_B(x),v_A(x)\cup v_B(x)>|x\in X\}=\\&\{<x,\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} f_x(u)\wedge h_x(w)/u\wedge w,\\&\int_{v\in J_x^v}\int_{p\in J_x^p} g_x(v)\wedge k_x(p)/v\vee p>|x\in X\};\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}&A\cup B=\\&\{<x,u_A(x)\cup u_B(x),v_A(x)\cap v_B(x)>|x\in X\}=\\&\{<x,\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} f_x(u)\wedge h_x(w)/u\vee w,\\&\int_{v\in J_x^v}\int_{p\in J_x^p} g_x(v)\wedge k_x(p)/v\wedge p>|x\in X\};\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}&A^c=\\&\{<x,v_A(x),u_A(x)>|x\in X\}=\\&\{<x,\int_{v\in J_x^v} g_x(v)/v,\int_{u\in J_x^u} f_x(u)/u>|x\in X\}.\end{aligned}$$

从上面所定义的运算, 易看出, 两个二型直觉模糊集经过基本运算后, 仍然是一个二型直觉模糊集, 这从数学上说, 满足了运算封闭性的最根本要求; 另一方面, 上面的运算也比较符合人们的直观判断, 比如, 并运算后的肯定程度为两二型直觉模糊集肯定程度之并, 否定程度为两二型直觉模糊集否定程度之交, 这表明肯定程度增大, 否定程度减小, 因此上述运算具有一定的合理性.

定理 2 设A, B, C是论域X上的二型直觉模糊集, 则下列各式成立:

1) $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$;

2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

3) $A\cup A=A,\ A\cap A=A$;

4) $(A^c)^c=A$;

5) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

证 结合定理2.1, 直接验证即可. 以式(5)为例, 令

$$A=\{<x, u_A(x), v_A(x)>|x\in X\},$$

其中:

$$u_A(x)=\int_{u\in J_x^u} f_x(u)/u, J_x^u\subseteq[0,1],$$
$$v_A(x)=\int_{v\in J_x^v} g_x(v)/v, J_x^v\subseteq[0,1],$$
$$B=\{<x, u_B(x), v_B(x)>|x\in X\},$$

其中:

$$u_B(x)=\int_{w\in J_x^w} h_x(w)/w, J_x^w\subseteq[0,1],$$
$$v_B(x)=\int_{p\in J_x^p} k_x(p)/p, J_x^p\subseteq[0,1],$$

则对于任意$x\in X$有

$$\begin{aligned}&(A\cup B)^c=\\&\{<x, \int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} f_x(u)\wedge h_x(w)/u\vee w,\\&\int_{v\in J_x^v}\int_{p\in J_x^p} g_x(v)\wedge k_x(p)/v\wedge p>|x\in X\}^c=\\&\{<x, \int_{v\in J_x^v}\int_{p\in J_x^p} g_x(v)\wedge k_x(p)/v\wedge p,\\&\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} f_x(u)\wedge h_x(w)/u\vee w>|x\in X\},\\&A^c\cap B^c=\\&\{(x, v_A(x), u_A(x))|x\in X\}\cap\\&\{(x, v_B(x), u_B(x))|x\in X\}=\\&\{<x, v_A(x)\cap v_B(x), u_A(x)\cup u_B(x)>|x\in X\}=\\&\{<x, \int_{v\in J_x^v}\int_{p\in J_x^p} g_x(v)\wedge k_x(p)/v\wedge p,\\&\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} f_x(u)\wedge h_x(w)/u\vee w>|x\in X\},\end{aligned}$$

故$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$. 证毕.

5 二型直觉模糊关系(Type-2 intuitionistic fuzzy relation)

文献[19–20]研究了直觉模糊关系, 在此基础上, 本节主要讨论二型直觉模糊关系.

定义 7 设X和Y是论域, 定义在乘积空间$X\times Y$上的二型直觉模糊子集称为X到Y的二型直觉模糊关系. 记为

$$R=\{<(x,y), u_R(x,y), v_R(x,y)>|x\in X, y\in Y\},$$

其中:

$$u_R(x,y)=\int_{u\in J_{(x,y)}^u} f_{(x,y)}(u)/u,\ J_{(x,y)}^u\subseteq[0,1],$$
$$v_R(x,y)=\int_{v\in J_{(x,y)}^v} g_{(x,y)}(v)/v,\ J_{(x,y)}^v\subseteq[0,1],$$

且对任意的$(x,y)\in X\times Y$满足$\max\limits_{u\in J_{(x,y)}^u}(f_{(x,y)}(u)*u)+\max\limits_{v\in J_{(x,y)}^v}(g_{(x,y)}(v)*v)\leqslant 1$.

例 2 设论域$X=\{x_1, x_2\},\ Y=\{y_1, y_2\}$, 令

$$u_R(x_1,y_1)=\frac{0.8}{0.7}+\frac{0.9}{0.8},\ u_R(x_1,y_2)=\frac{0.6}{0.6}+\frac{0.7}{0.7},$$
$$u_R(x_2,y_1)=\frac{0.9}{0.8}+\frac{0.8}{0.9},\ u_R(x_2,y_2)=\frac{0.7}{0.7}+\frac{0.6}{0.9},$$
$$v_R(x_1,y_1)=\frac{0.8}{0.1}+\frac{0.7}{0.2},\ v_R(x_1,y_2)=\frac{0.9}{0.2}+\frac{0.8}{0.3},$$
$$v_R(x_2,y_1)=\frac{1}{0.1},\ v_R(x_2,y_2)=\frac{0.9}{0.05}+\frac{0.8}{0.1},$$

则对任意的$(x,y)\in X\times Y$满足

$$\max_{u\in J_{(x,y)}^u}(f_{(x,y)}(u)*u)+\max_{v\in J_{(x,y)}^v}(g_{(x,y)}(v)*v)\leqslant 1,$$

故本例定义的R为X到Y的二型直觉模糊关系.

定义 8 设R和S是$X\times Y$上的二型直觉模糊关系, 其中

$$R=\{<(x,y), u_R(x,y),\ v_R(x,y)>|x\in X, y\in Y\},$$

满足

$$u_R(x,y)=\int_{u\in J_{(x,y)}^u} f_{(x,y)}(u)/u,\ J_{(x,y)}^u\subseteq[0,1],$$
$$v_R(x,y)=\int_{v\in J_{(x,y)}^v} g_{(x,y)}(v)/v,\ J_{(x,y)}^v\subseteq[0,1],$$
$$S=\{<(x,y), u_S(x,y), v_S(x,y)>|x\in X, y\in Y\},$$

满足

$$u_S(x,y)=\int_{w\in J_{(x,y)}^w} h_{(x,y)}(w)/w,\ J_{(x,y)}^w\subseteq[0,1],$$
$$v_S(x,y)=\int_{p\in J_{(x,y)}^p} k_{(x,y)}(p)/p,\ J_{(x,y)}^p\subseteq[0,1].$$

定义如下运算:

1) $R^c=\{<(x,y), v_R(x,y), u_R(x,y)>|x\in X,$

$y \in Y\}$;

2) $R \cup S =$
$\{< (x,y), u_R(x,y) \cup u_S(x,y), v_R(x,y) \cap v_S(x,y) > | x \in X, y \in Y\} =$
$\{< (x,y), \int_{u \in J^u_{(x,y)}} \int_{w \in J^w_{(x,y)}} f_{(x,y)}(u) \wedge h_{(x,y)}(w)/u \vee w, \int_{v \in J^v_{(x,y)}} \int_{p \in J^p_{(x,y)}} g_{(x,y)}(v) \wedge k_{(x,y)}(p)/v \wedge p > | x \in X, y \in Y\}$;

3) $R \cap S =$
$\{< (x,y), u_R(x,y) \cap u_S(x,y), v_R(x,y) \cup v_S(x,y) > | x \in X, y \in Y\} =$
$\{< (x,y), \int_{u \in J^u_{(x,y)}} \int_{w \in J^w_{(x,y)}} f_{(x,y)}(u) \wedge h_{(x,y)}(w)/u \wedge w, \int_{v \in J^v_{(x,y)}} \int_{p \in J^p_{(x,y)}} g_{(x,y)}(v) \wedge k_{(x,y)}(p)/v \vee p > | x \in X, y \in Y\}$.

定义 9 设R是$X \times Y$上二型直觉模糊关系, S是$Y \times Z$上二型直觉模糊关系, 其中

$$R = \{< (x,y), u_R(x,y), v_R(x,y) > | x \in X, y \in Y\},$$

满足

$$u_R(x,y) = \int_{u \in J^u_{(x,y)}} f_{(x,y)}(u)/u, J^u_{(x,y)} \subseteq [0,1],$$

$$v_R(x,y) = \int_{v \in J^v_{(x,y)}} g_{(x,y)}(v)/v, J^v_{(x,y)} \subseteq [0,1],$$

$$S = \{< (y,z), u_S(y,z), v_S(y,z) > | y \in Y, z \in Z\},$$

满足

$$u_S(y,z) = \int_{w \in J^w_{(y,z)}} h_{(y,z)}(w)/w, J^w_{(y,z)} \subseteq [0,1],$$

$$v_S(y,z) = \int_{p \in J^p_{(y,z)}} k_{(y,z)}(p)/p, J^p_{(y,z)} \subseteq [0,1].$$

R和S的合成关系定义为

$R \circ S =$
$\{< (x,z), u_{R\circ S}(x,z), v_{R\circ S}(x,z) > | x \in X, z \in Z\} =$
$\{< (x,z), \bigcup_{y \in Y} [u_R(x,y) \cap u_S(y,z)], \bigcap_{y \in Y} [v_R(x,y) \cup v_S(x,y)] > | x \in X, z \in Z\} =$
$\{< (x,z), \bigcup_{y \in Y} [\int_{u \in J^u_{(x,y)}} \int_{w \in J^w_{(y,z)}} f_{(x,y)}(u) \wedge h_{(y,z)}(w)/u \wedge w], \bigcap_{y \in Y} [\int_{v \in J^v_{(x,y)}} \int_{p \in J^p_{(y,z)}} g_{(x,y)}(v) \wedge k_{(y,z)}(p)/v \vee p] > | x \in X, z \in Z\}$.

例 3 设论域$X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$, R是$X \times Y$上的二型直觉模糊关系, S是$Y \times Z$上二型直觉模糊关系, 令

$$u_R(x_1,y_1) = \frac{0.8}{0.7} + \frac{0.9}{0.8},\ u_R(x_1,y_2) = \frac{0.6}{0.6} + \frac{0.7}{0.7},$$
$$u_R(x_2,y_1) = \frac{0.9}{0.8} + \frac{0.8}{0.9},\ u_R(x_2,y_2) = \frac{0.7}{0.7} + \frac{0.6}{0.9},$$
$$v_R(x_1,y_1) = \frac{0.8}{0.1} + \frac{0.7}{0.2},\ v_R(x_1,y_2) = \frac{0.9}{0.2} + \frac{0.8}{0.3},$$
$$v_R(x_2,y_1) = \frac{1}{0.1},\ v_R(x_2,y_2) = \frac{0.9}{0.05} + \frac{0.8}{0.1},$$
$$u_S(y_1,z_1) = \frac{0.7}{0.6} + \frac{0.8}{0.7},\ u_S(y_1,z_2) = \frac{0.6}{0.7} + \frac{0.7}{0.9},$$
$$u_S(y_2,z_1) = \frac{0.8}{0.3} + \frac{0.9}{0.8},\ u_S(y_2,z_2) = \frac{0.7}{0.5} + \frac{0.5}{0.9},$$
$$v_S(y_1,z_1) = \frac{0.8}{0.1} + \frac{0.5}{0.3},\ v_S(y_1,z_2) = \frac{0.8}{0.05} + \frac{0.9}{0.1},$$
$$v_S(y_2,z_1) = \frac{0.7}{0.1} + \frac{0.8}{0.2},\ v_S(y_2,z_2) = \frac{0.9}{0.07} + \frac{0.8}{0.1},$$

则依据定义5.3, 可求R和S的合成关系$R \circ S$:

$$u_{R\circ S}(x_1,z_1) = [(\frac{0.8}{0.7} + \frac{0.9}{0.8}) \cap (\frac{0.7}{0.6} + \frac{0.8}{0.7})] \cup [(\frac{0.6}{0.6} + \frac{0.7}{0.7}) \cap (\frac{0.8}{0.3} + \frac{0.9}{0.8})] = \frac{0.7}{0.6} + \frac{0.7}{0.7}.$$

类似可求出$u_{R\circ S}(x_1,z_2)$, $u_{R\circ S}(x_2,z_1)$, $u_{R\circ S}(x_2,z_2)$, 故

$$u_{R\circ S}(x_1,z_1) = \frac{0.7}{0.6} + \frac{0.7}{0.7},$$
$$u_{R\circ S}(x_1,z_2) = \frac{0.7}{0.7} + \frac{0.7}{0.8},$$
$$u_{R\circ S}(x_2,z_1) = \frac{0.7}{0.6} + \frac{0.7}{0.7} + \frac{0.6}{0.8},$$
$$u_{R\circ S}(x_2,z_2) = \frac{0.6}{0.7} + \frac{0.7}{0.8} + \frac{0.7}{0.9},$$
$$v_{R\circ S}(x_1,z_1) = [(\frac{0.8}{0.1} + \frac{0.7}{0.2}) \cup (\frac{0.8}{0.1} + \frac{0.5}{0.3})] \cap [(\frac{0.9}{0.2} + \frac{0.8}{0.3}) \cup (\frac{0.7}{0.1} + \frac{0.8}{0.2})] = \frac{0.8}{0.1} + \frac{0.7}{0.2} + \frac{0.5}{0.3}.$$

类似可求出$v_{R\circ S}(x_1,z_2)$, $v_{R\circ S}(x_2,z_1)$, $v_{R\circ S}(x_2,z_2)$, 故

$$v_{R\circ S}(x_1,z_1) = \frac{0.8}{0.1} + \frac{0.7}{0.2} + \frac{0.5}{0.3},$$
$$v_{R\circ S}(x_1,z_2) = \frac{0.8}{0.1} + \frac{0.7}{0.2},$$
$$v_{R\circ S}(x_2,z_1) = \frac{0.8}{0.1} + \frac{0.5}{0.2},$$

$$v_{R\circ S}(x_2,z_2)=\frac{0.9}{0.07}+\frac{0.8}{0.1}.$$

定义 10 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$分别是论域$X_1,X_2,\cdots,X_n$上的二型直觉模糊集, 则$A_1,A_2,\cdots,A_n$的笛卡尔积$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$也是定义在乘积空间$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$上的二型直觉模糊集, 记为

$$\begin{aligned}&A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<(x_1,\cdots,x_n),\\&u_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(x_1,\cdots,x_n),\\&v_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(x_1,\cdots,x_n)>\\&|x_1\in X_1,\cdots,x_n\in X_n\},\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}&u_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(x_1,\cdots,x_n)=\\&u_{A_1}(x_1)\cap\cdots\cap u_{A_n}(x_n),\\&v_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(x_1,\cdots,x_n)=\\&v_{A_1}(x_1)\cup\cdots\cup v_{A_n}(x_n).\end{aligned}$$

定理 3 设R,S,P是$X\times Y$上的二型直觉模糊关系, 则下列各式成立:

1) $R\cup S=S\cup R,\ S\cap R=R\cap S$;

2) $R\cup(S\cup P)=(R\cup S)\cup P,\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

3) $R\cup R=R,\ R\cap R=R$;

4) $(R^c)^c=R$;

5) $(R\cup S)^c=R^c\cap S^c,\ (R\cap S)^c=R^c\cup S^c$.

证 直接验证即可, 类似定理2.

6 基于二型直觉模糊理论的近似推理(Approximation reasoning based on type-2 intuitionistic fuzzy theory)

模糊推理是实现计算机智能的重要工具, 以模糊推理为基础的模糊推理系统等有关内容是计算机科学、控制科学等学科的重要研究课题. Zadeh在1973年提出了CRI(compositional rule of inference)算法, 其基本思想是首先通过蕴涵算子把规则转化成模糊关系, 再将输入与模糊关系合成得到输出. 后经过Mamdani等人的发展, 形成了如今广泛使用的CRI方法. 本文将CRI算法推广到二型直觉模糊推理中, 其中蕴涵算子采用Mamdani最小蕴涵算子, 讨论基于二型直觉模糊理论MP(modus ponens)问题和MT(modus tollens)问题.

6.1 基于二型直觉模糊理论的MP(MP based on type-2 intuitionistic fuzzy theory)

设A与A^*是论域X上的二型直觉模糊集, B与B^*是论域Y上的二型直觉模糊集, 其中:

$$\begin{aligned}&A=\{(x,u_A(x),v_A(x))|x\in X\},\\&B=\{(y,u_B(y),v_B(y))|y\in Y\},\\&A^*=\{(x,u_{A^*}(x),v_{A^*}(x))|x\in X\}.\end{aligned}$$

最简单二型直觉模糊取式(MP)问题的推理形式为

$$\begin{array}{l}\textbf{规则}\ A\to B\\ \textbf{输入}\ A^*\\ \hline \textbf{输出}\ B^*\end{array}\tag{1}$$

若采用CRI算法求解上述模型, 首先基于Mamdani最小蕴涵算子将二型直觉模糊规则解释为$X\times Y$中的一个二型直觉模糊关系

$$\begin{aligned}R_{A\to B}=\{&<(x,y),u_{A\to B}(x,y),\\&v_{A\to B}(x,y)>|x\in X,y\in Y\},\end{aligned}$$

其中: 对任意$x\in X,\ y\in Y$有

$$\begin{aligned}&u_{A\to B}(x,y)=u_A(x)\cap u_B(y),\\&v_{A\to B}(x,y)=v_A(x)\cup v_B(y).\end{aligned}$$

再将输入A^*与二型直觉模糊关系$R_{A\to B}$合成可得到输出B^*, 则

$$\begin{aligned}&B^*=A^*\circ R_{A\to B}=\\&\{<y,u_{B^*}(y),v_{B^*}(y)>|y\in Y\},\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}&u_{B^*}(y)=\bigcup_{x\in X}[u_{A^*}(x)\cap u_{A\to B}(x,y)],\\&v_{B^*}(y)=\bigcap_{x\in X}[v_{A^*}(x)\cup v_{A\to B}(x,y)].\end{aligned}$$

6.2 基于二型直觉模糊理论的MT(MT based on type-2 intuitionistic fuzzy theory)

设A与A^*是论域X上的二型直觉模糊集, B与B^*是论域Y上的二型直觉模糊集, 其中:

$$\begin{aligned}&A=\{(x,u_A(x),v_A(x))|x\in X\},\\&B=\{(y,u_B(y),v_B(y))|y\in Y\},\\&B^*=\{(y,u_{B^*}(y),v_{B^*}(y))|y\in Y\},\end{aligned}$$

则二型直觉模糊拒取式(MT)问题的推理形式为

$$\begin{array}{l}\textbf{规则}\ A\to B\\ \textbf{输入}\ B^*\\ \hline \textbf{输出}\ A^*\end{array}\tag{2}$$

若采用CRI算法求解上述模型, 首先基于Mamdani最小蕴涵算子将二型直觉模糊规则解释为$X\times Y$中的一个二型直觉模糊关系$R_{A\to B}=\{<(x,y),u_{A\to B}(x,y),v_{A\to B}(x,y)>|x\in X,y\in Y\}$. 其中, 对任意$x\in X,\ y\in Y$有

$$\begin{aligned}&u_{A\to B}(x,y)=u_A(x)\cap u_B(y),\\&v_{A\to B}(x,y)=v_A(x)\cup v_B(y).\end{aligned}$$

再将输入B^*与二型直觉模糊关系$R_{A\to B}$合成可得到

输出A^*, 则

$$A^*=\{<x,u_{A^*}(x),v_{A^*}(x)>|x\in X\},$$

其中:

$$u_{A^*}(x)=\bigcup_{y\in Y}[u_{B^*}(y)\cap u_{A\to B}(x,y)],$$
$$v_{A^*}(x)=\bigcap_{y\in Y}[v_{B^*}(y)\cup v_{A\to B}(x,y)].$$

6.3　实例分析(Example analysis)

投票选举经常出现在人们的现实生活中, 在投票前, 各投票人常常需要对每位候选人做出评价, 最后基于综合考虑, 给出投票结果. 事实上, 综合评价是一个系统工程, 因而在投票过程中, 模糊性、不确定性、踌躇性常常伴随于投票人, 往往很难完全赞成某一个候选人, 也往往很难完全否决一个候选人. 投票人可能更愿意给出一个赞成的隶属程度或反对的隶属程度, 而不愿完全赞成或完全反对某个候选人. 例如, 在一次投票选举过程中, 共有100位投票资格人, 在对某位候选人甲进行投票时, 假如有80人准备投赞成票, 其中50人赞成的程度为0.9, 30人赞成的程度为0.8; 另外有20人准备投反对票, 其中15人反对的程度为0.8, 另有5人反对的程度为0.7. 此时可以用一个二型直觉模糊集表示投票结果, 因为有50/100的人投了0.9的赞成票, 30/100的人投了0.8的赞成票, 即支持甲当选的程度为$\dfrac{0.3}{0.8}+\dfrac{0.5}{0.9}$. 类似地, 反对甲当选的程度为$\dfrac{0.05}{0.7}+\dfrac{0.15}{0.8}$. 投票模型具有很多实际应用, 下面, 将投票模型用于博士论文的质量评价.

博士学位论文的质量评价是一个重要研究课题, 学位论文的质量受多个因素的影响, 一般地, 论文的创新性和前沿性是极其重要的指标. 在评选优秀学位论文时, 常常是多个专家先对学位论文的各个指标进行评价, 然后按照一定的规则得出论文的总体评价. 例如, 在一次优秀学位论文评选时, 共有20位专家, 在对某篇论文y的创新程度进行评分时, 有4位专家认为该论文隶属于“创新度较大”的程度是0.7; 有5位专家认为该论文隶属于“创新度较大”的程度是0.8; 而有6位专家认为该论文不隶属于“创新度较大”的程度是0.1; 有5位专家认为该论文不隶属于“创新度较大”的程度是0.2. 此时, 专家是从正、反两方面对论文的“创新度较大”进行了评价, 由于专家打分时, 主观性、不确定性、犹豫性常常伴随, 若简单的将反对隶属度转化为支持隶属度, 将忽略人们判断问题的踌躇程度, 不符合现实情况, 因此论文创新程度用一个二型直觉模糊集表示更具合理性.

事实上, 可将论文的“创新度较大”记为$A=\{(x,u_A(x),v_A(x))|x\in X\}$, 其中: X表示所有待评论文, $u_A(x)$表示论文x隶属于“创新度较大”的程度; $v_A(x)$表示论文x不隶属于“创新度较大”的程度. 因为论文y有4/20的专家认为该论文隶属于“创新度较大”的程度是0.7, 有5/20的专家认为该论文隶属于“创新度较大”的程度是0.8, 可规定论文y隶属于“创新度较大”的程度为$\dfrac{0.2}{0.7}+\dfrac{0.25}{0.8}$, 即$u_A(y)=\dfrac{0.2}{0.7}+\dfrac{0.25}{0.8}$; 类似地, 论文$y$不隶属于“创新度较大”的程度为$\dfrac{0.3}{0.1}+\dfrac{0.25}{0.2}$, 即$v_A(y)=\dfrac{0.3}{0.1}+\dfrac{0.25}{0.2}$. 显然, 基于二型直觉模糊集表示论文的创新程度具有一定直观性和合理性, 同样可以利用二型直觉模糊集表示论文的前沿性等指标.

例 4　论文的创新性和论文的质量具有很强的相关关系. 一般认为, 如果论文的“创新度较大”, 那么论文的“质量较高”, 现已知某篇论文隶属于“创新度较大”的程度很小, 则是否可以推断该论文隶属于“质量较高”的程度也很小呢? 基于前述的分析,“创新度较大”、“质量较高”用二型直觉模糊集表示更具合理性. 假设$A^*=\{(x,u_{A^*}(x),v_{A^*}(x))|x\in X\}$和$A=\{(x,u_A(x),v_A(x))|x\in X\}$都表示“创新度较大”; $B=\{(x,u_B(x),v_B(x))|x\in X\}$表示“质量较高”, 并令论域$X=\{x_1\}$, 其中:

$$u_A(x_1)=\frac{0.2}{0.7}+\frac{0.25}{0.8},\ v_A(x_1)=\frac{0.3}{0.1}+\frac{0.25}{0.2},$$
$$u_B(x_1)=\frac{0.3}{0.8}+\frac{0.3}{0.9},\ v_B(x_1)=\frac{0.4}{0.1},$$
$$u_{A^*}(x_1)=\frac{0.5}{0.1}+\frac{0.3}{0.2},\ v_{A^*}(x_1)=\frac{0.2}{0.8}.$$

从上述隶属函数的设定可知, x_1隶属于A^*的程度较小, 也即是x_1隶属于“创新度较大”的程度较小, 则原问题转化为式(1)的推理形式, 最终目的即为求B^*. 基于Mamdani最小蕴涵算子可求得二型直觉模糊关系$R_{A\to B}$, 其中:

$$u_{A\to B}(x_1,x_1)=\frac{0.2}{0.7}+\frac{0.25}{0.8},$$
$$v_{A\to B}(x_1,x_1)=\frac{0.3}{0.1}+\frac{0.25}{0.2},$$

故输出$B^*=A^*\circ R_{A\to B}=\{<x,u_{B^*}(x),v_{B^*}(x)>|x\in X\}$. 其中:

$$u_{B^*}(x_1)=\bigcup_{x\in X}[u_{A^*}(x)\cap u_{A\to B}(x,x_1)]=\frac{0.25}{0.1}+\frac{0.25}{0.2},$$
$$v_{B^*}(x_1)=\bigcap_{x\in X}[v_{A^*}(x)\cup v_{A\to B}(x,x_1)]=\frac{0.2}{0.8}.$$

从最终的结果B^*可以看出, x_1隶属于“质量较高”的程度很小, 符合人们的直观感受, 这说明基于二型直觉模糊理论较好的表达了原问题, 在一定

程度上, 可以认为二型直觉模糊集具有一定的实用价值.

7 结论(Conclusions)

二型直觉模糊集增强了系统处理模糊性、不确定性、踌躇性的能力, 在一定程度上可能是解决复杂系统的有效工具. 直觉模糊集作为传统模糊集的一种拓展形式, 在理论上比Zadeh的一型模糊集更优越, 为解决人们判断问题所出现的犹豫信息提供了理论依据; Zadeh的二型模糊集增强了系统处理模糊性的能力, 为解决复杂系统提供了新思路, 将直觉模糊集和二型模糊集结合研究是很自然的推广, 基于此, 本文给出了二型直觉模糊集的概念, 说明了它是模糊集更加广泛的拓展, 讨论了二型直觉模糊集的基本运算, 二型直觉模糊关系及其合成运算, 最后研究了基于二型直觉模糊理论的近似推理. 上述所有工作是构建二型直觉模糊逻辑系统的必要理论基础, 关于二型直觉模糊系统的模糊化、降型、解模糊化, 将另文详述.

参考文献(References):

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. *Information and Control*, 1965, 8(13): 338 – 356.

[2] ZADEH L A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning [J]. *Information Science*, 1975, 8(2): 199 – 249.

[3] DURAN K, BERNAL H, MELGAREJO M. Improved iterative algorithm for computing the generalized centroid of an interval type–2 fuzzy set [C] //*Proceedings of the 2008 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society.* New York: IEEE, 2008: 1 – 6.

[4] COUPLAND S, JOHN R. Geometric type-1 and type-2 fuzzy logic systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(1): 3 – 15.

[5] KARNIK N N, MENDEL J M . Introduction to type-2 fuzzy logic systems [C] //*Proceedings of the IEEE World Congress on Computational Intelligence.* Anchorage, USA: IEEE, 1998: 915 – 920

[6] LIANG Q, MENDEL J M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 535 – 550.

[7] MENDEL J M. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions* [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.

[8] MENDEL J M. Type-2 fuzzy sets and systems: an overview [J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 20 – 29.

[9] MENDEL J M. Advance in type–2 fuzzy sets and systems [J]. *Information Sciences*, 2007, 177(1): 84 – 110.

[10] 潘永平, 黄道平, 孙宗海. II型模糊控制综述 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(1): 13 – 23.
(PAN Yongping, HUANG Daoping, SUN Zonghai. Overview of type-2 fuzzy logic control [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1): 13 – 23.)

[11] 潘永平, 孙宗海, 黄道平. II型模糊集合与系统研究进展 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(12): 1693 – 1703.
(PAN Yongping, SUN Zonghai, HUANG Daoping. A survey of type-2 fuzzy sets and systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(12): 1693 – 1703.)

[12] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87 – 96.

[13] ATANASSOV K. *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications* [M]. Heidelberg, Germany: Physical-Verlag, 1999.

[14] ATANASSOV K, GARGOV G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 31(3): 343 – 349.

[15] 刘峰, 袁学海. 模糊数直觉模糊集 [J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(1): 88 – 91.
(LIU Feng, YUAN Xuehai. Fuzzy number intuitionistic fuzzy set [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2007, 21(1): 88 – 91.)

[16] HU J H, YANG Y, GUO S Z. Fuzzy number intuitionistic fuzzy set and its representation of structured element [C] //*Proceedings of the 2008 International Symposium on Intelligent Information Technology Application Workshops*. Washington, DC: IEEE, 2008: 349 – 352.

[17] KARNIK N N, MENDEL J M. Operations on type-2 fuzzy sets [J]. *Fuzzy Sets and Systems,* 2001, 122(2): 327 – 348.

[18] MIZUMOTO M, K TANAKA. Some properties of fuzzy sets of type-2 [J]. *Information and Control*, 1976, 31(4): 312 – 340.

[19] BURILLO P, BUSTINCE H. Intuitionistic fuzzy relations [J]. *Mathware Soft Computing*, 1995, 2(1): 5 – 38.

[20] BUSTINCE H, BURILLO P. Structures on intuitionistic fuzzy relations [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(3): 293 – 303.

作者简介:

赵 涛 (1988–), 男, 博士研究生, 研究方向为模糊辨识和模糊控制, E-mail: zhaotaozhaogang@126.com;

肖 建 (1950–), 男, 教授, 博师生导师, 研究方向为智能控制和鲁棒控制, E-mail: jxiao@home.swjtu.edu.cn.