

执行器有时滞的馈能式主动悬架的鲁棒控制

王 鹏¹, 宋鹏云¹, 张继业¹, 张克跃²

(1. 西南交通大学 牵引动力国家重点实验室, 四川 成都 610031; 2. 西南交通大学 土木工程系, 四川 峨眉山 614202)

摘要: 车辆用的馈能式主动悬架系统具有不确定参数, 而且执行器有时滞. 为了保证其稳定性、减振性和能量回收性能, 我们提出了一种保成本/ H_∞ 鲁棒控制器设计方法. 对车辆悬架系统性能方面的要求, 用二次型加权性能指标和 H_∞ 性能指标反映. 定义了一个Lyapunov函数代表这两个性能指标; 根据这个Lyapunov函数, 把闭环系统设计问题转化为一组线性矩阵不等式以求解控制器. 根据直流电机工作原理, 分析了参数摄动和执行器时滞对系统能量平衡的影响, 推导出了能量平衡方程. 最后对二自由度1/4车悬架模型进行了仿真; 结果表明: 对一定范围内的参数摄动和有界时滞, 悬架系统在有效减振的同时, 实现了能量的回收

关键词: 鲁棒控制; 能量回收; 执行器时滞; 保成本/ H_∞ ; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273.1 **文献标识码:** A

Robust control for self-powered active suspension with time-delay in actuator

WANG Peng¹, SONG Peng-yun¹, ZHANG Ji-ye¹, ZHANG Ke-yue²

(1. State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 610031, China;

2. Department of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Emeishan Sichuan 614202, China)

Abstract: For the self-powered active vehicle suspension system with parameter uncertainties and time-delay in the actuator, a guaranteed-cost/ H_∞ robust controller is designed to ensure the system performances in stability, vibration isolation and energy feedback. In the controller design, parameter uncertainties and the time-delay in actuator are taken into consideration. The requirements on vehicle suspension systems are described by a quadratic weighted performance index and an H_∞ performance index. Both performance indices are combined into a Lyapunov function which is to be satisfied by the closed-loop system, formulating the design problem into linear matrix inequalities that are solved for the controller. Based on the DC motor principle, the impact of parameter perturbations and time-delay in the actuator on the energy balance is analyzed, and an energy balance equation is developed. Simulation is made on a two degrees-of-freedom quarter-car suspension model with a certain range of parameter perturbations and bounded time-delay. Results show that this suspension system guarantees effective vibration isolation while realizing energy reproduction.

Key words: robust control; energy reproduction; actuator delay; guaranteed cost/ H_∞ ; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

悬架是现代汽车的重要组成部分, 其主要功能是保证车辆的行驶平顺性及乘坐舒适性. 为了提高汽车悬架的性能, 近年来主动悬架技术得到了广泛的研究. 文献[1-3]对于确定的车辆悬架模型, 利用LQG(Linear Quadratic Gaussian, 线性二次高斯)方法给出了最优控制律; 但是由于实际系统的参数通常存在摄动, 文献[4]指出LQG方法在模型摄动情况下基本不具备鲁棒性, 所以需要研究不确定系统的鲁棒控制方法. 文献[5]针对具有范数有界不确定参数的悬架模型, 在二次型加权性能指标中含有交叉项的情况下, 利用Riccati方程给出了鲁棒保性能控制律. 然而Riccati方程中的参数求解通常比较困难,

所以文献[6-7]分别用广义 H_2 和 H_∞ 性能指标反映车辆悬架的设计约束, 给出了线性矩阵不等式求解主动悬架鲁棒控制律的设计方法.

另一方面, 主动悬架的实现依赖于执行器的输出控制, 而执行器应用于汽车减振过程时, 时延现象不可避免^[8]; 因此, 控制器设计应考虑这种时延对控制性能甚至系统稳定性的影响. 文献[9]针对定常时滞, 利用系统的状态变换, 将含有时滞的状态模型转换为非时滞模型, 并利用二次型性能指标设计了最优控制器. 而文献[10]针对有界时滞, 通过定义一个Lyapunov函数来保证系统的稳定性, 进而利用线性矩阵不等式方法设计出了满足车辆悬架设计指标的 H_∞ 控制器. 由于大量文献都是分别讨论参数不确

定性或时延对控制器设计的影响,文献[11]在综合考虑这两方面因素的情况下,利用广义 H_2 和 H_∞ 性能指标设计了基于线性矩阵不等式求解的主动悬架控制器.

虽然主动悬架技术能够显著提高悬架的性能,但是需要消耗大量能量来抑制路面不平顺造成的振动.因此,能量回收将是解决主动悬架高能耗问题,实现低碳节能的有效手段.能量回收式主动悬架的基本功能是在提高系统性能的同时尽可能地回收由不平路面激励引发的悬架系统振动能量.文献[12]对于主动悬架在减振同时实现能量回收的可行性进行了分析.文献[13]则利用开发出的电磁执行器,进行了整车台架试验,对减振性能和能量回收性能进行了验证.文献[14]利用LQG算法实现了能量回收式悬架系统的主动控制,分析了能量平衡条件,并进行了仿真实验.而文献[5]在文献[14]的基础上讨论了不确定系统参数对能量平衡的影响.

由于参数不确定性和执行器时延对于实际系统几乎是不可避免的,本文将综合考虑这两方面因素,并在保证系统稳定性和减振性的前提下,给出控制器的设计方法;另一方面,现阶段关于同时分析参数不确定性和执行器时滞对能量平衡影响的文献还比较少见,所以本文针对这种情况进行了相关讨论,得出了相应的能量平衡条件,并进一步给出了仿真分析.结果表明,对于一定范围的系统摄动和有界执行器时滞,本文设计的控制器在保证能量平衡的同时具有良好的控制效果.

2 系统结构与数学模型(System structure and mathematical model)

2.1 运动方程与性能指标(Equations of motion and performance indicators)

图1为二自由度主动悬架系统结构示意图.图中: F_a 为主动悬架控制力, c_s 为悬架阻尼, k_s 为悬架弹簧刚度, k_t 为轮胎刚度, m_s 为车体的簧上质量, m_u 为车体的簧下质量, z_s 为簧上质量块的位移, z_u 为簧下质量块的位移, z_r 为路面位移.

根据牛顿第二定律,二自由度主动悬架的动力学微分方程为

$$m_s \ddot{z}_s = F_a - c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_s(z_s - z_u), \quad (1)$$

$$m_u \ddot{z}_u = -F_a + c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s(z_s - z_u) - k_t(z_u - z_r). \quad (2)$$

对于悬架系统的设计,参考指标主要包括轮胎动载荷 $z_u - z_r$ 、悬架动行程 $z_s - z_u$ 和车身垂向加速度 \ddot{z}_s .根据文献[1]定义目标性能指数 J 为

$$J = \int_0^\infty \{ \ddot{z}_s^2(t) + \rho_1 [z_s(t) - z_u(t)]^2 + \rho_2 \dot{z}_s^2(t) +$$

$$\rho_3 [z_u(t) - z_r(t)]^2 + \rho_4 \dot{z}_u^2(t) \} dt, \quad (3)$$

式中的 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ 为权重系数.

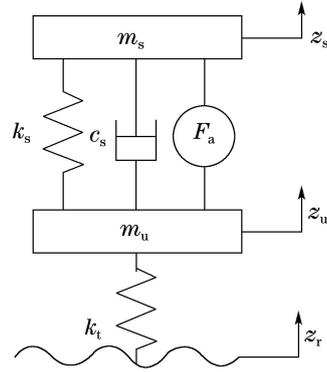


图1 二自由度主动悬架系统结构
Fig. 1 Structure of active suspension with two degrees of freedom

2.2 系统状态空间模型(State space model)

定义系统状态向量和系统评价输出向量分别为

$$\mathbf{x}(t) = [z_s(t) - z_u(t) \quad \dot{z}_s(t) \quad z_u(t) - z_r(t) \quad \dot{z}_u(t)]^T, \\ \mathbf{y}(t) = [\ddot{z}_s(t) \quad z_s(t) - z_u(t) \quad \dot{z}_s(t) \quad z_u(t) - z_r(t) \quad \dot{z}_u(t)]^T.$$

考虑系统的执行器具有时滞并且结构参数存在摄动,将式(1)–(3)转化为状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{u}(t - h(t)) + \mathbf{L}w(t), \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-\max(h(t)), 0], \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t - h(t)). \quad (5)$$

这里将路面位移 $z_r(t)$ 处理为噪声,并令 $\mathbf{u}(t - h(t)) = [F_a(t - h(t))]$,于是有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{m_s} & \frac{-c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & \frac{-k_t}{m_u} & \frac{-c_s}{m_u} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

假设 $\Delta\mathbf{A}$ 和 $\Delta\mathbf{B}$ 是具有范数有界的不确定参数矩阵,即系统的不确定性可描述为

$$[\Delta\mathbf{A} \quad \Delta\mathbf{B}] = \mathbf{H}\mathbf{F}(t)[\mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2], \quad (6)$$

其中: $\mathbf{H}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ 为已知的具有适当维数的实常数矩阵, $\mathbf{F}(t)$ 为未知的时变矩阵,并满足 $\mathbf{F}^T(t)\mathbf{F}(t) \leq \mathbf{I}$,这里 \mathbf{I} 表示适当维数的单位矩阵.

由于性能指标(3)可表示为

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{y}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}] dt, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{Q}_1 = \text{diag}\{1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$, 所以式(5)中的矩阵 \mathbf{C}, \mathbf{D} 取值为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

系统的控制滞后时间由 $h(t)$ 表示, 且存在正实数 h^* 和 ρ_h 使得对所有的 t 满足

$$0 \leq h(t) \leq h^* < \infty, \quad \dot{h}(t) \leq \rho_h < 1. \quad (8)$$

同时, 系统的初始条件 $\phi(t)$ 是定义在 $[-h(t), 0]$ 上的连续向量函数. 由于 $h(t)$ 对于性能指标 J 在数值上的影响很小^[11], 在这样的时延下, 可近似认为 $\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$, 因此由式(7)性能指标可写为

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{N} \mathbf{u}(t)] dt, \quad (9)$$

其中: $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{C}$, $\mathbf{R} = \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{D}$, $\mathbf{N} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{D}$, 并且 \mathbf{Q}, \mathbf{R} 为对称正定阵, 满足 $\mathbf{Q} - \mathbf{N} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}^T > 0$.

另一方面, 考虑噪声对性能指标 J 的影响, 令

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Q}_1^{1/2} \mathbf{y}(t) = \text{diag}\{1, \sqrt{\rho_1}, \sqrt{\rho_2}, \sqrt{\rho_3}, \sqrt{\rho_4}\} \mathbf{y}(t),$$

则评价输出 $\mathbf{z}(t)$ 的 H_{∞} 范数能够描述从能量有界扰动 $\mathbf{w}(t)$ 到该评价输出能量值间的关系, 所以将该评价输出的 H_{∞} 范数作为另一个性能指标.

针对上述性能指标的分析, 可给出控制器的设计要求, 即对于系统(4)和评价输出(5), 求出符合以下要求的状态反馈控制律 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$:

- 1) 闭环系统渐近稳定;
- 2) 在没有噪声干扰的情况下, 系统性能指标式(9)有界;
- 3) H_{∞} 性能指标 $\|\mathbf{T}_{wz}\|_{\infty} = \|\mathbf{z}\|_2 / \|\mathbf{w}\|_2 < \gamma$ 中的 γ 达到最小值.

3 主动悬架控制器(Active suspension controller)

不考虑噪声干扰输入, 即 $\mathbf{w}(t) = 0$ 时的系统为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) + (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) \mathbf{u}(t - h(t)), \quad (10)$$

这里: n 表示状态向量 \mathbf{x} 的维数, m 表示输入向量 \mathbf{u} 的维数.

定义 1^[15] 对系统(10)和性能指标(9), 如果存在一个标量 J^* 和一个控制律 $\mathbf{u}^*(t)$, 使得对所有允许

的不确定性, 闭环系统是渐近稳定的, 且闭环性能指标值满足 $J \leq J^*$, 则称 J^* 为一个保成本, $\mathbf{u}^*(t)$ 为一个保成本控制律.

定义 2^[15] 对系统(10), 如果存在一个线性状态反馈控制律 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, 对称正定矩阵 $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和标量 $\varepsilon > 0$ 使得对所有允许的不确定性, 给定如下 Lyapunov 函数:

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{x}(t) + \int_{t-h(t)}^t \mathbf{x}^T(s) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x}(s) ds. \quad (11)$$

对所有的 $(\mathbf{x}(t), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $t > 0$ 及任意初始条件 $\mathbf{x}(t) = \phi(t)$, $t \in [-h(t), 0]$, 有

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t), t) \leq -\varepsilon \|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad (12)$$

则称系统(10)是鲁棒二次可镇定的, 且 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ 称为系统(10)的一个鲁棒二次镇定控制律.

下面基于定义 1 和定义 2, 针对系统(10)和性能指标(9), 给出鲁棒二次镇定的保成本控制律的存在条件和设计方法.

定理 1 如果系统(10)满足定义 2, 且

$$\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{N} \mathbf{u}(t) + \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) \leq -\varepsilon \|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad (13)$$

则闭环系统是大范围渐近稳定的, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ 是一个保成本控制律, $V(\mathbf{x}(0), 0)$ 是一个保成本, 其中 $\mathbf{x}(0) = \phi(0) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的初始条件.

证 由式(13)有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) &\leq \\ &-\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) - \\ &2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{N} \mathbf{u}(t) - \varepsilon \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq -\varepsilon \|\mathbf{x}(t)\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

由定义 2 知系统(10)是鲁棒二次可镇定的, 于是按 Lyapunov 稳定性理论可知闭环系统是大范围渐近稳定的. 而式(13)两端积分有

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) dt \leq \\ &\int_0^{\infty} [-\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) - \\ &2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{N} \mathbf{u}(t) - \varepsilon \|\mathbf{x}(t)\|^2] dt \leq \\ &\int_0^{\infty} [-\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) - \\ &2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{N} \mathbf{u}(t)] dt. \end{aligned} \quad (15)$$

由于闭环系统是渐近稳定的, 有 $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$, 故

$$\int_0^{\infty} \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) dt = V(\mathbf{x}(\infty), \infty) - V(\mathbf{x}(0), 0) = -V(\mathbf{x}(0), 0). \quad (16)$$

比较式(15)和式(16)可知

$$\int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) +$$

$$2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{N}\mathbf{u}(t)dt \leq V(\mathbf{x}(0), 0), \quad (17)$$

所以由定义1可知 $V(\mathbf{x}(0), 0)$ 是一个保成本, 而 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ 是一个保成本控制律.

定理1只是给出了保成本控制律的存在条件, 而不能进行求解, 下面将给出这一条件的求解算法.

定理2 对于系统(10)和性能指标(9), 如果存在对称正定矩阵 $\mathbf{X}, \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、矩阵 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和标量 $\alpha > 0, \beta > 0$, 使得对所有允许不确定性 $\mathbf{F}(t)$ 满足

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{B}\mathbf{Y} & \mathbf{X}\mathbf{E}_1^T & \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{C}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{D}^T \\ * & -(1-\rho_h)\mathbf{Z} & \mathbf{Y}^T\mathbf{E}_2^T & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha\mathbf{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & * & -\mathbf{Q}_1^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

其中: $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{H}\mathbf{H}^T$, “*” 表示由矩阵的对称性得到的矩阵块. 则对于系统(10), $\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}(t)$ 是一个保成本控制律, $V(\mathbf{x}(0), 0)$ 是一个保成本.

证 令 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}$, 引入状态反馈控制律后闭环系统可写为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\mathbf{x}(t-h(t)). \quad (19)$$

按照定义2取Lyapunov函数

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \int_{t-h(t)}^t \mathbf{x}^T(s)\mathbf{R}\mathbf{x}(s)ds, \quad (20)$$

其沿闭环系统(19)关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) = & \mathbf{x}^T(t)(\bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{R})\mathbf{x}(t) - \\ & (1-\dot{h}(t))\mathbf{x}^T(t-h(t))\mathbf{R}\mathbf{x}(t-h(t)) + \\ & \mathbf{x}^T(t-h(t))\mathbf{K}^T\bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \\ & \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\mathbf{x}(t-h(t)). \end{aligned} \quad (21)$$

令

$$J_v = \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{x}^T(t)(\varepsilon + \mathbf{G})\mathbf{x}(t), \quad (22)$$

其中 $\mathbf{G} = (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K})^T\mathbf{Q}_1(\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K})$. 将式(21)代入式(22)可得

$$J_v = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h(t)) \end{bmatrix}^T \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h(t)) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{R} + \varepsilon\mathbf{I} + \mathbf{G} & \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{K} \\ \mathbf{K}^T\bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{P} & -(1-\dot{h}(t))\mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

考虑到系统的不确定性, 令 $\mathbf{W} = \mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$, 其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{R} + \varepsilon\mathbf{I} + \mathbf{G} & \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{K}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P} & -(1-\dot{h}(t))\mathbf{R} \end{bmatrix}, \\ \Delta\mathbf{L} = & \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^T \\ \mathbf{K}^T\mathbf{E}_2^T \end{bmatrix}^T + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^T \\ \mathbf{K}^T\mathbf{E}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{F}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

下面证明满足条件式(18), 则有 $\mathbf{W} < 0$.

令 $\varepsilon = \beta^{-1}, \mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}, \mathbf{R} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{X}^{-1}$, 在不等式(18)的两边同乘以 $\text{diag}\{\mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$ 可得

$$\mathbf{M}_1 := \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{E}_1^T & \mathbf{I} & \mathbf{C}^T + \mathbf{K}^T\mathbf{D}^T \\ * & -(1-\rho_h)\mathbf{R}\mathbf{K}^T\mathbf{E}_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha\mathbf{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon^{-1}\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & * & -\mathbf{Q}_1^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

其中 $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{R} + \alpha\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{P}$. 由矩阵Schur补性质, 式(24)等价于

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2 := & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{R} + \varepsilon\mathbf{I} & \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{K}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P} & -(1-\rho_h)\mathbf{R} \end{bmatrix} + \\ & \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix}^T + \alpha^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^T \\ \mathbf{K}^T\mathbf{E}_2^T \end{bmatrix} [\mathbf{E}_1 \ \mathbf{E}_2\mathbf{K}] + \\ & \begin{bmatrix} (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K})^T \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1 [\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K} \ 0] < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

根据矩阵不等式的性质, 存在标量 $\alpha > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{L} \leq & \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{H} \\ 0 \end{bmatrix}^T + \\ & \alpha^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^T \\ \mathbf{K}^T\mathbf{E}_2^T \end{bmatrix} [\mathbf{E}_1 \ \mathbf{E}_2\mathbf{K}]. \end{aligned} \quad (26)$$

由式(26), 并考虑时滞条件(8)可得

$$\mathbf{W} = \mathbf{L} + \Delta\mathbf{L} \leq \mathbf{M}_2, \quad (27)$$

所以由式(25)(27)可得 $\mathbf{W} < 0$, 进而由式(23)可知 $J_v < 0$, 即满足定理1的条件式(13); 因此, 由定理1可知 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}(t)$ 是一个保成本控制律, $V(\mathbf{x}(0), 0)$ 是一个保成本. 证毕.

定理2给出了满足1)–2)设计要求的控制器求解方法, 接下来考虑系统噪声对评价输出的影响.

定理3 对于系统(4)–(5)和性能指标(9)及 \mathbf{H}_∞

指标 $\|T_{wz}\|_\infty = \|z\|_2/\|w\|_2 < \gamma$, 如果优化问题

$$\min_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \alpha, \beta, \gamma} \gamma \quad (28)$$

使得

$$\begin{bmatrix} M\mathbf{X}C^T + \mathbf{Y}^T D^T & L \\ * & -\gamma Q_1^{-1} & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

有解 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \alpha, \beta, \gamma$, 则 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}(t)$ 是满足设计要求 1)–3) 的保成本/H $_\infty$ 控制律。

证 由于式(29)的主子式含有式(18), 所以由定理 2 知式(29)有解保证了 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}(t)$ 是系统(4)在没有噪声干扰情况下的保成本控制律。

下面证明闭环系统具有 H $_\infty$ 性能指标, 令

$$J_T = \int_0^T [\gamma^{-1}z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t)] dt, \quad (30)$$

则对任意非零的外部扰动 $w(t)$ 及 $T > 0$, 由 Lyapunov 函数(20)和零初始条件可以导出

$$\begin{aligned} J_T = & \int_0^T [\gamma_1^{-1}y^T(t)Q_1y(t) - \gamma_1 w^T(t)w(t) + \\ & \dot{V}(\mathbf{x}(t), t)] dt - V(\mathbf{x}(T), T) \leq \\ & \int_0^T [\gamma_1^{-1}y^T(t)Q_1y(t) - \gamma_1 w^T(t)w(t) + \\ & \dot{V}(\mathbf{x}(t), t)] dt. \end{aligned} \quad (31)$$

在 $w(t) \neq 0, u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ 的情况下, 式(20)沿系统(4)关于时间 t 的导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t), t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h(t)) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \mathbf{W}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h(t)) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

其中

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & PL \\ L^T P & 0 \end{bmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}y^T(t)Q_1y(t) - \gamma w^T(t)w(t) = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h(t)) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \mathbf{W}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h(t)) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}\mathbf{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

仿照式(25)–(27)的推导, 在式(29)成立的条件下可得 $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 < 0$, 于是将式(32)–(33)代入式(31)可知 $J_T < 0$, 即

$$\int_0^T \gamma^{-1}z^T(t)z(t) dt < \int_0^T \gamma w^T(t)w(t) dt.$$

上式对所有 $T > 0$ 成立, 所以当 $T \rightarrow \infty$, 满足 H $_\infty$ 性能指标

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2.$$

证毕。

优化问题(28)是关于变量 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \alpha, \beta, \gamma$ 的线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中 mincx 求解器进行求解, 进而得到系统的保成本/H $_\infty$ 控制器。

4 能量平衡分析(Energy balance analysis)

由于直流电机可以向电源反馈能量, 所以车辆在减振时, 总是希望电机消耗的能量少于或等于电机反馈的能量, 即系统电源的平均消耗功率 $\bar{E}_c \leq 0$, 此时称系统达到了能量平衡. 当车辆系统参数精确可知时, 执行器能够在完成减振任务的同时达到能量平衡的要求^[12]. 然而实际系统的不确定性和时滞现象是难以避免的, 所以需要研究这种情况下系统达到能量平衡的条件. 根据直流电机执行器工作原理^[5], 电源能耗的平均功率为

$$\bar{E}_c = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left(\frac{1}{c_{eq}} u^2 + u \cdot (\dot{z}_s - \dot{z}_u) \right) dt, \quad (34)$$

其中: u 为控制输入, $\dot{z}_s - \dot{z}_u$ 为执行器的直线速度, c_{eq} 为执行器电机的等效阻尼系数。

由式(34)可知, 欲使 $\bar{E}_c \leq 0$, 则 c_{eq} 需满足

$$c_{eq} \geq - \frac{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u^2 dt}{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u \cdot (\dot{z}_s - \dot{z}_u) dt}. \quad (35)$$

令 G_u 和 G_v 分别表示控制输入 u 与执行器直线速度 $\dot{z}_s - \dot{z}_u$ 到输入噪声 w 的频率特性. 考虑参数摄动和执行器时滞, G_u 和 G_v 可表示为

$$G_u(j\omega, \mathbf{F}, h) = \frac{U(j\omega, \mathbf{F}, h)}{w(j\omega)} = e^{-j\omega h} \mathbf{K} [j\omega \mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}} + e^{-j\omega h} \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K})]^{-1} \mathbf{L}, \quad (36)$$

$$G_v(j\omega, \mathbf{F}) = \frac{V(j\omega, \mathbf{F})}{w(j\omega)} = \mathbf{T} [j\omega \mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}} + e^{-j\omega h} \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K})]^{-1} \mathbf{L}, \quad (37)$$

其中: $\mathbf{T} = [0 \ 1 \ 0 \ -1]$, 时滞 h 满足条件(8). 于是由式(34)可得电源能量消耗的功率谱密度为^[14]

$$W_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (1/\tau) [(1/c_{eq}) G_u G_u^* + 0.5(G_u G_v^* + G_u^* G_v)] D_0, \quad (38)$$

其中 D_0 为输入噪声 w 功率谱密度. 将式(35)右端转换成频域形式, 并且命名为

$$J_p = - \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^\infty [G_u G_u^* D_0] d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [(G_u G_v^* + G_u^* G_v) D_0] d\omega}, \quad (39)$$

其中 G_u^* , G_v^* 分别为 G_u , G_v 的共轭.

由于 \bar{A} , \bar{B} 描述了系统所允许的所有不确定性, h 描述了所有可能的时滞, 因此系统存在摄动和执行器时滞时, 保证系统达到能量平衡的条件是

$$c_{eq} \geq \max(J_p) > 0. \tag{40}$$

5 仿真(Simulation)

根据某1/4车辆模型^[1]设置车体簧上质量 $m_s = 250$ kg, 簧下质量 $m_u = 45$ kg, 悬架弹簧刚度 $k_s = 16$ kN/m, 轮胎刚度 $k_t = 160$ kN/m, 悬架阻尼 $c_s = 1$ kN·s/m, 悬架的工作范围为 ± 0.1 m. 设定性能指标加权系数 $q_1 = 400$, $q_2 = 6$, $q_3 = 400$, $q_4 = 16$. 假设车体质量参数具有 $\pm 20\%$ 的摄动量, 并取时滞变化率的上界 $\rho_h = 0.5$, 求优化问题(28), 得到最小的 H_∞ 指标参数 $\gamma = 15.2$ 和控制器增益

$$K = [76157 \quad -68.9 \quad -39764 \quad 106.2],$$

为便于讨论, 此处将其称为控制器1.

下面增加两种情况与控制器1进行对比: 一种命名为控制器2, 它考虑执行器时滞但忽略质量参数摄动; 另一种则是被动悬架. 假设车辆以15 m/s的速度在D级路面上行驶, 输入噪声功率谱为^[16]

$$D_0 = \frac{0.083}{0.11j\omega + 1},$$

执行器时延均为50 ms, 利用Simulink对以上3种情形进行仿真, 控制器1-2和被动悬架对应的车身垂直振动加速度的时域响应如图2所示.

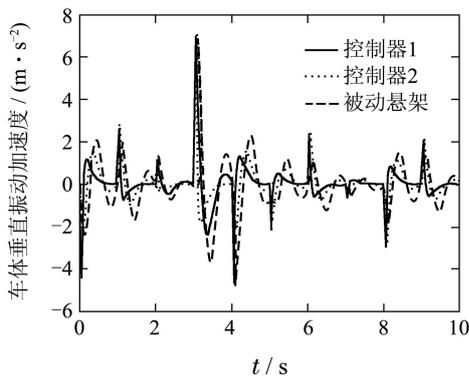


图2 车体垂直振动加速度对于随机路面扰动的时域响应
Fig. 2 Time domain response of vehicle vertical vibration acceleration to random road disturbance

由图2可以看出, 对于相同的振动冲击, 控制器1的减振效果最好. 控制器2相比控制器1, 响应速度较低, 使得振幅较大. 而被动悬架的响应速度则是最低的. 为了分析执行器时滞对控制系统的影响, 命名控制器3, 它考虑系统的不确定性而忽略执行器时滞. 所有参数条件不变, 对控制器1, 3进行仿真, 车身垂直振动加速度的时域响应如图3所示.

由图3可知, 控制器3在50 ms的执行器时滞下已经不能有效减振, 而控制器1仍然保持很好的性能. 进一步的仿真表明, 控制器3对低于35 ms的时滞还能保持较好的减振性能, 当时滞高于35 ms后, 控制器的性能急剧下降. 而控制器1却可以在保持减振性能的同时容许50 ms的时滞. 所以, 本文设计的控制器可以增强系统对于执行器时滞的鲁棒稳定性.

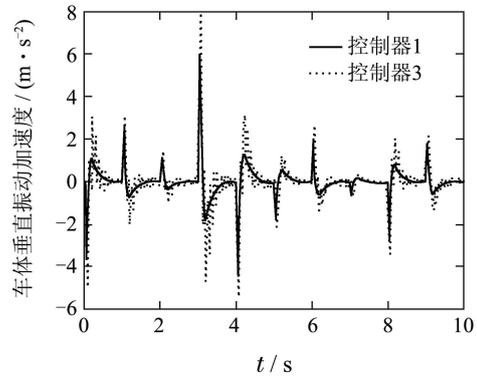


图3 车体垂直振动加速度对于随机路面扰动的时域响应
Fig. 3 Time domain response of vehicle vertical vibration acceleration to random road disturbance

下面给出系统能耗的仿真分析. 当系统不存在摄动和执行器时滞时, 由 $\bar{E}_c = 0$ 和式(39), 解得相应的 c_{eq} , 并以此情形为基准(命名为nominal), 分析质量参数摄动和执行器时滞对电源能耗的影响, 仿真结果见图4.

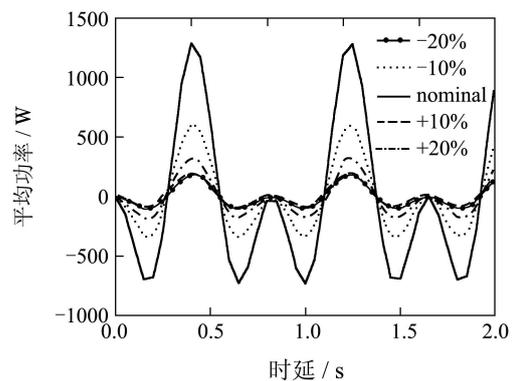


图4 质量参数摄动和执行器时滞对平均功率的影响
Fig. 4 Impact on mean power caused by mass parameter perturbation and actuator delay

根据式(34), 质量参数的摄动会改变电源平均消耗功率的大小, 如图4所示. 而由式(38)可知, 执行器时滞将对平均功率谱的相位值产生影响, 进而影响 \bar{E}_c 的值. 由图4可知, 随着执行器时滞量的增大, 电源消耗的平均功率值呈周期性变化. 从图4还可以看到, 在设计执行器时, 如果能够将执行器时滞控制在0.275 s之内, 则可以保证能量平衡, 并且对于 $\pm 20\%$ 的系统质量参数摄动均适用.

为了验证第4节的能量估算方法, 根据式(40)求得 $\max(J_p) = 3435.1$, 并取 $c_{eq} = 3500$ 作为对比, 计算电源的能耗, 仿真结果如图5所示. 由图5可知, 当 $c_{eq} = \max(J_p)$ 时, 电源能耗始终保持在零点附近. 而取 $c_{eq} = 3500$ 时, 10s的仿真过程中, 电源能耗为 -99.5 J . 所以, 当执行器电机的等效阻尼系数 c_{eq} 满足条件(40)时, 系统可以达到能量平衡的要求.

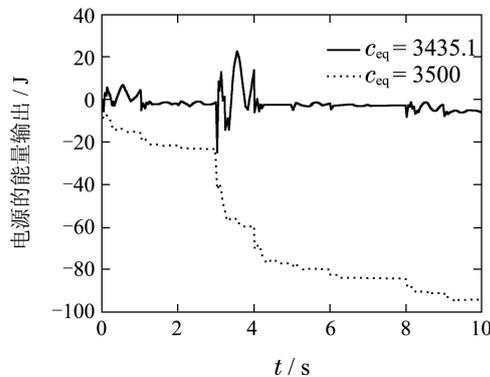


图 5 电源的能量输出

Fig. 5 Energy output of source power

6 结论(Conclusion)

本文在参考车辆主动悬架的设计指标基础上, 同时考虑了系统参数不确定性和执行器时滞, 提出了一种基于线性矩阵不等式求解的保成本/ H_∞ 控制器设计方法. 该方法的优势在于, 在一定的参数摄动和执行器时滞范围内, 能够保证闭环系统鲁棒稳定; 同时, 保成本指标保证了车辆悬架设计指标的性能要求, 而 H_∞ 指标则使得保成本指标在噪声影响下达到最优. 本文还分析了执行器时滞和系统参数摄动对系统能量平衡的影响, 给出了相应的能量平衡条件, 并通过仿真验证了平衡条件的正确性.

参考文献(References):

- [1] RAJESH R. *Vehicle Dynamics and Control*[M]. New York: Springer, 2006: 357 – 386.
- [2] KARNOPP D. Active and semi-active vibration isolation [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1995, 117(8): 177 – 185.
- [3] 徐顺香, 翟伟廉. 汽车悬架最优控制的研究及结果分析 [J]. 武汉理工大学学报, 2003, 25(6): 60 – 62.
(XU Shunxiang, ZHAI Weilian. Study and result analysis of optimal control for automotive suspension [J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2003, 25(6): 60 – 62.)
- [4] HROVAT D, UISOY A G, TSENG T. Stability robustness of LQ and LQG active suspensions [J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1994, 116(1): 123 – 131.
- [5] 宋鹏云, 张克跃, 张继业. 能量回馈式主动悬挂的鲁棒控制器设计 [J]. 西南交通大学学报, 2011, 46(4): 572 – 578.
(SONG Pengyun, ZHANG Keyue, ZHANG Jiye. Robust controller of self-powered active suspension [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2011, 46(4): 572 – 578.)

- [6] 张志勇, 文桂林, 钟志华. 车辆主动悬架的混合 H_2/H_∞ 最优保性能控制 [J]. 汽车工程, 2007, 29(7): 606 – 610.
(ZHANG Zhiyong, WEN Guilin, ZHONG Zhihua. Mixed H_2/H_∞ optimal performance control for vehicle active suspension [J]. *Automotive Engineering*, 2007, 29(7): 606 – 610.)
- [7] 陈虹, 马苗苗, 孙鹏远. 主动悬架 H_2 /广义 H_2 输出反馈控制 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 790 – 794.
(CHEN Hong, MA Miaomiao, SUN Pengyuan. H_2 /generalized H_2 output feedback control for active suspension [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 790 – 794.)
- [8] GU K, NICULESCU S. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2003, 125(2): 158 – 165.
- [9] ZHANG B L, FAN M Q. Optimal control of vehicle active suspension systems with actuator delay [C] // *IEEE International Conference on Control and Automation*. Guangzhou China: IEEE, 2007: 2257 – 2261.
- [10] DU H P, ZHANG N. H_∞ control of active vehicle suspensions with actuator time delay [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 301(1): 236 – 252.
- [11] 梁青, 陈文源, 彭程, 等. 具有时延的参数不确定主动悬架广义 H_2/H_∞ 控制 [J]. 信息与控制, 2010, 39(3): 284 – 290.
(LIANG Qing, CHEN Wenyuan, PENG Cheng, et al. Generalized H_2/H_∞ control for active suspensions with time-delay and parameter uncertainty [J]. *Information and Control*, 2010, 39(3): 284 – 290.)
- [12] 喻凡, 曹民, 郑雪春. 能量回馈式车辆主动悬挂的可行性研究 [J]. 振动与冲击, 2005, 24(4): 27 – 30.
(YU Fan, CAO Min, ZHENG Xuechun. Research on the feasibility of vehicle active suspension with energy regeneration [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2005, 24(4): 27 – 30.)
- [13] 张勇超, 喻凡, 顾永辉. 汽车电动悬架的减振与馈能特性试验验证 [J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(6): 874 – 877.
(ZHANG Yongchao, YU Fan, GU Yonghui. Isolation and energy-regenerative performance experimental verification of automotive electrical suspension [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2008, 42(6): 874 – 877.)
- [14] 欧阳冬, 张克跃, 张继业. 车辆能量回馈式主动悬挂系统研究 [J]. 振动与冲击, 2008, 27(8): 88 – 92.
(OUYANG Dong, ZHANG Keyue, ZHANG Jiye. Research on self-powered vehicle active suspension [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(8): 88 – 92.)
- [15] 苏宏业. 不确定时滞系统的鲁棒控制理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2007: 76 – 101.
(SU Hongye. *Robust Control Theory for Uncertain Time-Delay System* [M]. Beijing: Science Press, 2007: 76 – 101.)
- [16] 孙涛, 喻凡, 沈晓鸣. 基于频率整形的 H_∞ 主动悬架控制研究 [J]. 振动与冲击, 2006, 25(1): 146 – 149.
(SUN Tao, YU Fan, SHEN Xiaoming. Study on active suspension control based on H_∞ frequency-shaping synthesis [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(1): 146 – 149.)

作者简介:

王 鹏 (1984–), 男, 博士研究生, 研究方向为复杂系统的稳定性分析及控制, E-mail: ertongtuanyuan@163.com;

宋鹏云 (1985–), 男, 博士研究生, 研究方向为馈能式系统的稳定性分析及鲁棒控制, E-mail: songpy23@gmail.com;

张继业 (1965–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为动力系统的稳定性分析及控制, E-mail: jy Zhang@swjtu.edu.cn;

张克跃 (1962–), 男, 教授, 博士, 研究方向为复杂系统的稳定性分析, E-mail: zhangkeyue@163.com.