

基于标度小增益定理的离散时滞模糊系统可靠 H_∞ 控制

王申全, 冯 健[†], 姜玉莲

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 本文利用输入-输出方法, 研究了带有时变时滞和执行器故障的离散T-S模糊系统可靠 H_∞ 控制问题, 并使用一种更切合实际的离散齐次马尔可夫链来表示执行器故障的随机行为. 首先, 利用一类新的模型变换方法, 将离散时滞T-S模糊系统转换为互联的两个子系统. 然后, 利用标度小增益定理分析互联子系统的随机稳定性. 通过构造参数依赖的Lyapunov函数, 给出闭环系统输入-输出均方稳定且满足 H_∞ 性能的充分条件及可靠 H_∞ 控制器的设计方法. 最后, 给出两个数值例子验证所提方法的有效性.

关键词: T-S模糊系统; 可靠控制; 输入-输出方法; 标度小增益定理; 时变时滞

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Reliable H_∞ control for discrete-time delayed fuzzy systems via scaled small gain theorem

WANG Shen-quan, FENG Jian[†], JIANG Yu-lian

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: The reliable H_∞ control is investigated for discrete-time T-S (Takagi-Sugeno) fuzzy systems with time-varying delay and actuator faults based on input-output approach. A realistic discrete-time homogeneous Markov chain is used to represent the stochastic behavior of actuator faults. First, the discrete-time delayed T-S fuzzy system is transformed to the form of interconnected two subsystems by a new model transformation. Furthermore, the scaled small gain theorem is employed to analyze the stochastic stability of interconnected subsystems. By constructing a parameter-dependent Lyapunov function, we established sufficient conditions for achieving input-output mean-square stability with H_∞ performances. Meanwhile, the reliable H_∞ fuzzy controller design method is also presented. Two numerical examples are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words: T-S fuzzy system; reliable control; input-output approach; scaled small gain theorem; time-varying delay

1 引言(Introduction)

在过去的十几年, 针对Takagi-Sugeno (T-S)模糊系统的研究受到了学者们的广泛关注. 这是因为T-S模糊模型在任意的紧集范围内能够逼近任意光滑非线性系统. 其基本思想是: 将输入空间划分为模糊子空间, 并在每个子空间建立线性系统模型, 通过模糊隶属函数实现局部模型的光滑连接以构成非线性系统的模糊模型^[1-2]. 另一方面, 由于时滞现象在许多控制系统中普遍存在, 例如化工、核反应堆和生物系统. 因此, 时滞系统是许多学者多年来一直研究的热点. 比如稳定性分析^[3-10], 滤波器设计^[11], 可靠控制器设计^[12-16].

需要特别指出的是, 由于现代科学技术对性能、安全性和可靠性标准的更高要求, 时滞的存在会给控制系统的可靠性及安全性设计带来新的挑战, 因此针对

时滞系统可靠控制的研究取得了一定的进展. 例如, 文献[13-14]针对具有无穷分布式时滞的离散系统, 研究了可靠控制问题. 文献[12, 15]针对一类具有时滞的网络控制系统, 利用输入时滞方法, 设计了可靠控制器. 近年来, 针对以上方面的研究已取得了一些重要的成果, 但其研究还存在一定的问题.

一方面, 现有的研究大多是用开关矩阵的形式表示执行器故障的行为^[12-13]. 也就是, 定义一个对角阵 $L = \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ 表示故障的程度, 其中: $l_q \in [0, 1]$, $q = 1, 2, \dots, m$. 然而, 执行器故障的行为往往具有随机特性, 所以上面的执行器故障形式往往不能包含一些实际情况. 如何选择一种更切合实际的随机过程来表示执行器故障引起了学者们的广泛关注. 如文献[14-15]分别用离散马尔可夫过程和一个满足特定概率密度函数的随机变量来表示执行器故障的

收稿日期: 2013-05-10; 录用日期: 2013-11-15.

[†]通信作者. E-mail: fjneu@163.com; Tel.: +86 24-83671498.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273164, 61034005); 国家高技术研究发展计划资助项目(2012AA040104); 中央高校基本科研业务费资助项目(N120504002); 辽宁省自然科学基金资助项目(2013020042).

随机特性.

另一方面,在时变时滞处理方面,如何提出一种有效方法来降低稳定性条件的保守性一直是众多学者研究的热点.如自由权矩阵方法^[5]、时滞分解方法^[7]、奇异矩阵方法^[8]、Jensen不等式方法^[3-4,6]等.近几年来,输入-输出方法被证明是降低稳定性条件保守性和提高性能的有效方法^[9].其基本思想:首先,利用二项近似将原系统转化成互联的两个子系统(常值时滞的前馈子系统和不确定时滞的反馈系统).然后,利用标度小增益(scaled small gain, SSG)定理获得保证系统稳定性的充分条件.最近几年,一些文献对输入-输出方法进行了一些初始的研究.如稳定性分析^[8-10]、滤波器设计^[11].然而,针对T-S模糊系统并考虑执行器故障具有随机特性的文献还不多见,特别是利用输入-输出方法研究容错控制的文献更是未见报道.

基于以上分析,本文针对一类带有时变时滞和执行器故障的离散T-S模糊系统,利用输入-输出方法,研究了可靠模糊H_∞控制问题.首先,利用二项模型近似方法,将带有执行器故障的离散时滞模糊系统转换为互联的子系统.其次,利用输入-输出方法分析互联子系统的随机稳定性.通过构造参数依赖的Lyapunov函数,给出了闭环系统输入-输出均方稳定的充分条件.然后,基于该条件,设计了可靠H_∞控制器.最后,仿真结果验证了所提方法的有效性.

标注 在本文中, $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m \times n}$ 表示 n 维欧几里德空间和 $m \times n$ 的实矩阵; $\mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_2$ 表示映射算子 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 串联; 符号 T 表示对一个矩阵进行转置; $*$ 表示矩阵中的对称项; $P > 0 (\geq 0)$ 表示矩阵 P 是一个正定(半正定)矩阵; col 表示列向量; $\text{diag}\{\dots\}$ 表示一个对角阵; $E\{\cdot\}$ 表示数学期望; $l_2[0, \infty)$ 为平方可积序列空间.

2 预备知识(Preliminaries)

2.1 问题描述(Problem formulation)

考虑如下离散时滞T-S模糊系统:

被控对象规则 i :

IF $\theta_1(k)$ is η_{i1} and $\theta_2(k)$ is η_{i2} and $\dots$ and $\theta_p(k)$ is η_{ip} , THEN

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ A_i x(k) + A_{\tau i} x(k - \tau(k)) + B_{1i} w(k) + \\ D_{1i} u(k), \\ z(k) = C_i x(k) + B_{2i} w(k) + D_{2i} u(k), \\ x(k) = \phi(k), k = -\tau_2, -\tau_2 + 1, \dots, 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i \in \mathcal{Q} = \{1, 2, \dots, r\}$, r 为模糊规则个数; η_{ij} ($j = 1, 2, \dots, p$) 为模糊集合; $\theta_j(k)$ 为模糊前提变量; $\theta(k) = (\theta_1(k), \theta_2(k), \dots, \theta_p(k))^T$ 是 $x(k)$ 的函数; $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入变量; $w(k) \in \mathbb{R}^q$ 为外部干扰且属于 $l_2[0, +\infty)$; $z(k) \in \mathbb{R}^s$ 为调节

输出; $\phi(k)$ 为系统的初始状态; $\tau(k)$ 为时变时滞且满足 $1 \leq \tau_1 \leq \tau(k) \leq \tau_2$; $A_i, A_{\tau i}, B_{1i}, D_{1i}, C_i, B_{2i}$ 和 D_{2i} 是适当维数的常值矩阵.

为方便描述,记

$$\begin{aligned} A(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) A_i, \quad A_{\tau}(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) A_{\tau i}, \\ B_1(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) B_{1i}, \quad D_1(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) D_{1i}, \\ C(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) C_i, \quad B_2(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) B_{2i}, \\ D_2(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) D_{2i}, \end{aligned}$$

其中: $h_i(\theta(k))$ 表示模糊隶属度函数且满足

$$h_i(\theta(k)) = \omega_i(\theta(k)) / \sum_{i=1}^r \omega_i(\theta(k)), \quad \omega_i(\theta(k)) = \prod_{j=1}^p \eta_{ij}(\theta_j(k)).$$

这里 $\eta_{ij}(\theta_j(k))$ 是 $\theta_j(k)$ 属于模糊集合 η_{ij} 中的隶属度并具有如下性质: $\omega_i(\theta(k)) \geq 0, \sum_{i=1}^r \omega_i(\theta(k)) > 0$. 可以看到 $h_i(\theta(k)) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ 且 $\sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) = 1$.

应用加权平均解模糊方法,离散时滞T-S模糊系统(1)可写为

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ A(k)x(k) + A_{\tau}(k)x(k - \tau(k)) + \\ B_1(k)w(k) + D_1(k)u(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + B_2(k)w(k) + D_2(k)u(k). \end{cases} \quad (2)$$

当执行器发生故障时,用 $u^F(k)$ 表示从执行器发送的控制信号.考虑如下形式的执行器故障模型:

$$u^F(k) = \alpha_{r(k)} u(k), \quad (3)$$

其中 $\alpha_{r(k)} = \text{diag}\{\alpha_{1r(k)}, \alpha_{2r(k)}, \dots, \alpha_{mr(k)}\}$, 且 $0 \leq \underline{\alpha}_{ir(k)} \leq \alpha_{ir(k)} \leq \bar{\alpha}_{ir(k)} \leq 1, i = 1, 2, \dots, m$. 参数 $r(k)$ 为有限集合 $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, l\}$ 中取值的离散马尔可夫过程,且其传输概率矩阵由下式确定:

$$P\{r(k+1) = \nu | r(k) = \varpi\} = \pi_{\varpi\nu}, \quad (4)$$

其中: $0 \leq \pi_{\varpi\nu} \leq 1, \forall \varpi, \nu \in \mathcal{L}$ 及 $\sum_{\nu=1}^l \pi_{\varpi\nu} = 1$.

在式(4)中, $\underline{\alpha}_{i\varpi}$ 和 $\bar{\alpha}_{i\varpi}$ 表示第 i 个执行器在第 ϖ 个故障模态下所允许的故障.当 $\underline{\alpha}_{i\varpi} = \bar{\alpha}_{i\varpi} = 0$ 时,故障模型(4)表示第 i 个执行器在第 ϖ 个故障模态下完全失效.当 $0 < \underline{\alpha}_{i\varpi} < \bar{\alpha}_{i\varpi} < 1$ 时,表示第 i 个执行器在第 ϖ 个故障模态下部分失效.当 $\underline{\alpha}_{i\varpi} = \bar{\alpha}_{i\varpi} = 1$ 时,表示第 i 个执行器在第 ϖ 个故障模态下没有故障发生.接下来,定义

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_\varpi = \\ \text{diag}\{\frac{\alpha_{1\varpi} + \bar{\alpha}_{1\varpi}}{2}, \frac{\alpha_{2\varpi} + \bar{\alpha}_{2\varpi}}{2}, \dots, \frac{\alpha_{m\varpi} + \bar{\alpha}_{m\varpi}}{2}\}, \\ \check{\alpha}_\varpi = \\ \text{diag}\{\frac{\bar{\alpha}_{1\varpi} - \alpha_{1\varpi}}{2}, \frac{\bar{\alpha}_{2\varpi} - \alpha_{2\varpi}}{2}, \dots, \frac{\bar{\alpha}_{m\varpi} - \alpha_{m\varpi}}{2}\}. \end{cases} \quad (5)$$

由上式, 可以将 α_ϖ 写成下面的形式:

$$\alpha_\varpi = \hat{\alpha}_\varpi + \Delta_\varpi = \hat{\alpha}_\varpi + \text{diag}\{\delta_{1\varpi}, \delta_{2\varpi}, \dots, \delta_{m\varpi}\}, \quad (6)$$

其中 $|\delta_{i\varpi}| \leq \frac{\bar{\alpha}_{i\varpi} - \alpha_{i\varpi}}{2}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

注 1 文中选择了一种更切合于实际的离散的齐次马尔可夫链来表示执行器故障的随机行为. 在每个时间步长下, 故障模式必须是已知的. $r(k) = \varpi$ 表示 l 个故障模式中的第 ϖ 个故障模式. 当 $l = 1$ 时(执行器故障模式为1), 本文所考虑的故障模型就可以退化为文献[12–13]中的故障模型. 因此, 文献[12–13]中的故障模型只作为本文所考虑模型的一种特殊情况.

根据并行分布式补偿(PDC)方法设计局部模糊控制器, 其规则为

控制器规则 i :

IF $\theta_1(k)$ is η_{i1} and $\theta_2(k)$ is η_{i2} and $\dots$ and $\theta_p(k)$ is η_{ip} , THEN

$$u(k) = -K_{r(k)i}x(k), \quad (7)$$

其中: $K_{r(k)i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为状态反馈增益矩阵, $u(k)$ 为模糊控制器的输出, 则合成的模糊控制器为

$$u(k) = -K_{r(k)}(k)x(k), \quad (8)$$

其中 $K_{r(k)}(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k))K_{r(k)i}$.

将系统(1)中的 $u(k)$ 用 $u^F(k)$ 代替, 同时考虑式(3)和式(8), 闭环系统的状态方程可以写为

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x(k+1) = \\ \tilde{A}(k)x(k) + A_\tau(k)x(k-\tau(k)) + \\ B_1(k)w(k), \\ z(k) = \tilde{C}(k)x(k) + B_2(k)w(k), \end{cases} \quad (9)$$

其中: $\tilde{A}(k) = A(k) - D_1(k)\alpha_{r(k)}K_{r(k)}(k)$, $\tilde{C}(k) = C(k) - D_2(k)\alpha_{r(k)}K_{r(k)}(k)$.

2.2 输入–输出方法(Input–output approach)

考虑如下形式的互联子系统:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1: y(k) = \mathcal{G}v(k), \\ \mathcal{S}_2: v(k) = \mathcal{T}y(k), \end{cases} \quad (10)$$

其中: 前馈 $\mathcal{S}_1$ 是已知的线性时不变系统且具有从 $v(k)$ 映射到 $y(k)$ 的算子 $\mathcal{G}$, 反馈 $\mathcal{S}_2$ 是未知的线性时变系统且其算子满足 $\mathcal{T} \in \mathcal{D} \triangleq \{\mathcal{T}: \|\mathcal{T}\|_\infty \leq 1\}$. 作

为标度小增益定理的直接结果, 将介绍以下引理和定义, 推导出互联子系统(10)的随机稳定性条件.

引理 1(随机标度小增益定理) 假设互联子系统(10)中的 $\mathcal{S}_1$ 是内稳定, 针对所有的 $\mathcal{T} \in \mathcal{D}$, 若存在非奇异矩阵 U , 满足 $\|U \circ \mathcal{G} \circ U^{-1}\|_\infty \times \|U^{-1} \circ \mathcal{T} \circ U\|_\infty < 1$, 则闭环互联子系统(10)是输入–输出均方稳定的.

定义 1 对于系统(9), 在任意初始条件 $\phi(k)$ 下, 当 $w(k) = 0$ 时, 若满足

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)x(k) \mid \phi(0)\right\} < \infty, \quad (11)$$

则系统是随机稳定的.

定义 2 若存在 $\gamma > 0$, 满足

$$\|y(k)\|_{E2} = \|\mathcal{G}v(k)\|_{E2} \leq \gamma \|v(k)\|_{E2}, \quad (12)$$

则 $v(k)$ 到 $y(k)$ 的算子 $\mathcal{G}$ 是输入–输出均方稳定的.

3 主要结论(Main results)

本节, 首先介绍一类新的模型变换, 将系统(9)转化为具有两个互联子系统(10)的形式. 然后通过标度小增益定理, 分析系统 $\mathcal{S}$ 的输入–输出均方稳定性. 最后设计状态反馈可靠 H_∞ 控制器.

在系统(9)中, $\tau(k)$ 为系统的时变时滞, 可以看作系统的不确定. 模型变换的主要目标是将所有不确定性从原系统中提取出来, 转化为具有两个互联子系统(10)的形式, 其中 $\mathcal{S}_1$ 是线性时不变系统, $\mathcal{T}$ 包含所有不确定性.

为了将不确定 $\tau(k)$ 从原系统中提取出来, 将 $x(k - \tau(k))$ 改写为

$$x(k - \tau(k)) = \frac{1}{2}(x(k - \tau_1) + x(k - \tau_2)) + \frac{\tau_{12}}{2}v(k), \quad (13)$$

其中: $(1/2)(x(k - \tau_1) + x(k - \tau_2))$ 为 $x(k - \tau(k))$ 的近似, $(\tau_{12}/2)v(k)$ 为模型近似误差, $\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1$. 根据式(13), 系统(9)可写为

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \tilde{A}(k)x(k) + \frac{1}{2}A_\tau(k)[x(k - \tau_1) + x(k - \tau_2)] + \\ & \frac{\tau_{12}}{2}A_\tau(k)v(k) + B_1(k)w(k). \end{aligned} \quad (14)$$

定义 $y_v(k) = x(k+1) - x(k)$, 由式(13)可以得到

$$\begin{aligned} v(k) = & \frac{2}{\tau_{12}}\{x(k - \tau(k)) - \\ & \frac{1}{2}(x(k - \tau_1) + x(k - \tau_2))\} = \\ & \frac{1}{\tau_{12}}\left[\sum_{i=k-\tau_2}^{k-\tau(k)-1} y_v(i) - \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-\tau_1-1} y_v(i)\right] \triangleq \\ & \frac{1}{\tau_{12}}\left[\sum_{i=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \varphi(i)y_v(i)\right], \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\varphi(i) \triangleq \begin{cases} 1, & i \leq k - \tau(k) - 1, \\ -1, & i > k - \tau(k) - 1, \end{cases}$$

进而从 $y_v(k)$ 到 $v(k)$ 的映射算子 $\mathcal{T}_v$ 可表示为

$$\mathcal{T}_v : y_v(k) \rightarrow v(k) = \frac{1}{\tau_{12}} \left[\sum_{i=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \varphi(i) y_v(i) \right]. \quad (16)$$

引理2 算子 $\mathcal{T}_v : y_v(k) \rightarrow v(k)$ 满足 $\|\mathcal{T}_v\|_\infty \leq 1$.

证 利用Jensen不等式,同时考虑式(16)中的算子 $\mathcal{T}_v$,在零初始条件下,可获得

$$\begin{aligned} \|v(k)\|_2^2 &= \frac{1}{\tau_{12}^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{i=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \varphi(i) y_v^T(i) \right] \left[\sum_{i=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \varphi(i) y_v(i) \right] \leq \\ &= \frac{1}{\tau_{12}^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left[(\tau_2 - \tau_1) \sum_{i=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \varphi^2(i) y_v^T(i) y_v(i) \right] = \\ &= \frac{1}{\tau_{12}} \sum_{j=-\tau_2}^{-\tau_1-1} \sum_{i=0}^{\infty} y_v^T(i+j) y_v(i+j) \leq \\ &= \frac{1}{\tau_{12}} \sum_{j=-\tau_2}^{-\tau_1-1} \sum_{i=0}^{\infty} y_v^T(i) y_v(i) = \|y_v(k)\|_2^2. \end{aligned} \quad (17)$$

根据式(17),可得到 $\|\mathcal{T}_v\|_\infty \leq 1$. 证毕.

定义 $\tilde{w}(k) = \gamma w(k)$. 根据上面的讨论,系统(9)可以变为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 : \begin{pmatrix} x(k+1) \\ y_v(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \Psi_1 & \frac{\tau_{12}}{2} A_\tau(k) & \gamma^{-1} B_1(k) \\ \Psi_2 & \frac{\tau_{12}}{2} A_\tau(k) & \gamma^{-1} B_1(k) \\ \Psi_3 & 0 & \gamma^{-1} B_2(k) \end{pmatrix} \times \\ \underbrace{\begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-\tau_1) \\ x(k-\tau_2) \\ v(k) \\ \tilde{w}(k) \end{pmatrix}}_{\mathcal{G}} \\ \mathcal{S}_2 : v(k) = \mathcal{T}_v y_v(k), \end{cases} \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= [\tilde{A}(k) \quad \frac{1}{2} A_\tau(k) \quad \frac{1}{2} A_\tau(k)], \\ \Psi_2 &= [\tilde{A}(k) - I \quad \frac{1}{2} A_\tau(k) \quad \frac{1}{2} A_\tau(k)], \\ \Psi_3 &= [\tilde{C}(k) \quad 0 \quad 0]. \end{aligned}$$

引理3 假设 $\mathcal{S}_1$ 在式(18)下是内稳定的,对算子 $\mathcal{T}_v$,如果存在非奇异矩阵 $U = \text{diag}\{\bar{N}, I\} > 0$ 满足

$$\|U \circ \mathcal{G} \circ U^{-1}\|_\infty < 1, \quad (19)$$

则闭环互联系统(18)是输入-输出稳定的,且具有 H_∞ 性能 γ .

注2 在互联系统(18)中,引理3中的充分条件可转化为下面的条件.假设 $\mathcal{S}_1$ 在式(18)是内稳定的,若存在矩阵 $N = \bar{N}^T \bar{N}$,满足

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{\infty} (y_v^T(k) N y_v(k) - v^T(k) N v(k) + \\ &\quad z^T(k) z(k) - \tilde{w}^T(k) \tilde{w}(k)) < 0, \end{aligned} \quad (20)$$

则闭环互联系统是输入-输出均方稳定,且保证 H_∞ 性能 γ .

定理1 给定 $\gamma > 0$ 和正整数 τ_1, τ_2 ,假若存在矩阵 $P_{\varpi i} > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, Z_1 > 0, Z_2 > 0$ 和 $N > 0$,使得对任意的 $\varpi \in \mathcal{L}, \iota \in \mathcal{Q}$,满足下面的条件:

$$\Theta_{iil}^{\varpi} < 0, \quad i \in \mathcal{Q}, \quad (21)$$

$$\Theta_{ijl}^{\varpi} + \Theta_{jil}^{\varpi} < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r, \quad (22)$$

则系统(18)是输入-输出均方稳定的,其中:

$$\Theta_{ijl}^{\varpi} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & * \\ \Gamma_2 & -\text{diag}\{\hat{P}_{\varpi l}^{-1}, Z_1^{-1}, Z_2^{-1}, N^{-1}, I\} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & (Z_1, Z_2, 0, 0) \\ * & -\text{diag}\{Q_1 + Z_1, Q_2 + Z_2, N, \gamma^2 I\} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{21} & \frac{1}{2} A_{\tau i} & \frac{1}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_{12}}{2} A_{\tau i} & B_{1i} \\ \tau_1 [\tilde{\Gamma}_{21} - I] & \frac{\tau_1}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_1}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_1 \tau_{12}}{2} A_{\tau i} & \tau_1 B_{1i} \\ \tau_2 [\tilde{\Gamma}_{21} - I] & \frac{\tau_2}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_2}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_2 \tau_{12}}{2} A_{\tau i} & \tau_2 B_{1i} \\ \tilde{\Gamma}_{21} - I & \frac{1}{2} A_{\tau i} & \frac{1}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_{12}}{2} A_{\tau i} & B_{1i} \\ \tilde{\Gamma}_{25} & 0 & 0 & 0 & B_{2i} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{11} = -P_{\varpi i} + Q_1 + Q_2 - Z_1 - Z_2,$$

$$\tilde{\Gamma}_{21} = A_i - D_{1i} \alpha_\varpi K_{\varpi j},$$

$$\tilde{\Gamma}_{25} = C_i - D_{2i} \alpha_\varpi K_{\varpi j},$$

$$\hat{P}_{\varpi l} = \sum_{\nu=1}^l \pi_{\varpi \nu} P_{\nu l}.$$

证 选择如下Lyapunov函数:

$$V(k) =$$

$$x^T(k) P_{r(k)}(k) x(k) + \sum_{l=1}^2 \sum_{i=k-\tau_l}^{k-1} x^T(i) Q_l x(i) +$$

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{i=-\tau_l}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \tau_l y_v^T(j) Z_l y_v(j), \quad (23)$$

其中 $P_{r(k)}(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) P_{r(k)i}$. 定义 $E[\Delta V(k)] = E[V(x(k+1), k+1, r(k+1)|x(k), r(k) = \varpi) - V(x(k), k, \varpi)]$. 则沿系统(18)的轨线,对任意的 $\varpi \in \mathcal{L}$,

$$E[\Delta V(k)] =$$

$$x^T(k+1) \hat{P}_\varpi(k+1) x(k+1) -$$

$$x^T(k) P_\varpi(k) x(k) + x^T(k) (Q_1 + Q_2) x(k) -$$

$$x^T(k - \tau_1) Q_1 x(k - \tau_1) -$$

$$x^T(k - \tau_2) Q_2 x(k - \tau_2) -$$

$$\sum_{i=k-\tau_1}^{k-1} \tau_1 y_v^T(i) Z_1 y_v(i) - \sum_{i=k-\tau_2}^{k-1} \tau_2 y_v^T(i) Z_2 y_v(i) + y_v^T(k) (\tau_1^2 Z_1 + \tau_2^2 Z_2) y_v(k), \quad (24)$$

其中 $\hat{P}_\omega(k+1) = \sum_{\nu=1}^l \pi_{\omega\nu} P_\nu(k+1)$.

利用Jensen不等式, 可得到

$$- \sum_{i=k-\tau_1}^{k-1} \tau_1 y_v^T(i) Z_1 y_v(i) \leq \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-\tau_1) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -Z_1 & Z_1 \\ * & -Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-\tau_1) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$- \sum_{i=k-\tau_2}^{k-1} \tau_2 y_v^T(i) Z_2 y_v(i) \leq \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-\tau_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -Z_2 & Z_2 \\ * & -Z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-\tau_2) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

同时, 考虑性能指标函数(20), 在零初始条件下, 由式(23)–(26), 可以获得

$$J_{zy} \leq E \left[\sum_{k=0}^{\infty} (z^T(k) z(k) - \gamma^2 w^T(k) w(k) + y_v^T(k) N y_v(k) - v^T(k) N v(k) + \Delta V(k)) \right] \leq \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^T(k) \Delta(k) \zeta(k), \quad (27)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \Gamma_1 + A_1^T \hat{P}_\omega(k+1) A_1 + A_2^T (\tau_1^2 Z_1 + \tau_2^2 Z_2 + N) A_2 + A_3^T A_3, \\ A_1 &= (\tilde{A}(k), \frac{1}{2} A_\tau(k), \frac{1}{2} A_\tau(k), \frac{\tau_{12}}{2} A_\tau(k), B_1(k)), \\ A_2 &= A_1 - (I_n \ 0_{n \times (3n+q)}), \\ A_3 &= (\tilde{C}(k), 0, 0, 0, B_2(k)), \\ \zeta(k) &= \text{col}\{x(k), x(k-\tau_1), x(k-\tau_2), v(k), w(k)\}. \end{aligned}$$

利用Schur补引理, 可以得到

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(k+1) \left[\sum_{i=1}^r h_i^2(\theta(k)) \Theta_{iil}^\omega + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i(\theta(k)) h_j(\theta(k)) (\Theta_{ijl}^\omega + \Theta_{jil}^\omega) \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

因此, 对于任意 $w(k) \in l_2[0, \infty)$, 得到 $J_{zy} < 0$. 根据引理3, 系统(18)是输入–输出稳定的. 证毕.

当不考虑执行器故障, 即对于任意 $r(k) \in \mathcal{L}$, $\alpha_{r(k)} \equiv I$ 时, 系统(18)可以退化为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1: \begin{pmatrix} x(k+1) \\ y_v(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 & \frac{\tau_{12}}{2} A_\tau(k) & B_1(k) \\ \Upsilon_2 & \frac{\tau_{12}}{2} A_\tau(k) & B_1(k) \\ \Upsilon_3 & 0 & B_2(k) \end{pmatrix} \zeta(k), \\ \mathcal{S}_2: v(k) = \mathcal{T}_v y_v(k), \end{cases} \quad (29)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= [\bar{A}(k) \quad \frac{1}{2} A_\tau(k) \quad \frac{1}{2} A_\tau(k)], \\ \Upsilon_2 &= [\bar{A}(k) - I \quad \frac{1}{2} A_\tau(k) \quad \frac{1}{2} A_\tau(k)], \\ \Upsilon_3 &= [C(k) - D_2(k) K(k) \quad 0 \quad 0], \\ \bar{A}(k) &= A(k) - D_1(k) K(k), \\ K(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) K_i. \end{aligned}$$

选择如下的Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V(k) &= x^T(k) P(k) x(k) + \sum_{l=1}^2 \sum_{i=k-\tau_l}^{k-1} x^T(i) Q_l x(i) + \\ &\quad \sum_{l=1}^2 \sum_{i=-\tau_l}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \tau_l y_v^T(j) Z_l y_v(j). \quad (30) \end{aligned}$$

可以得到下面的推论.

推论1 给定 $\gamma > 0$ 和正整数 τ_1, τ_2 , 假若存在矩阵 $P_i > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$, $Z_1 > 0$, $Z_2 > 0$ 和 $N > 0$, 对任意的 $l \in \mathcal{Q}$, 满足下面的条件:

$$\Pi_{iil} < 0, \quad i \in \mathcal{Q}, \quad (31)$$

$$\Pi_{ijl} + \Pi_{jil} < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r, \quad (32)$$

则系统(29)是输入–输出均方稳定的, 其中:

$$\begin{aligned} \Pi_{ijl} &= \begin{pmatrix} \Omega_1 & * \\ \Omega_2 & -\text{diag}\{P_l^{-1}, Z_1^{-1}, Z_2^{-1}, N^{-1}, I\} \end{pmatrix}, \\ \Omega_1 &= \begin{pmatrix} \Omega_{11} & (Z_1, Z_2, 0, 0) \\ * & -\text{diag}\{Q_1 + Z_1, Q_2 + Z_2, N, \gamma^2 I\} \end{pmatrix}, \\ \Omega_2 &= \begin{pmatrix} A_i - D_{1i} K_j & \frac{1}{2} A_{\tau i} & \frac{1}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_{12}}{2} A_{\tau i} & B_{1i} \\ \tau_1 \tilde{\Omega}_2 & \frac{\tau_1}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_1}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_1 \tau_{12}}{2} A_{\tau i} & \tau_1 B_{1i} \\ \tau_2 \tilde{\Omega}_2 & \frac{\tau_2}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_2}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_2 \tau_{12}}{2} A_{\tau i} & \tau_2 B_{1i} \\ \tilde{\Omega}_2 & \frac{1}{2} A_{\tau i} & \frac{1}{2} A_{\tau i} & \frac{\tau_{12}}{2} A_{\tau i} & B_{1i} \\ C_i - D_{2i} K_j & 0 & 0 & 0 & B_{2i} \end{pmatrix}, \\ \Omega_{11} &= -P_i + Q_1 + Q_2 - Z_1 - Z_2, \\ \tilde{\Omega}_2 &= A_i - D_{1i} K_j - I. \end{aligned}$$

推论1可以很容易由定理1得到, 在此证明过程省略.

注3 为进一步降低文中结果的保守性, 可以利用文献[7]提出的时滞分解方法, 选择如下Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V(k) &= \sum_{i=1}^4 V_i(k), \quad (33) \\ V_1(k) &= x^T(k) \mathcal{P} x(k), \\ V_2(k) &= \sum_{i=k-d}^{k-1} \mathcal{R}^T(i) \mathcal{Q}_1 \mathcal{R}(i) + \sum_{i=k-\tau_2}^{k-1} x^T(i) \mathcal{Q}_2 x(i), \\ V_3(k) &= \sum_{j=-\tau_2}^{-dm} \sum_{i=k+j}^{k-1} x^T(i) \mathcal{Q}_3 x(i), \end{aligned}$$

$$V_4(k) = \sum_{j=-d}^{-1} \sum_{i=k+j}^{k-1} dy_v^T(i) \mathcal{Z}_1 y_v(i) + \sum_{j=-\tau_2}^{-dm-1} \sum_{i=k+j}^{k-1} (\tau_2 - dm) y_v^T(i) \mathcal{Z}_2 y_v(i),$$

其中:

$$\Upsilon(i) = [x^T(i) \ x^T(i-d) \ \cdots \ x^T(i-(m-1)d)]^T, \\ \tau_1 = dm.$$

接下来,考虑一类带有不确定性的T-S模糊时滞系统

$$x(k+1) = (\mathcal{A}(k) + \Delta\mathcal{A}(k))x(k) + (\mathcal{A}_\tau(k) + \Delta\mathcal{A}_\tau(k))x(k-\tau(k)), \quad (34)$$

其中

$$(\Delta\mathcal{A}(k) \ \Delta\mathcal{A}_\tau(k)) = \mathcal{M}(k)\Sigma(k)(\mathcal{N}(k) \ \mathcal{N}_\tau(k)), \quad (35)$$

$\Sigma(k)$ 为未知时变矩阵函数, 满足 $\Sigma^T(k)\Sigma(k) \leq 1$, $\mathcal{M}(k) \in \mathbb{R}^{n \times v}$, $\mathcal{N}(k), \mathcal{N}_\tau(k) \in \mathbb{R}^{v \times n}$ 为已知矩阵代表不确定性的结构. 基于前面的讨论, 采用Lyapunov函数(33), 获得如下推论.

推论 2 给定正整数 $d, m, \tau_2, \tau_1 = dm$, 若存在矩阵 $\mathcal{P} > 0$, $\mathcal{Q}_1 > 0$, $\mathcal{Q}_2 > 0$, $\mathcal{Q}_3 > 0$, $\mathcal{Z}_1 > 0$, $\mathcal{Z}_2 > 0$, $\mathcal{X}_1 > 0$, $\mathcal{X}_2 > 0$ 和自由权矩阵 $\mathcal{Y}$ 满足如下不等式条件:

$$\begin{pmatrix} F & \mathcal{Y} \\ * & -\mathcal{Z}_2 \end{pmatrix} < 0, \quad (36)$$

则系统(34)是渐近稳定的, 其中:

$$F = F_1^T \mathcal{P} F_1 + F_2^T \text{diag}\{\mathcal{Q}_1, -\mathcal{Q}_1\} F_2 + F_3^T (\mathcal{Q}_2 - \mathcal{P} + (\tau_2 - dm + 1)\mathcal{Q}_3) F_3 - F_4^T (\mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3) F_4 + F_5^T (d^2 \mathcal{Z}_1 + (\tau_2 - dm)^2 \mathcal{Z}_2 + \mathcal{X}_1) F_5 - F_6^T \mathcal{Q}_3 F_6 - F_7^T \mathcal{X}_1 F_7 - F_8^T \mathcal{Z}_1 F_8 + F_9^T \mathcal{X}_2 F_9 - F_{10}^T \mathcal{X}_2 F_{10} + (0_{((m+3)n+v) \times mn} \ \mathcal{Y} \ - \mathcal{Y} \ 0_{((m+3)n+v) \times (n+v)}) + (0_{((m+3)n+v) \times mn} \ \mathcal{Y} \ - \mathcal{Y} \ 0_{((m+3)n+v) \times (n+v)})^T, \\ F_1 = (\mathcal{A}(k) \ 0_{n \times (m-1)n} \ \frac{1}{2} \mathcal{A}_\tau(k) \ \frac{1}{2} \mathcal{A}_\tau(k) \ \frac{\tau_{12}}{2} \mathcal{A}_\tau(k) \ \mathcal{M}(k)), \\ F_2 = \begin{pmatrix} I_{mn} & 0_{mn \times (3n+v)} \\ 0_{mn \times n} & I_{mn} \ 0_{mn \times (2n+v)} \end{pmatrix}, \\ F_3 = (I_n \ 0_{n \times ((m+2)n+v)}), \\ F_4 = (0_{n \times (m+1)n} \ I_n \ 0_{n \times (n+v)}), \\ F_5 = F_1 - F_3, \\ F_6 = (0_{n \times mn} \ I_n \ 0_{n \times (2n+v)}), \\ F_7 = (0_{n \times (m+2)n} \ I_n \ 0_{n \times v}),$$

$$F_8 = (I_n \ -I_n \ 0_{n \times ((m+1)n+v)}),$$

$$F_9 = (\mathcal{N}(k) \ 0_{v \times (m-1)n} \ \frac{1}{2} \mathcal{N}_\tau(k) \ \frac{1}{2} \mathcal{N}_\tau(k) \ \frac{\tau_{12}}{2} \mathcal{N}_\tau(k) \ 0_{v \times v}),$$

$$F_{10} = (0_{(n \times (m+3)n)} \ I_v).$$

推论2可以参照定理1和文献[6]中命题1的证明过程, 在此省略.

在定理1中, 获得了系统(18)输入-输出均方稳定的充分条件. 接下来, 利用定理1, 以LMI的形式给出可靠 H_∞ 控制器表达式.

定理 2 给定 $\gamma > 0$ 和正整数 τ_1, τ_2 , 假若存在矩阵 $\bar{P}_{\varpi i} > 0$, $\bar{Q}_1 > 0$, $\bar{Q}_2 > 0$, $\bar{Z}_1 > 0$, $\bar{Z}_2 > 0$, $\bar{N} > 0$, $X, Y_{\varpi i}$ 和对角阵 $M_{\varpi} > 0$, 对任意的 $\varpi \in \mathcal{L}, \iota \in \mathcal{Q}$, 满足下面的条件:

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{\varpi i} & * & * \\ \Sigma_{21}^{\varpi ii} & \Sigma_{22}^{\varpi \iota} & * \\ \Sigma_{31}^{\varpi i} & \Sigma_{32}^{\varpi i} & \Sigma_{33}^{\varpi} \end{pmatrix} < 0, \quad i \in \mathcal{Q}, \quad (37)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{\varpi i} + \Sigma_{11}^{\varpi j} & * & * & * \\ \Sigma_{21}^{\varpi ij} + \Sigma_{21}^{\varpi ji} & 2\Sigma_{22}^{\varpi \iota} & * & * \\ \Sigma_{31}^{\varpi i} & \Sigma_{32}^{\varpi i} & \Sigma_{33}^{\varpi} & * \\ \Sigma_{31}^{\varpi j} & \Sigma_{32}^{\varpi j} & 0 & \Sigma_{33}^{\varpi} \end{pmatrix} < 0, \\ 1 \leq i < j \leq r, \end{cases} \quad (38)$$

则系统(18)是输入-输出均方稳定的, 其中:

$$\Sigma_{11}^{\varpi i} = \begin{pmatrix} \Xi & \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 & 0 & 0 \\ * - \bar{Q}_1 - \bar{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{Q}_2 - \bar{Z}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{N} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{pmatrix}, \\ \Sigma_{22}^{\varpi \iota} = \text{diag}\{\hat{\mathcal{P}}_{\varpi \iota} - X - X^T, \bar{Z}_1 - X - X^T, \bar{Z}_2 - X - X^T, \bar{N} - X - X^T, -I\},$$

$$\Sigma_{21}^{\varpi ij} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \frac{1}{2} A_{\tau i} X & \frac{1}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_{12}}{2} A_{\tau i} X & B_{1i} \\ \tau_1 \Phi_2 & \frac{\tau_1}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_1}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_1 \tau_{12}}{2} A_{\tau i} X & \tau_1 B_{1i} \\ \tau_2 \Phi_2 & \frac{\tau_2}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_2}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_2 \tau_{12}}{2} A_{\tau i} X & \tau_2 B_{1i} \\ \Phi_2 & \frac{1}{2} A_{\tau i} X & \frac{1}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_{12}}{2} A_{\tau i} X & B_{1i} \\ \Phi_3 & 0 & 0 & 0 & B_{2i} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{33}^{\varpi} = \text{diag}\{-M_{\varpi}, -M_{\varpi}\},$$

$$\Sigma_{31}^{\varpi i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{\varpi i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{32}^{\varpi i} = \begin{pmatrix} -\check{\alpha}_{\varpi} \\ 0 \end{pmatrix} M_{\varpi} [D_{1i}^T \ \tau_1 D_{1i}^T \ \tau_2 D_{1i}^T \ D_{1i}^T \ D_{2i}^T],$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{\varpi \iota} = \sum_{\nu=1}^l \pi_{\varpi \nu} \bar{P}_{\nu \iota},$$

$$\Xi = -\bar{P}_{\omega i} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 - \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2,$$

$$\Phi_1 = A_i X - D_{1i} \hat{\alpha}_{\omega} Y_{\omega j},$$

$$\Phi_2 = (A_i - I)X - D_{1i} \hat{\alpha}_{\omega} Y_{\omega j},$$

$$\Phi_3 = C_i X - D_{2i} \hat{\alpha}_{\omega} Y_{\omega j},$$

相应的可靠控制增益设计为 $K_{\omega i} = Y_{\omega i} X^{-1}$.

证 定义矩阵

$$H = \text{diag}\{X^T, X^T, X^T, X^T, I, I, I, I, I, I\},$$

令

$$\bar{P}_{\omega i} = X^T P_{\omega i} X, \bar{Q}_1 = X^T Q_1 X,$$

$$\bar{Q}_2 = X^T Q_2 X, \bar{Z}_1 = X^T Z_1 X,$$

$$\bar{Z}_2 = X^T Z_2 X, \bar{N} = X^T N X, Y_{\omega i} = K_{\omega i} X.$$

然后, 对式(21)分别左乘和右乘以 H 和 H^T , 则式(21)等价于

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_1 & * \\ \bar{I}_2 & -\text{diag}\{\hat{P}_{\omega i}^{-1}, Z_1^{-1}, Z_2^{-1}, N^{-1}, I\} \end{pmatrix} < 0, \quad (39)$$

其中:

$$\bar{I}_1 = \begin{pmatrix} \bar{I}_{11} & (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, 0, 0) \\ * & -\text{diag}\{\bar{Q}_1 + \bar{Z}_1, \bar{Q}_2 + \bar{Z}_2, \bar{N}, \gamma^2 I\} \end{pmatrix},$$

$$\bar{I}_2 =$$

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{21} & \frac{1}{2} A_{\tau i} X & \frac{1}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_{12}}{2} A_{\tau i} X & B_{1i} \\ \tau_1 \bar{I}_{22} & \frac{\tau_1}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_1}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_1 \tau_{12}}{2} A_{\tau i} X & \tau_1 B_{1i} \\ \tau_2 \bar{I}_{22} & \frac{\tau_2}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_2}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_2 \tau_{12}}{2} A_{\tau i} X & \tau_2 B_{1i} \\ \bar{I}_{22} & \frac{1}{2} A_{\tau i} X & \frac{1}{2} A_{\tau i} X & \frac{\tau_{12}}{2} A_{\tau i} X & B_{1i} \\ \bar{I}_{25} & 0 & 0 & 0 & B_{2i} \end{pmatrix},$$

$$\bar{I}_{11} = -\bar{P}_{\omega i} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 - \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2,$$

$$\bar{I}_{21} = A_i X - D_{1i} \alpha_{\omega} Y_{\omega j},$$

$$\bar{I}_{22} = A_i X - D_{1i} \alpha_{\omega} Y_{\omega j} - X,$$

$$\bar{I}_{25} = C_i X - D_{2i} \alpha_{\omega} Y_{\omega j}.$$

另一方面, 因 $\hat{P}_{\omega i} > 0$, 所以有以下不等式成立

$$(\hat{P}_{\omega i} - X)^T \hat{P}_{\omega i}^{-1} (\hat{P}_{\omega i} - X) \geq 0,$$

进而可得到

$$-X^T \hat{P}_{\omega i}^{-1} X \leq \hat{P}_{\omega i} - (X + X^T).$$

同时考虑式(6), 利用Schur补引理, 可以得到定理2.

证毕.

4 数值算例(Numerical examples)

本节给出两个例子来验证本文所提方法的有效性. 例1采用输入-输出方法和时滞分解技术验证了本文结果优于文献[10]. 例2阐述了本文可靠模糊 H_∞ 控制

设计方法的有效性.

例1 考虑不确定时滞系统(34), 其中系统参数给定如下^[10]:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, A_\tau = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{N} = [1 \ 0], \mathcal{N}_\tau = [0 \ 0],$$

$$\Sigma(k) = \beta(k)/\bar{\beta},$$

其中: $|\beta(k)| \leq \bar{\beta}$, 显然 $\Sigma^T(k)\Sigma(k) \leq 1$.

这个例子可以认为是系统(34)模糊规则 $r = 1$ 的特例. 对于所有的 $|\beta(k)| \leq \bar{\beta}$ 及给定的时滞间隔 $\tau_1 \leq \tau(k) \leq \tau_2$, 笔者期望获得最大上界 $\bar{\beta}$, 使系统(34)是鲁棒渐近稳定的. 当 $2 \leq \tau(k) \leq 7$, 利用文献[10]中的定理2(ii)和定理2(i), 可以获得最大上界 $\bar{\beta}$ 分别为 0.1938 和 0.2046. 然而, 采用本文推论2, 当 $m = 2$ 和 $m = 4$ 时, 可以获得最大上界 $\bar{\beta}$ 分别为 0.1947 和 0.4288. 在不同的时滞间隔下, 更多结果可以从表1得到. 从表1很明显看到本文结果具有更小的保守性.

表1 最大可允许 $\bar{\beta}$

Table 1 Calculated maximum allowable $\bar{\beta}$

方法	$5 \leq \tau(k) \leq 10$	$8 \leq \tau(k) \leq 15$
文献[10]定理2(ii)	0.1514	0.1032
文献[10]定理2(i)	0.1590	0.1149
推论2($m = 2$)	0.1562	0.1089
推论2($m = 4$)	0.2024	0.1421

例2 考虑一类离散时滞T-S模糊系统, 选择两条模糊规则($r = 2$), 相应的系统矩阵参数如下:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.8 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.08 & 0.8 \end{pmatrix},$$

$$A_{\tau 1} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.012 \end{pmatrix}, A_{\tau 2} = \begin{pmatrix} 0.012 & 0.01 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.05 \end{pmatrix},$$

$$B_{21} = 0.1, B_{22} = 0.1,$$

$$C_1 = [0.05 \ 0], C_2 = [0.1 \ 0.05],$$

$$D_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, D_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$D_{21} = [0.1 \ 0.1], D_{22} = [0.1 \ 0].$$

接下来, 考虑执行器发生故障的情况, 给出了3种可能的故障模式:

1) 正常模式: $\alpha_{11} = \alpha_{21} = I$;

2) 执行器部分失效模式: $0.6 \leq \alpha_{12} \leq 0.8, 0.7 \leq \alpha_{22} \leq 0.9$;

3) 执行器完全失效模式: $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$.

根据式(5), 得到

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \check{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\alpha}_2 &= \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}, \check{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\alpha}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \check{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

假设传输概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

从定理2可看到, 时变时滞的上下界及性能指标 γ 都会影响闭环系统的稳定性. 当 $\tau_1 = 1$ 和 $\tau_2 = 7$, 应用定理2, 可以得到保证系统随机稳定的最优 H_∞ 指标 $\gamma_{\min} = 0.2$. 相应的控制器参数如下:

$$\begin{aligned}K_{11} &= \begin{pmatrix} -0.1516 & 0.0014 \\ 0.1266 & -0.2998 \end{pmatrix}, \\ K_{12} &= \begin{pmatrix} 0.0492 & 0.0105 \\ 0.1624 & -0.3088 \end{pmatrix}, \\ K_{21} &= \begin{pmatrix} -0.2008 & 0.0012 \\ 0.1461 & -0.3528 \end{pmatrix}, \\ K_{22} &= \begin{pmatrix} 0.0597 & 0.0166 \\ 0.1485 & -0.3412 \end{pmatrix}, \\ K_{31} &= \begin{pmatrix} -0.3778 & 0.0030 \\ 0.2498 & -0.5986 \end{pmatrix}, \\ K_{32} &= \begin{pmatrix} 0.1236 & 0.0258 \\ 0.3168 & -0.6115 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

下面, 将验证本文所设计的控制器参数的有效性. 选择初始条件 $\phi(k) = (-0.2, 0.1)^T$. 隶属度函数为

$$\begin{aligned}h_1(x_1(k)) &= \frac{1 - \sin(x_1(k))}{2}, \\ h_2(x_1(k)) &= \frac{1 + \sin(x_1(k))}{2}.\end{aligned}$$

外部扰动为

$$w(k) = \begin{cases} 1, & 10 \leq k \leq 20, \\ -1, & 30 \leq k \leq 40, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

仿真结果如图1—图3所示. 图1为随机马氏跳模式 $r(k)$. 控制输入 $u^F(k)$ 和状态响应 $x(k)$ 分别如图2—3所示. 仿真结果验证了本文所设计的可靠 H_∞ 控制器的有效性.

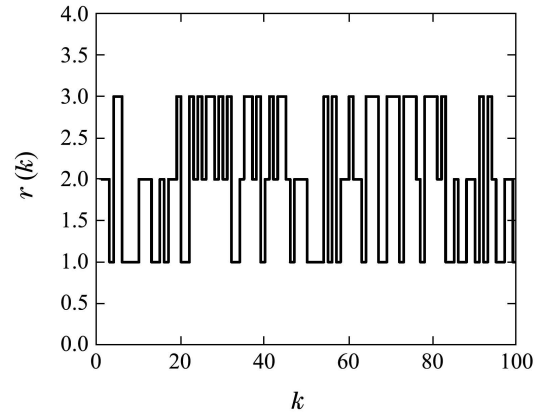


图1 随机马氏跳模式 $r(k)$

Fig. 1 Random jump mode $r(k)$

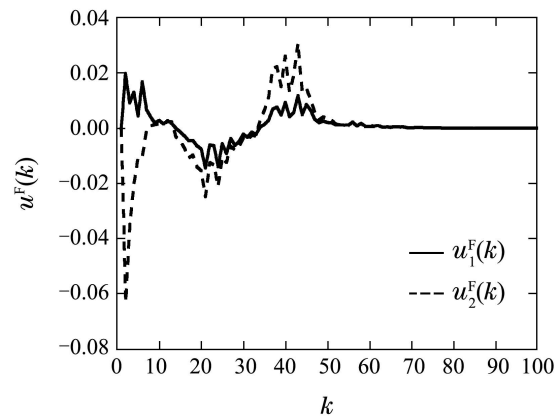


图2 控制输入 $u^F(k)$

Fig. 2 Control input $u^F(k)$

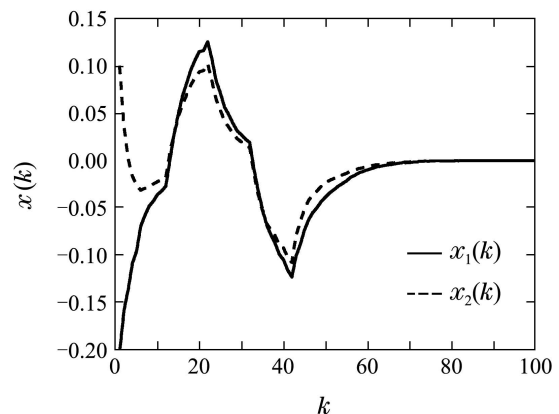


图3 闭环系统的状态响应

Fig. 3 State responses of the closed-loop system

5 结论(Conclusion)

本文研究了一类带有时变时滞和随机执行器故障的离散T-S模糊系统可靠 H_∞ 控制问题. 采用输入-输出方法来近似状态时变时滞, 转化为互联子系统的形式. 通过构造参数依赖的Lyapunov函数, 给出了闭环系统输入-输出均方稳定且满足 H_∞ 性能的充分条件及可靠 H_∞ 控制器的设计方法. 仿真结果验证了所提方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [2] TANAKA K, WANG H O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach* [M]. New York: Wiley, 2001.
- [3] GU K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems [C] // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney: IEEE, 2000: 2805 – 2810.
- [4] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. *Stability of Time-Delay Systems* [M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2003.
- [5] WU M, HE Y, SHE J, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(8): 1435 – 1439.
- [6] SHAO H, HAN Q. New stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(3): 619 – 625.
- [7] MENG X, LAM J, DU B, et al. A delay-partitioning approach to the stability analysis of discrete-time systems [J]. *Automatica*, 2010, 46(3): 610 – 614.
- [8] FRIDMAN E, SHAKED U. Input-output approach to stability and L_2 -gain analysis of systems with time-varying delays [J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(12): 1041 – 1053.
- [9] GU K, ZHANG Y, XU S. Small gain problem in coupled differential-difference equations, time-varying delays, and direct Lyapunov method [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(4): 429 – 451.
- [10] LI X, GAO H. A new model transformation of discrete-time systems with time-varying delay and its application to stability analysis [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(9): 2172 – 2178.
- [11] SU X, SHI P, WU L, et al. A novel approach to filter design for T-S fuzzy discrete-time systems with time-varying delay [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(6): 1114 – 1129.
- [12] FENG J, WANG S. Reliable fuzzy control for a class of nonlinear networked control systems with time delay [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(7): 1091 – 1099.
- [13] WANG Z, WEI G, FENG G. Reliable H_∞ control for discrete-time piecewise linear systems with infinite distributed delays [J]. *Automatica*, 2009, 45(12): 2991 – 2994.
- [14] WU Z, SHI P, SU H, et al. Reliable H_∞ control for discrete-time fuzzy systems with infinite-distributed delay [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(1): 22 – 31.
- [15] WANG S, FENG J, ZHANG H. Robust fault tolerant control for a class of networked control systems with state delay and stochastic actuator failures [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. DOI: 10.1002/acs.2372.
- [16] 孙娜娜, 牛玉刚, 陈蓓, 等. 不确定离散时间系统的滑模可靠控制 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(2): 243 – 248.
(SUN Nana, NIU Yugang, CHEN Bei, et al. Sliding mode reliable control for uncertain discrete-time systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(2): 243 – 248.)

作者简介:

王申全 (1983–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为时滞系统故障诊断与容错控制, E-mail: shenquanwang@126.com;

冯健 (1971–), 男, 博士生导师, 目前研究方向为故障诊断、智能控制及智能系统在工业中的应用等, E-mail: fjneu@163.com;

姜玉莲 (1985–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为智能控制理论与应用及多智能体一致性, E-mail: jiangneu@gmail.com.