

一类离散混沌系统的传输受限同步问题

刘伟^{1,2†}, 王岩岩¹, 汪志鸣²

(1. 周口师范学院 数学与统计学院, 河南 周口 466001; 2. 华东师范大学 数学系 应用数学与交叉学科研究中心, 上海 200241)

摘要: 研究了一类离散混沌系统信息受限条件下的同步问题. 将具有离散形式的混沌驱动系统和具有控制输入的响应系统通过一个有限容量信道的通讯网络进行连接. 在这种情况下, 设计了合适的编解码方法使得传输误差在一定的条件下达到渐近稳定. 同时, 在线性矩阵不等式条件下, 获得了同步误差方程关于传输误差是输入状态稳定, 从而实现了混沌系统在信道容量有限条件下的完全同步. 最后, 通过Fold混沌系统验证了本文方法的有效性.

关键词: 混沌系统; 同步; 离散系统; 信息受限; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Synchronization for a class of discrete-time chaotic control systems under communication constraints

LIU Wei^{1,2†}, WANG Yan-yan¹, WANG Zhi-ming²

(1. School of Mathematics and Statistics, Zhoukou Normal University, Zhoukou Henan 466001, China;

2. Center for Applied and Interdisciplinary Mathematics, Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

Abstract: We investigate the controlled synchronization problem for a class of discrete-time chaotic systems subject to limited communication capacity. A chaotic master system and response system with a controller are connected via a limited capacity channel. In this case, a practical coder-decoder pair is designed such that the transmission error decays to zero exponentially under proper conditions. Meanwhile, input-to-state stability of the synchronization error system with regard to the transmission error is obtained under a proposed linear matrix inequality condition. Thus, the complete synchronization between the master system and the slave system can be reached via a limited communication channel. A simulation example for the Fold chaotic system is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: chaotic systems; synchronization; discrete-time systems; information constraints; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

过去几十年里, 混沌同步由于在保密通信、化学反应和信息处理等各种不同的领域内有着成功的应用而被广泛地研究. 目前, 许多混沌系统的研究已经比较全面, 并且人们也获得了不少实现同步的方法^[1-8]. 近年来, 随着网络通信技术的巨大发展, 网络控制系统的研究日益受到广泛关注, 并取得了长足的进步^[9-11]. 鉴于网络传输媒介自身的物理特性, 使得传输带宽受限这类问题备受关注, 关于信息受限下的网络化控制系统的研究也已取得许多结果^[12-17]. 然而, 由于混沌系统的复杂性, 有关信息受限下混沌同步问题的研究还很少^[18-23]. 当两个混沌系统通过有限容量的传输信道进行连接时, 因为混沌系统对初始条件的极端敏感性将可能导致同步无法实现, 所以信道容量有限这一因素就不能被忽视.

文献[18]中明确指出了信道容量有限对混沌同步造成的影响. 但作者在利用符号动力学的方法实现同步误差充分小时要有足够长的等待时间和字段, 这不利于实际操作, 结果并不十分理想. 文献[19-20]研究了一类信息受限下的混沌量化同步问题. 作者假设驱动系统的单输出以固定采样周期通过有限容量信道到达响应系统. 结果表明, 只有在信道容量无穷大情况下, 完全同步才可能实现. 否则, 同步误差在信息受限条件下只能做到终究有界. 文献[21]也研究了一类混沌系统在信道容量有限情况下的同步问题, 作者结合了系统参数对编解码器进行设计, 最终实现了混沌系统的完全同步. 但需要指出的是, 该文的驱动系统和响应系统是完全相同的. 并且若将上述方法推广到离散混沌系统将会产生新的困难. 因为文中是通过极限的定义来完成编解码器在采样时刻的状态更新. 而

收稿日期: 2013-11-12; 录用日期: 2014-03-28.

[†]通信作者. E-mail: liuweicnu@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171113); 周口师范学院青年基金重点资助项目(zknuc0201); 广西高校科学技术2013年度研究资助项目(2013LX018).

这种极限定义在离散情形下是没有任何意义的. 因此如何克服这一困难就成为本文需要解决的一个关键问题.

基于以上分析, 本文考虑方程更为一般的一类离散混沌系统的同步问题. 目标是要在信息受限的情况下, 通过设计合理的算法实现该混沌系统的完全同步而非终究有界. 并且为了克服所提的编解码器状态在采样时刻更新带来的困难, 本文将通过在编解码器设计中添加辅助系统的方法来解决此时离散系统极限无定义这一难点. 进一步, 利用线性矩阵不等式条件, 给出控制器的设计方法以及实现混沌系统完全同步的充分条件.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑离散时间驱动系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + Df(x(k)), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是驱动系统的状态; 响应系统为

$$y(k+1) = Ay(k) + Df(y(k)) + u, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

其中: $y \in \mathbb{R}^n$ 是响应系统的状态, D 是适维矩阵, u 是控制输入; 初始条件 $x_0 \in \Omega$, 而 Ω 是已知的有界集合. 假设向量函数 $f(x)$ 在有界集 Ω 上满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L > 0$, 使得对于任意 $x, y \in \Omega$, 有

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|. \quad (3)$$

注 1 很多混沌系统具有形如系统(1)的形式, 如: Henon 混沌系统, Fold 混沌系统, 等等. 然而, 到目前为止, 关于这类混沌系统在信息受限条件下的研究还较少.

在本文考虑的同步问题中, 如图1所示. 驱动系统和响应系统经由有限容量信道的通讯网络进行连接. 由于仅有有限位字节的信息可以通过网络进行传输, 因此信息通过网络需要采样和量化. 本文采用如下编解码方法. 具体来讲, 对于给定的采样周期 $T > 0$, 编码信号 $h(jT)$ ($j = 1, 2, \dots$) 在 jT 时刻通过网络进行传输. 在远程接收端, 解码器对接收到的编码信号进行解码以构建驱动系统的估计状态 $\hat{x}$, 并设计控制输入 $u(k)$ ($jT \leq k \leq (j+1)T$).

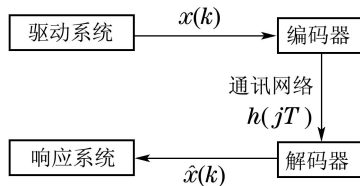


图1 信息受限下的混沌同步

Fig. 1 Chaotic synchronization under information constraints

由于不同的量化方法可能引起不同的量化误差, 从而对系统性能也会造成不同的影响. 因此, 为了实现混沌系统信息受限下的完全同步, 进行合理的信

息编码和解码是十分必要的. 在本文的控制模型中, 编码器和解码器分别采取如下形式:

编码器

$$h(jT) = \mathcal{J}_j(x(\cdot)|_0^{jT}), \quad (4)$$

解码器

$$\hat{x}(k)|_{jT}^{(j+1)T} = \mathcal{L}_j(h(T), h(2T), \dots, h(jT)), \quad (5)$$

其中: $\mathcal{J}_j$ 是编码映射, 它在 $k = jT$ 时刻将系统(1)的状态 $x(k)$ 映射到码字 $h(jT)$ ($j = 1, 2, \dots$). $\mathcal{L}_j$ ($j = 1, 2, \dots$) 是待定的解码映射, 它利用接收到的码字 $h(jT)$ 重构驱动系统的状态. 本文的控制目标就是合理设计具有上述形式的编解码函数实现混沌系统的完全同步.

在描述本文的编解码器之前, 首先回顾下面的一致量化方法^[16]. 选取数 N 满足 $N = q^n$, 其中 q 是一正整数. 对任意给定的常数 $a > 0$, 将超立方体 $B(0, a) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_\infty \leq a\}$ 等分成 $N = q^n$ 个小的超立方体 $I(a) = I_{i_1}^1(a) \times I_{i_2}^2(a) \times \dots \times I_{i_n}^n(a)$, 其中 $i_j \in \{1, 2, \dots, q\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), 且有

$$\begin{cases} I_1^1(a) = \{x_i : -a \leq x_i < -a + \frac{2a}{q}\}, \\ I_2^1(a) = \{x_i : -a + \frac{2a}{q} \leq x_i < -a + \frac{4a}{q}\}, \\ \vdots \\ I_q^1(a) = \{x_i : a - \frac{2a}{q} \leq x_i \leq a\}, \end{cases} \quad (6)$$

定义立方体 $I(a)$ 的中心 $C_a(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 为

$$\left[-a + \frac{2i_1 - 1}{q}a, -a + \frac{2i_2 - 1}{q}a, \dots, -a + \frac{2i_n - 1}{q}a \right]^T,$$

则在上述状态一致划分下, 对任意 $x \in B(0, a)$, 存在唯一的一组整数 $i_j \in \{1, 2, \dots, q\}$ ($j = 1, 2, \dots$), 使得 $x \in I(a) \subset B(0, a)$.

下面给出本文的编码器和解码器:

编码器 当 $x(jT) - \bar{x}(jT) \in I(a(j))$ 时,

$$h(jT) = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \quad (7)$$

其中 $\bar{x}(k)$ 是以下辅助系统的解:

$$\begin{cases} \bar{x}(0) = 0, \bar{x}(k) = \hat{x}(k), k \neq jT, \\ \bar{x}(jT) = A\hat{x}(jT-1) + Df(\hat{x}(jT-1)). \end{cases} \quad (8)$$

解码器 当 $h(jT) = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ 时,

$$\begin{cases} \hat{x}(0) = 0, \\ \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Df(\hat{x}(k)), k \neq jT-1, \\ \hat{x}(jT) = \bar{x}(jT) + C_{a(j)}(i_1, i_2, \dots, i_n). \end{cases} \quad (9)$$

注 2 根据状态的一致划分(6)和编码器的定义(7)可

知, 数 N 的选取是由信道的传输能力来确定的. 即, 数 N 的大小代表着通信信道的传输能力. 另外, 值得注意的是, 系统(9)的状态每隔 T 步就会被更新一次. 在文献[16]中, 编解码器状态的更新利用了极限定义. 然而, 这种定义对离散系统是无意义的. 为此本文通过设计辅助系统的方法有效地克服了这一困难. 这与连续系统处理方法有着显著区别.

3 主要结果(Main results)

记传输误差为 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$. 在给出本文的主要结果之前, 首先证明通过上面的编解码方法, 传输误差在满足一定的条件下能衰减到零. 记

$$M_0 = \sup_{x_0 \in \Omega} \|x_0\|_\infty, \quad a(0) = M_0,$$

$$a(1) = \rho M_0, \quad a(j+1) = \rho a(j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

其中 $\rho = \mu/q$, $\mu = \sqrt{n}(\|A\| + \|D\|L)^T$.

定理 1 假定正整数 q 满足

$$q > \sqrt{n}(\|A\| + \|D\|L)^T, \quad (10)$$

则根据上述定义的编解码器(7)–(9), 传输误差渐近衰减到零.

证 首先, 证明对任意的 $j \geq 1$, 有

$$x(jT) - \bar{x}(jT) \in B(0, a(j)). \quad (11)$$

当 $j = 1$ 时, 根据状态划分和编解码器定义, 可知

$$\begin{aligned} \|x(T) - \bar{x}(T)\| &= \\ \|Ax(T-1) - A\hat{x}(T-1) + \\ Df(x(T-1)) - Df(\hat{x}(T-1))\| &\leq \\ (\|A\| + \|D\|L)^T \|x(0) - \hat{x}(0)\|. \end{aligned}$$

进一步, 有 $\|x(T) - \bar{x}(T)\|_\infty \leq \mu \|x(0) - \hat{x}(0)\|_\infty \leq a(1)$. 因此, $j = 1$ 时式(11)成立. 假设第 j 步时式(11)成立, 可证第 $j+1$ 步时仍成立. 事实上

$$\begin{aligned} \|x((j+1)T) - \bar{x}((j+1)T)\| &= \\ \|Ax((j+1)T-1) - A\hat{x}((j+1)T-1) + \\ Df(x((j+1)T-1)) - Df(\hat{x}((j+1)T-1))\| &\leq \\ (\|A\| + \|D\|L)^T \|x(jT) - \hat{x}(jT)\|, \end{aligned}$$

进一步, 有

$$\begin{aligned} \|x((j+1)T) - \bar{x}((j+1)T)\|_\infty &\leq \\ \mu \|x(jT) - \hat{x}(jT)\|_\infty &= \\ \mu \|x(jT) - \bar{x}(jT) - C_{a(j)}(i_1, i_2, \dots, i_n)\|_\infty. \end{aligned}$$

由于 $x(jT) - \bar{x}(jT)$ 和 $C_{a(j)}(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 同在 $B(0, a(j))$ 内, 可知

$$\|x(jT) - \bar{x}(jT) - C_{a(j)}(i_1, i_2, \dots, i_n)\| \leq \frac{a(j)}{q},$$

从而

$$\|x((j+1)T) - \bar{x}((j+1)T)\|_\infty \leq a(j+1).$$

根据数学归纳原理, 式(11)对于任意的 $j \geq 1$ 成立. 接下来证明:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - \hat{x}(k)\| = 0.$$

注意到传输误差方程为

$$e(k+1) =$$

$$A(x(k) - \hat{x}(k)) + D(f(x(k)) - f(\hat{x}(k))),$$

对任意的正整数 k , 不妨设 $jT \leq k \leq (j+1)T$, 则

$$\|e(k)\| \leq (\|A\| + \|D\|L)^{k-jT} \|x(jT) - \hat{x}(jT)\| \leq \max_{0 \leq i \leq T} \{(\|A\| + \|D\|L)^i\} \|x(jT) - \hat{x}(jT)\|.$$

进一步, 有

$$\|e(k)\|_\infty \leq \max_{0 \leq i \leq T} \{(\|A\| + \|D\|L)^i\} \sqrt{n} \|x(jT) - \hat{x}(jT)\|_\infty \leq$$

$$\frac{a(j)}{q} \max_{0 \leq i \leq T} \{(\|A\| + \|D\|L)^i\} \sqrt{n}.$$

根据 $a(j)$ 的定义, 迭代可得

$$\|e(k)\|_\infty \leq \frac{a(0)}{q} \max_{0 \leq i \leq T} \{(\|A\| + \|D\|L)^i\} \rho^j \sqrt{n}.$$

通过定理中条件(10), 可知结论成立. 证毕.

注 3 上述定理说明了当信道容量满足一定条件时, 只要合理地设计传输方式, 传输误差就能实现渐近趋于零.

接下来, 开始考虑驱动系统(1)和响应系统(2)的同步问题. 本文中, 考虑如下静态反馈控制:

$$u(k) = K(y(k) - x(k)), \quad (12)$$

其中 K 是控制增益矩阵. 由于量化的影响, 式(12)不可能被直接实施反馈, 因为此时状态 x 是不可利用的. 取而代之, 本文用如下反馈形式

$$u(k) = K(y(k) - \hat{x}(k)). \quad (13)$$

记同步误差为 $\eta = y - x$, 则驱动系统(1)和响应系统(2)的同步误差方程可描述为如下形式:

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= (A + K)\eta(k) + D(f(y(k)) - \\ &\quad f(x(k))) + Ke(k). \end{aligned} \quad (14)$$

下面给出驱动系统(1)和响应系统(2)同步的充分条件.

定理 2 如果存在标量 $\tau > 0$, 正定矩阵 $P > 0$ 和矩阵 Y , 使得如下线性矩阵不等式

$$A = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 & A^T P + Y \\ * & D^T P D - \tau I & (YD)^T & 0 \\ * & * & -P & Y \\ * & * & * & -P \end{bmatrix} \quad (15)$$

成立, 则同步误差 η 关于传输误差 e 输入状态稳定. 其中: $\Lambda_{11} = -P + \tau L^2 I$, $\Lambda_{12} = (A^T P + Y)D$.

此时, 可取控制增益 $K = P^{-1}Y^T$.

证 选取同步误差系统(14)的Lyapunov函数

$$V(\eta(k)) = \eta^T(k)P\eta(k), \quad (16)$$

则对任意的常数 $\tau > 0$, 有

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(\eta(k+1)) - V(\eta(k)) \leq \\ &(DL(k) + (A+K)\eta(k) + Ke(k))^T P(DL(k) + \\ &(A+K)\eta(k) + Ke(k)) - \eta(k)^T P\eta(k) + \\ &\tau(L^2\eta(k)^T\eta(k) - L(k)^T L(k)) \leq \\ &\xi(k)^T \Omega \xi(k) + e(k)^T P e(k), \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \xi(k)^T &= (\eta(k)^T, L(k)^T, e(k)^T), \\ L(k) &= f(y(k)) - f(x(k)), \\ \Omega &= \begin{bmatrix} \Omega_1 & (A+K)^T P D & (A+K)^T P K \\ * & D^T P D - \tau I & D^T P K \\ * & * & K^T P K - P \end{bmatrix}, \\ \Omega_1 &= (A+K)^T P(A+K) - P + \tau L^2 I. \end{aligned}$$

根据Schur补引理和不等式(15), 可知 $\Omega < 0$ 成立. 进一步可得 $\Delta V(k) \leq -\alpha_1 V(\eta(k)) + \sigma(\|e(k)\|)$, 其中:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_{\min}(-\Omega)}{\lambda_{\max}(P)} > 0, \quad \sigma(t) = \lambda_{\max}(P)\|K\|^2 t^2,$$

则存在一个 $\mathcal{KL}$ 类函数 β 和一个 $\mathcal{K}$ 类函数 γ , 使得系统(14)的解满足

$$\|\eta(k)\| \leq \beta(\|\eta_0\|, k) + \gamma(\sup_{1 \leq i \leq k} \|e(i)\|), \quad (17)$$

其中:

$$\gamma(r) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{c\alpha_1\lambda_{\min}(P)}}\|K\|r, \quad 0 < c < 1,$$

即同步误差 η 关于传输误差 e 是输入状态稳定^[24].

注4 由定理1可知, 传输误差 $e(k)$ 渐近趋于零. 从而根据输入状态稳定的定义, 可以推出同步误差 $\eta(k)$ 渐近趋于零. 即驱动系统和响应系统在上述编解码方法和式(15)的约束下实现了完全同步.

4 仿真例子(A simulation example)

用Fold系统来验证本文方法的有效性^[25]. 驱动系统为

$$x(k+1) = Ax(k) + Df(x(k)), \quad (18)$$

响应系统为

$$y(k+1) = Ay(k) + Df(y(k)) + u, \quad (19)$$

其中:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当选取参数 $a = -0.1, b = -1.7$, 初始条件 $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.1$ 时, 如图2所示, 系统(18)呈现混沌行为, 并且其轨线是在一个有界集 Ω 内, 其中

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | -2 \leq x_1 \leq 1.5, -2 \leq x_2 \leq 1.5\}.$$

对 Ω 中的任意向量 $x(k)$ 和 $\tilde{x}(k)$, 容易验证

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|,$$

其中 $L = 0.7$. 通过进一步的计算, 可得线性矩阵不等式(15)的可行解如下:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 0.8777 & -0.0103 \\ -0.0103 & 1.0206 \end{pmatrix}, \\ Y &= \begin{pmatrix} 0.0587 & -0.0011 \\ -0.3809 & 0.0081 \end{pmatrix}, \tau = 1.3146. \end{aligned}$$

进一步, 有

$$K = P^{-1}Y^T = \begin{pmatrix} 0.0669 & -0.4339 \\ -0.0004 & 0.0036 \end{pmatrix}.$$

根据图2本文可选取 $M_0 = 2, T = 2, q = 10$, 则定理1和定理2中的条件均得到满足. 在本文定义的编解码器方法下, 响应系统(19)的轨迹如图3所示. 进一步, 图4给出了驱动系统(18)与响应系统(19)的同步误差的仿真, 从仿真结果可以看出本文的设计方法使得混沌系统在信道容量确定的情况下实现了完全同步.

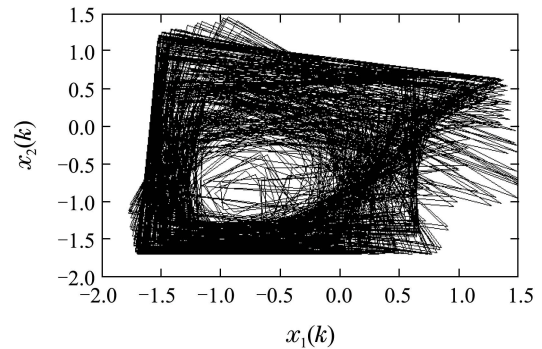


图2 Fold 混沌驱动系统模型

Fig. 2 Fold chaotic master system model

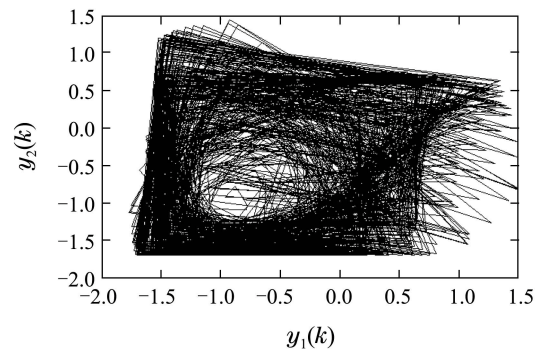


图3 Fold 混沌响应系统模型

Fig. 3 Fold chaotic response system model

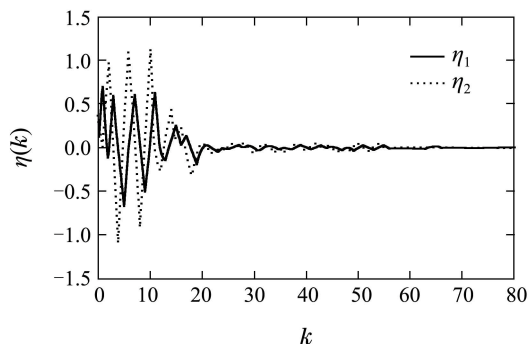


图4 Fold混沌系统的同步误差

Fig. 4 The synchronization error of chaotic system

然而, 利用文献[19–20]中的方法, 笔者发现同步误差在信息受限情况下只能做到终究有界, 除非信道容量无穷大. 然而, 这种情况在真实的网络环境中是不可能存在的. 这表明本文的方法更有效, 从而验证了本文方法的有效性.

5 结论(Conclusions)

本文研究了一类离散混沌系统信息传输受限下的同步问题. 通过合理的设计编解码方法, 使得同步误差在合适的条件下渐近趋于零. 避免了编解码器在采样时刻更新时带来的麻烦, 达到了以往研究工作中信道容量有限条件下无法达到的完全同步. 最后, 通过数值仿真例子验证了本文方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] BOCCALITTI S, KURTHS J, OSIPOV G, et al. The synchronization of chaotic systems [J]. *Physics Reports*, 2002, 366(1/2): 1 – 101.
- [2] PECORA M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 164(8): 821 – 824.
- [3] LIAO T L, HUANG N S. Control and synchronization of discrete-time chaotic systems via variable structure control technique [J]. *Physics Letters A*, 1997, 234(4): 262 – 267.
- [4] ZHANG H G, HUANG W, WANG Z L, et al. Adaptive synchronization between two different chaotic systems with unknown parameters [J]. *Physics Letters A*, 2006, 350(5/6): 363 – 366.
- [5] YASSEN M T. Controlling synchronization and tracking chaotic Liu system using active backstepping design [J]. *Physcs Letters A*, 2007, 360(4/5): 582 – 587.
- [6] GRASSI G, MILLER D A. Experimental realization of observer-based hyper chaos synchronization [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2001, 48(3): 366 – 374.
- [7] 廖晓昕, 陈关荣. 混沌同步的一些新结果 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(2): 253 – 257.
(LIAO Xiaoxin, CHEN Guanrong. Some new results on chaos synchronization [J]. *Control Theory & Application*, 2003, 20(2): 253 – 257.)
- [8] FRADKOV A L, POGROMSKY A Y. *Introduction to Control of Oscillations and Chaos* [M]. Singapore: World Scientific Publishers, 1998.
- [9] BAILLIFUL J, ANTSAKLIS P J. Control and communication challenges in networked real-time systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 9 – 28.
- [10] NAIR G N, FAGNANI F, ZAMPIERI S, et al. feedback control under data rate constraints: An overview [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 108 – 136.
- [11] HESPAHNA J P, NAGHSHTABRIZI P, XU Y. A survey of recent results in networked control systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 5(1): 138 – 162.
- [12] WANG Z M, WANG G X, LIU W. Stabilisation of two-time scale systems with a finite feedback data rate [J]. *IET Control Theory and Application*, 2010, 4(11): 2603 – 2612.
- [13] FU M, XIE L. The sector bound approach to quantized feedback control [J]. *IEEE Transactions Automatic Control*, 2005, 50(11): 1698 – 1711.
- [14] LIBERZON D. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals [J]. *Automatica*, 2003, 39(9): 1543 – 1554.
- [15] LIU W, WANG Z M, NI M K. Quantized feedback stabilization for a class of linear systems with nonlinear disturbances [J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2013, 8(5): 48 – 56.
- [16] SAVKIN A V, CHENG T. Detectability and output feedback stabilizability of nonlinear networked control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(4): 730 – 735.
- [17] HESPAHNA J, ORTEGA A, VASUDEVAN L. Towards the control of linear systems with minimum bit-rate [C] // *Proceedings of the 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. South Bend, Indiana: University of Notre Dame, 2002: 1 – 15.
- [18] STOJANOVSKI T, KOCAREV L, HAMIS R. Applications of symbolic dynamics in chaos synchronization [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 1997, 44(10): 1014 – 1018.
- [19] FRADKOV A L, ANDRIEVSKY B, EVANS R J. Chaotic observer-based synchronization under information constraints [J]. *Physical Review E*, 2006, 73(6): 1 – 8.
- [20] FRADKOV A L, ANDRIEVSKY B, ANDRIEVSKY A. Observer-based synchronization of discrete-time chaotic systems under communication constraints [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: IFAC, 2008: 3719 – 3724.
- [21] WANG G X, WANG Z M, LU G P. Chaotic synchronization with limited information [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, 18(10): 3137 – 3145.
- [22] 刘伟, 王岩岩, 汪志鸣, 等. 一类混沌系统的量化同步 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(9): 1227 – 1231.
(LIU Wei, WANG Yanyan, WANG Zhiming, et al. Quantized synchronization for a class of chaotic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 20(9): 1227 – 1231.
- [23] LIU W, WANG Z M, NI M K. Controlled synchronization for chaotic systems via limited information with data packet dropout [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2576 – 2579.
- [24] JIANG Z P, SONTAG E, WANG Y. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(6): 857 – 869.
- [25] LIU B, LIU X Z. Robust stability of uncertain discrete impulsive systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 2007, 54(5): 455 – 459.

作者简介:

刘伟 (1984–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性系统、网络控制系统、混沌控制, E-mail: liuweicnu@163.com;

王岩岩 (1981–), 女, 讲师, 目前研究方向为网络控制系统、混沌控制, E-mail: 15994194766@163.com;

汪志鸣 (1953–), 男, 教授, 目前研究方向为非线性时变系统、网络控制系统、奇摄动分析、混沌分析与控制等, E-mail: zmwang@math.ecnu.edu.cn.