

受干预多智能体系统平衡状态及目标追踪设计

袁玩贵^{1,2†}, 屈百达²

(1. 江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122; 2. 江南大学 物联网学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对拓扑结构无向连通的多智能体系统受到干预的问题, 运用图论、矩阵论及极限理论, 分析了系统状态保持一致性的条件, 并得到了系统的平衡状态. 设计了干预控制器, 引导系统向任意指定地点聚集. 给出了多智能体系统一致追踪移动目标的一致追踪算法. 最后仿真研究实验说明了本文结论的正确性.

关键词: 多智能体系统; 一致性; 干预; 控制协议

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Consensus value of multi-agent systems with intervention and design of target tracking

YUAN Wan-gui^{1,2†}, QU Bai-da²

(1. School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

2. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: The consensus for multi-agent systems with intervention in undirected interaction topology is defined. Based on graph theory, matrix theory and limit theory, we present sufficient conditions and consensus value for the convergence of the system. Then, for the system to converge to the specified location, we design a valid intervention controller. Finally, the consensus tracking algorithm is developed for a moving target. Simulation results are given to validate the effectiveness of theoretical results.

Key words: multi-agent systems; consensus; intervention; control protocol

1 引言(Introduction)

对生物群体行为(如迁徙鸟类的编队飞行、鱼群的聚集行为、蚁群的协同工作等)的研究, 使多智能体系统成为国际上的研究热点. 这方面的研究成果^[1-15], 在很多领域有着广泛的应用, 如多机器人系统、智能交通、协调专家系统、分布式智能决策、分布式计算、多自主飞行器、无线传感网络通讯协调控制等等.

一致性分析一直是多智能体系统的主要课题之一. 早在1987年, C. Reynolds按照自然界中动物群体行为的特点, 并提出了著名的Boid模型. 在此之后, 1995年, 文献[1]提出了Vicsek模型. 2003年, 文献[2]利用代数图论及控制理论对Vicsek模型作了理论分析. 之后, 文献[3]得到了当无向时不变通信拓扑图是连通时, 多智能体系统能一致收敛, 并给出了多智能体一致收敛状态, 即收敛于多智能体初始位置的平均值处. 文献[4]指出当通信网络拓扑结构图为连通的非平衡拓扑结构时, 多智能体一致收敛于初始位置的凸组合. 所有这些工作依据多智能体本身状态设置控制协议. 在通信拓扑结构强连通或存在生成树时, 各智能体收

敛于系统内部的平衡状态. 但大部分文献均未讨论系统受到干预或干扰时, 系统仍能保持一致性的条件.

文献[5]通过添加个体的方法实现对整个多智能体系统的干预. 若对稳定的多智能体系统施加外在干预或干扰, 系统仍能保持一致性的条件是什么, 其平衡点在什么位置, 是本文主要研究的内容. 另外, 文章还研究了若想将稳定运行的多智能体系统, 向任一指定的位置聚集, 该设计怎样的干预控制器.

另外, 在文献[6]中, Ren将系统追踪的目标看作是虚拟领导者, 设计了追踪控制协议. 但其设计的基础是运动曲线已知, 制约了其实际应用. 本文将在更宽泛的条件下, 设计一致追踪目标的算法.

2 问题描述(Problem statement)

用无向图 $G = (V, E, A)$ 表示邻接矩阵为 A 的多智能体网络通信结构. $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 表示图 G 的节点集, E 表示图 G 的边集, $e_{ij} = (p_i, p_j)$ 表示图 G 的一条边. 当 $e_{ij} \in E$, 定义邻接矩阵 A 的元素 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. L 为与邻接矩阵 A 相对应的Laplacian矩阵. N_i 表示智能体 i 的邻居集合.

考虑一阶多智能体系统

$$\dot{x}_i = u_i, \quad (1)$$

其中: $x_i = (x_{ix}, x_{iy})^T \in \mathbb{R}^2$, $u_i = (u_{ix}, u_{iy})^T \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \dots, n$ 分别为智能体 i 的状态向量及控制器.

设系统的通讯拓扑网络为无向强连通的, 其邻接矩阵为 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 对应的Laplacian矩阵为 $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

众多文献如文献[2-4, 6, 10, 14]等中, 均采用

$$u_i = - \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

为系统的控制协议, 并得到了在通讯拓扑图连通条件下, 多智能体系统一致收敛到各智能体初始位置的平均值. 但实际应用中往往需要智能体集结到某一指定位置(不一定是初始位置的均值处), 仅采用式(2)的控制显然不能达到目的. 为此, 本文考虑如下控制协议

$$u_i = - \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j) + \epsilon_i, \quad (3)$$

其中 ϵ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ 为对智能体 i 的干预或干扰(不再依赖系统的状态, 下文称为干预器).

在式(3)的控制下, 多智能体系统(1)的一致收敛平衡状态及采用怎样的干预器 ϵ_i 使系统收敛于指定位置是本文研究的主要内容.

3 主要结论(Main results)

引理 1 对于特征值为 $0 = \beta_1 < \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots \leq \beta_n$ 的 n 阶实对称矩阵 B , 若连续向量函数

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))^T$$

满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \gamma$ 及 $\int_0^\infty \gamma(t) dt$ 存在, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-B(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau = q_1 q_1^T \int_0^\infty \gamma(t) dt + \left(\sum_{i=2}^n \frac{1}{\beta_i} q_i q_i^T \right) \gamma. \quad (4)$$

其中 q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为正交相似变换矩阵 Q 的列向量, 即 $Q^T B Q = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$.

证 记 $\Lambda = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, 则

$$-B = Q(-\Lambda)Q^T,$$

于是

$$e^{-B(t-\tau)} = Q e^{-\Lambda(t-\tau)} Q^T. \quad (5)$$

注意到

$$e^{-\Lambda(t-\tau)} = \text{diag}\{e^{-\beta_1(t-\tau)}, e^{-\beta_2(t-\tau)}, \dots, e^{-\beta_n(t-\tau)}\}, \quad (6)$$

$$Q^T \gamma(t) = (q_1^T \gamma(t), q_2^T \gamma(t), \dots, q_n^T \gamma(t))^T, \quad (7)$$

并记

$$\alpha_i(t) = \int_0^t e^{-\beta_i(t-\tau)} q_i^T \gamma(\tau) d\tau, \quad (8)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 由式(5)–(8)可得

$$\int_0^t e^{-B(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau = Q(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))^T. \quad (9)$$

另外, 由于 $\beta_1 = 0$, 故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_1(t) = q_1^T \int_0^\infty \gamma(\tau) d\tau. \quad (10)$$

将 $\alpha_i(t)$ ($i = 2, 3, \dots, n$) 改写为如下形式:

$$\alpha_i(t) = \frac{\int_0^t e^{\beta_i \tau} q_i^T \gamma(\tau) d\tau}{e^{\beta_i t}}. \quad (11)$$

由L'Hospital法则,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_i(t) = \frac{1}{\beta_i} q_i^T \gamma. \quad (12)$$

根据式(10)(12), 式(9)在 $t \rightarrow \infty$ 时的极限为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-B(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau = Q(q_1^T \int_0^\infty \gamma(\tau) d\tau, \frac{1}{\beta_2} q_2^T \gamma, \dots, \frac{1}{\beta_n} q_n^T \gamma)^T. \quad (13)$$

又由 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ 知, 式(4)成立. 引理1证毕.

注 1 由数学分析知识, 若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上一致连续(或为单调函数), 且 $\int_0^\infty f(x) dx$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. 因此, 根据引理1的条件, $\gamma = 0$. 据此, 引理1的结论可进一步简化为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-B(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau = q_1 q_1^T \int_0^\infty \gamma(t) dt. \quad (14)$$

记 $x = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $\varepsilon = (\epsilon_1^T, \epsilon_2^T, \dots, \epsilon_n^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}$, I_2 为二阶单位矩阵, 控制协议(3)控制下的多智能体系统(1)可描述为

$$\dot{x}(t) = -(L \otimes I_2)x(t) + \varepsilon(t). \quad (15)$$

定理 1 对于拓扑结构为无向连通的多智能体系统(15), 当干预或干扰 $\epsilon(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续(或单调), 且能随时间可连续累加, 即 $\int_0^\infty \epsilon(t) dt$ 存在, 则多智能体系统(15)一致收敛于

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i(0) + \int_0^\infty \epsilon_i(t) dt). \quad (16)$$

证 因为 A 为无向连通图的邻接矩阵, 所以其Laplacian矩阵 L 为秩为 $n-1$ 的 n 阶实对称阵. 设其特征值为 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$, 对应的正交特征向量为 $v_1, v_2, \dots, v_n$. 其中特征值 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_n$, 这里 $\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1)^T$. 并记 $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, 则 $L = P \Lambda P^T$, 其中 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

记 $x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^{2n}$ (设系统初始时间 $t_0 = 0$) 为系统的初始状态, 则系统(15)的状态解为

$$x(t) = e^{-(L \otimes I_2)t} x_0 + \int_0^t e^{(L \otimes I_2)(\tau-t)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (17)$$

即多智能体系统(15)的即时状态由系统的初始转移状

态

$$x_{0t} = e^{-(L \otimes I_2)t} x_0$$

与干预转移累积状态

$$x_{\epsilon t} = \int_0^t e^{(L \otimes I_2)(\tau-t)} \epsilon(\tau) d\tau$$

叠加的结果.

系统的状态转移矩阵

$$e^{-(L \otimes I_2)t} = (P \otimes I_2)(e^{-\Lambda t} \otimes I_2)(P^T \otimes I_2). \quad (18)$$

注意到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_i t} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

由式(18), 初始转移状态的平衡状态 $x_{0\infty}$ 为

$$x_{0\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{0t} = ((v_1 v_1^T) \otimes I_2) x_0 = \frac{1}{n} (1_n \otimes I_2) \sum_{i=1}^n x_i(0). \quad (19)$$

如文献[5]中结论, 多智能体系统在控制协议(2)的控制下, 多智能体系统最终一致收敛于初始位置的均值 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$ (本文称为系统内部平衡点).

基于引理1, 可得

$$x_{\epsilon\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{\epsilon t} = (v_1 v_1^T \otimes I_2) \int_0^\infty \epsilon(t) dt. \quad (20)$$

注意到 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} 1_n$, 所以式(20)可改写为

$$x_{\epsilon\infty} = \frac{1}{n} (1_n \otimes I_2) \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \epsilon_i(t) dt. \quad (21)$$

因此, 多智能体系统(15)的平衡状态为式(16). 定理1证毕.

定理1的物理意义为: 在通信畅通的情况下, 当系统没有外部干预或干扰时, 系统中各智能体随时间推移必将聚集到内部平衡点; 当存在外部干预或干扰时, 干预控制牵引系统向各附加位移的均值处(定义为外部平衡点)聚集. 其结果是所有智能体最终将聚集到内外平衡点的叠加处.

4 目标追踪设计(Design of target tracking)

前文已经叙述, 对于一个没有干预的稳定的多智能体系统, 其各智能体将向系统的内部平衡点聚集. 那么, 要使得所有智能体向指定的地点聚集, 干预控制器如何设计?

众所周知, 指数函数 $f(x) = e^{-ax} (a > 0)$ 有快速收敛于零的特性. 因此将干预控制器设计为

$$\epsilon_i(t) = (\operatorname{sgn} \alpha e^{-\frac{1}{|\alpha|} t}, \operatorname{sgn} \beta e^{-\frac{1}{|\beta|} t})^T. \quad (22)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n$, sgn 为符号函数, α, β 为参数, $|\cdot|$ 为绝对值符号(下文称为指数控制器). 显然 $\epsilon_i(t)$ 满足定理1的条件, 易得下述定理2.

定理2 无向连通拓扑结构下, 多智能体系统

(15)一致收敛于任一指定位置 $(a, b)^T$ 的充分条件为干预 $\epsilon_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 设置为指数控制器, 且指数控制器的参数 $(\alpha, \beta)^T = (a - a_0, b - b_0)^T$, 其中 $(a_0, b_0)^T$ 为系统内部平衡点.

证 只需将式(22)代入式(16)即可证得.

若将目标位置传递给参数 $(a, b)^T$, 根据定理2, 干预可使得系统中所有智能体向目标位置聚集. 从而完成目标追踪任务.

当系统中智能体个数庞大, 要对每个智能体实施干预, 困难很大. 为此, 可以通过对系统中部分智能体实施干预, 同样也能达到一致追踪目标这一任务. 下文定理3以干预一个智能体为例, 实现目标追踪.

定理3 无向连通拓扑结构下, 多智能体系统(15)一致收敛于任一指定位置 $(a, b)^T$ 的充分条件为对系统中的一个智能体 k 实施干预

$$\epsilon_k(t) = (\operatorname{sgn} \alpha e^{-\frac{1}{|\alpha|} t}, \operatorname{sgn} \beta e^{-\frac{1}{|\beta|} t})^T,$$

且参数 $(\alpha, \beta)^T = (a - a_0, b - b_0)^T$ (其中 $(a_0, b_0)^T$ 为系统内部平衡点).

证 只需将 $\epsilon_k(t)$ 的表达式及 $\epsilon_i(t) = 0 (i \neq k)$ 代入式(16)即可证得.

上述两定理阐述的是目标位置恒定不变时, 实现目标追踪的充分条件. 当目标位置变动时, 通过调整定理2, 定理3中指数控制器的参数, 也可实现对移动目标的一致追踪. 具体操作步骤见图1所示.

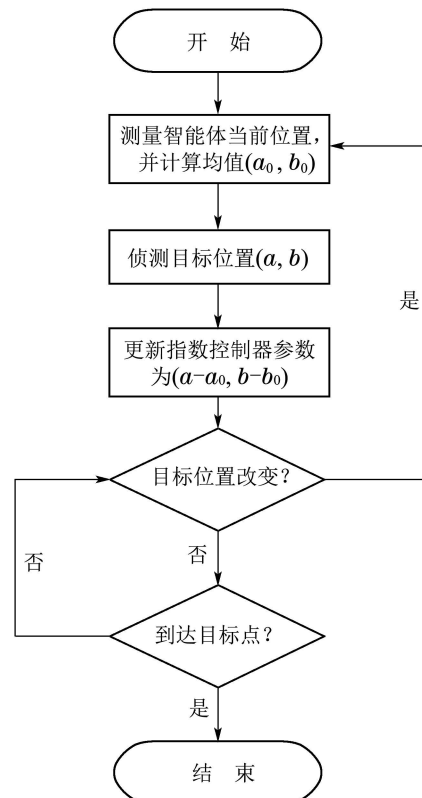


图1 一致追踪算法流程图

Fig. 1 Flow chart of consistent tracking algorithm

5 仿真实例(Simulation and experiments)

图2所示是由5个智能体A, B, C, D, E组成的多智能体网络拓扑结构。

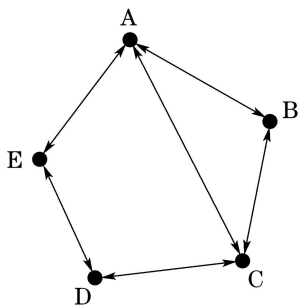


图2 系统的通信拓扑图

Fig. 2 Communication topology of the system

对应的Laplacian矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

设智能体A, B, C, D, E的初始位置分别为 $(0, 0)^T$, $(-1, 0)^T$, $(1, -4)^T$, $(2, 3)^T$, $(-1, 3)^T$, 计算得系统初始位置的均值为 $(a_0, b_0)^T = (0.2, 0.4)^T$. 取干预 $\epsilon_i(t) = (e^{-\frac{1}{3.5}t}, e^{-\frac{1}{2.8}t})^T$, $i = 1, 2, \dots, 5$, 由定理1的结论, 系统的平衡点在 $(3.7, 3.2)^T$. 计算机仿真如图3所示。

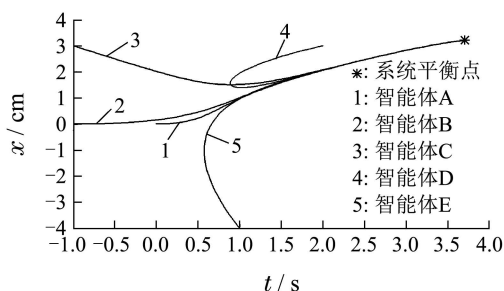


图3 受干预系统状态图

Fig. 3 States of system with intervention

为了将多智能体聚集到指定位置 $(3, 2)^T$ (任意指定), 根据定理2, 设置干预控制器 $\epsilon_i(t) = (e^{-\frac{1}{2.8}t}, e^{-\frac{1}{1.6}t})^T$, $i = 1, 2, \dots, 5$. 计算机仿真如图4所示。

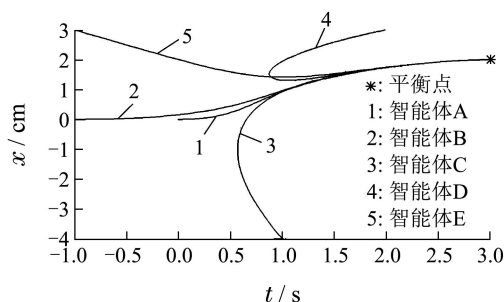


图4 系统向指定位置聚集的状态图

Fig. 4 States of system to the specified location

为了达到上述目的, 亦可根据定理3, 仅对第一个智能体A设置干预控制器 $\epsilon_1(t) = (e^{-\frac{1}{14}t}, e^{-\frac{1}{8}t})^T$, $\epsilon_i(t) = 0$, $i = 2, 3, \dots, 5$. 仿真如图5所示。

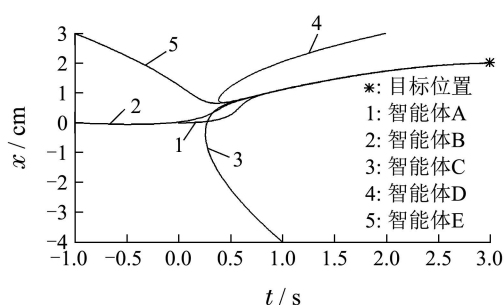
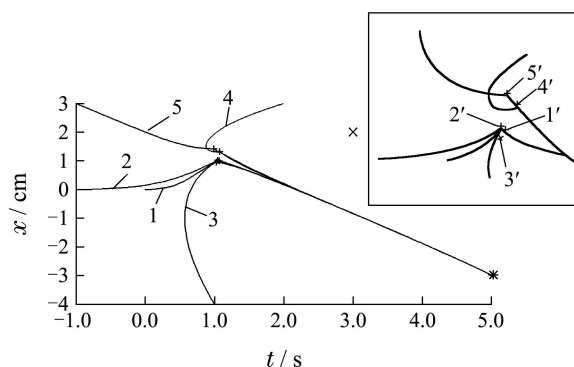


图5 一个个体受干预系统向指定位置聚集的状态图

Fig. 5 States of system to the specified location with an individual intervention

当多智能体在追踪目标过程中, 目标的位置发生改变. 根据一致追踪算法, 只需修改指数控制器的参数, 即可完成追踪过程. 如多智能体初始位置同上, 目标的初始位置在 $(3, 2)^T$. 系统追踪1s后, 目标位置改变至 $(5, -3)^T$. 为了完成对移动目标的追踪, 采用一致追踪算法. 首先设置系统(1)干预控制器 $\epsilon_i(t) = (e^{-\frac{1}{2.8t}}, e^{-\frac{1}{1.6t}})^T$, $i = 1, 2, \dots, 5$, 系统向目标点 $(3, 2)^T$ 追踪. 在 $t = 1$ 时刻, 侦测到目标位置在 $(5, -3)^T$, 同时计算智能体当前位置的均值 $(a_1, b_1)^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(1)$, 并将系统的干预指数控制器的参数修改为 $(\alpha, \beta)^T = (5 - a_1, -3 - b_1)^T$. 系统将向目标点 $(5, -3)^T$ 追踪。

多智能体系统追踪移动目标的计算机仿真如图6所示。



×: 目标初始位置 1': 1s后A的位置 2': 1s后B的位置
3': 1s后C的位置 4': 1s后D的位置 5': 1s后E的位置
*: 目标变动位置 1: 智能体A 2: 智能体B
3: 智能体C 4: 智能体D 5: 智能体E

图6 移动目标追踪的系统状态图

Fig. 6 State of system to track moving target

6 结束语(Conclusions)

研究了多智能体系统在通信拓扑无向连通时, 受到干预或干扰情况下, 系统保持一致性并收敛到平衡点的条件及系统平衡点的计算公式. 设计了设置一致

平衡点至任意指定位置的控制协议(指数控制器). 对于移动目标的一致追踪给出了具体的一致追踪算法. 最后, 通过仿真实例, 验证了本文结论的正确性.

对于智能体的状态向量是高维的情形, 本文的研究方法及结论均可平行推广.

文章中, 仅讨论了多智能体系统在拓扑结构无向连通时的情形. 如何控制有向拓扑图结构的多智能体系统, 是这篇文章的后续工作.

参考文献(References):

- [1] VICSEK T, CZIROK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [2] JADBABAIE A, LIN J, MORSE S A. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [3] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [4] 谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(10): 1087 – 1092.
(TAN Fuxiao, GUAN Xinping, LIU Derong. Consensus protocol in networked multi-agent systems with non-balanced topology [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(10): 1087 – 1092.)
- [5] HU J P, LIU Z X, WANG J H, et al. Estimation, intervention and interaction of multi-agent systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(11): 1796 – 1804.
- [6] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [7] MING C F, HAI T Z, WANG M M. Bipartite flocking for multi-agent systems [J]. *Communication Nonlinear Science Numer Simulat*, 2014, 19(9): 3313 – 3322.
- [8] MARIA ELENA VALCHERA, PRADEEP MISRA. On the consensus and bipartite consensus in high-order multi-agent dynamical systems with antagonistic interactions [J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 66(3): 94 – 103.
- [9] 余宏旺, 郑毓蕃. 多智能体系统在分布式采样控制下的动力学行为 [J]. 自动化学报, 2012, 38(3): 357 – 365.
(YU Hongwang, ZHENG Yufan. Dynamic behavior of multi-agent systems with distributed sampled control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(3): 357 – 365.)
- [10] REN W. Consensus tracking under directed interaction topologies: algorithms and experiments [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(1): 230 – 237.
- [11] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950 – 955.
- [12] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [13] SUN Y G, WANG L. Consensus of multi-agent systems indirected networks with nonuniform time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1607 – 1613.
- [14] HUANG Q Z. Consensus analysis of multi-agent discrete-time systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(7): 1127 – 1133.
- [15] 严卫生, 李俊兵, 王银涛. 受损多智能体系统的信息一致性 [J]. 自动化学报, 2012, 38(11): 1880 – 1884.
(YAN Weisheng, LI Junbing, WANG Yintao. Consensus for damaged multi-agent system [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(11): 1880 – 1884.)

作者简介:

袁玩贵 (1974–), 男, 讲师, 博士研究生, 研究方向为多智能体系统一致性分析, E-mail: ywg_602@163.com;

屈百达 (1956–), 男, 博士生导师, 研究方向为先进控制理论与技术, E-mail: qbd518@aliyun.com.