

## 带有状态约束的双摆效应吊车轨迹规划

孙宁, 方勇纯<sup>†</sup>, 钱彧哲

(南开大学 机器人与信息自动化研究所, 天津 300071; 南开大学 天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300071)

**摘要:** 对于欠驱动吊车而言, 已有方法大都将负载摆动视为单摆进行处理. 然而当吊钩质量相比负载质量不可忽略或负载体积较大时, 负载会绕吊钩产生二级摆动, 出现双摆效应, 使系统的摆动特性更为复杂, 欠驱动度更高, 其控制更具挑战性; 此外, 现有方法均无法保证系统的暂态控制性能. 针对这些问题, 本文提出了一种基于轨迹规划的消摆定位控制方法. 具体而言, 本方法所规划的台车轨迹具有解析表达式, 且充分考虑系统安全性(摆动幅值)及台车运动的物理约束; 通过构造新颖的平坦输出信号, 将施加在台车运动和两级摆动上的约束/指标转化为对平坦输出的约束, 从而将轨迹规划转化为凸优化问题. 该方法能够保证整个过程中系统两级摆动的角度、角速度, 台车的速度、加速度、加加速度均保持在设定范围内. 通过与已有方法进行仿真对比, 可见本方法不仅简单易行, 且在工作效率与摆动抑制方面均具有更为良好的控制性能.

**关键词:** 吊车; 双摆效应; 轨迹规划; 状态约束

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Motion planning for cranes with double pendulum effects subject to state constraints

SUN Ning, FANG Yong-chun<sup>†</sup>, QIAN Yu-zhe

(Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300071, China;  
Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics, Nankai University, Tianjin 300071, China)

**Abstract:** For underactuated cranes, most existing methods treat the payload swing as that of a simple pendulum. However, when the hook mass is not negligible compared with the payload mass or the payload size is large, the payload will rotate around the hook, which exhibits double-pendulum effects and complicates the swing dynamics. Consequently, an extra underactuation degree appears, making the control problem much more challenging. Additionally, currently available approaches cannot guarantee the desired transient control performance. To deal with these problems, a trajectory planning-based control method is presented. Specifically, the planned trajectory has an analytical expression and takes full account of the system safety and physical constraints. An elaborate differential flat output signal is created, and the constraints/indices imposed on the trolley motion and payload swing are equivalently transformed to some new constraints on the flat output, which converts the trajectory planning task into a convex optimization problem. The proposed method ensures the swing angles/angular velocities and the trolley velocity/acceleration/jerk to be always within prescribed bounds. Simulation results show that, in comparison with existing methods, the proposed approach is convenient for implementing and achieving superior control performance in terms of both working efficiency and swing suppression.

**Key words:** cranes; double pendulum effects; motion planning; state constraints

### 1 引言(Introduction)

对于桥式吊车系统而言, 其工作效率在很大程度上受制于负载的摆动, 尤其是当台车到达目标点后停止运行时负载的残余摆动. 大幅摆动将增大负载与工作空间中其他货物甚至工作人员发生碰撞的可能性, 造成安全隐患. 同时, 残余摆动的存在给操作人员的落吊操作带来了较大的困难, 而在自然情况下(如空气阻力的作用下), 负载摆动的衰减往往需要很长的时

间, 严重降低了系统的工作效率. 当负载质量集中且远大于吊钩质量时, 其摆动主要呈现单摆特性(即单级摆动). 此时, 操作人员可依靠长期积累的经验, 通过控制台车的运动对负载的摆动加以抑制. 但人工操作的方式不仅效率低下、定位精度差, 还易发生误操作, 造成安全事故. 此外, 当吊钩质量相比负载质量不可忽略, 或负载不能视为质点时, 负载与吊钩之间会产生相对摆动, 呈现出复杂的两级摆动特性, 即双摆效

收稿日期: 2014-1-20; 录用日期: 2014-04-28.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: yfang@robot.nankai.edu.cn; Tel.: +86 22-23505706.

基金项目: “十二五”国家科技支撑计划课题资助项目(2013BAF07B03); 国家自然科学基金资助项目(11372144); 国家杰出青年基金资助项目(61325017).

应. 在这种情况下, 人工操作的方式将更难取得良好的控制效果.

已有的绝大多数研究工作都将负载看作质点而仅考虑其单级摆动. 对于单级摆动而言, 系统的固有频率单一且仅与吊绳长度有关. 基于此, 研究人员提出了许多研究方法, 主要包括最优控制<sup>[1-2]</sup>、轨迹规划<sup>[3-8]</sup>等基于吊车线性化模型的方法, 无源性控制<sup>[9]</sup>、输出反馈控制<sup>[10]</sup>、有限时间控制<sup>[11]</sup>、切换控制<sup>[12]</sup>、自适应控制<sup>[13]</sup>、滑模控制<sup>[14-16]</sup>、重置控制<sup>[17]</sup>等非线性控制方法, 以及模糊控制<sup>[18-20]</sup>、神经网络<sup>[21]</sup>等智能控制方法. 经分析与验证, 这些方法在单级摆动吊车上能取得良好的控制效果.

如前所述, 在很多情况下, 吊车系统在工作时会呈现出两级摆动特性. 一些常见的情形如下: 1) 搬运的货物质量较轻, 与吊钩质量在数量级方面接近; 2) 负载因尺寸较大、质量分布不均匀(如机翼、钢板等)而不能看作理想质点进行处理. 在出现双摆效应时, 吊车系统有两个不同的固有频率, 不仅与吊绳长度有关, 还取决于负载质量、吊钩质量以及负载重心与吊钩重心之间的距离, 导致摆动特性非常复杂, 极大地增加了其动态性能分析与控制器设计的难度. 在这些情况下, 上述针对单级摆动吊车系统设计的控制方法的性能将大打折扣. 针对具有两级摆动效应的吊车系统, 文献[22-24]通过将控制命令与特定脉冲信号进行卷积整形, 实现消摆控制的目标. 文献[25]通过分析吊车系统的无源性, 设计了一种基于能量的控制方法. Tuan等<sup>[26]</sup>则将台车运动与两级摆动耦合在一个滑模面中, 并在此基础之上提出了一种滑模消摆定位控制策略.

另一方面, 考虑到系统的工作效率与安全性, 台车应尽可能快速准确地将负载搬运至目标位置, 同时在整个过程中使负载摆动的幅值保持在合理的范围内, 且当台车停止运行后应无残余摆动. 此外, 鉴于驱动电机的执行能力, 台车的最大速度/加速度/加加速度(jerk, 加速度的导数)<sup>1</sup>均应保持在一定范围内. 而已有方法在控制过程中均无法在理论上保证这些约束条件.

基于上述问题, 本文将针对具有双摆效应的欠驱动吊车系统, 提出一种具有解析表达式的消摆轨迹规划方法. 该方法不仅简单易行, 而且能够充分保证摆角及台车运动的物理约束. 具体而言, 由于系统的欠驱动特性, 无法直接为不可驱动的两级摆动(吊钩摆动及负载绕吊钩的摆动)进行轨迹规划以满足上述摆角约束. 为此, 本文通过充分地分析台车运动与两级摆动之间的耦合关系, 构造了一种新颖的微分平坦输

出(differential flat output)信号, 将两级摆动与台车运行速度/加速度/加加速度等信号表示为该平坦输出及其不同阶导数的组合, 从而将施加在两级摆动与台车运动上的约束条件等效转化为对平坦输出的约束, 进而将轨迹参数求解转化为凸优化问题. 通过与已有方法进行仿真对比可知, 本文方法能在保证上述约束条件的前提下, 取得更为良好的控制效果.

本文的剩余部分组织如下: 第2节将给出具有两级摆动特性的吊车系统模型, 并详细阐述本文要解决的问题; 第3节将给出轨迹规划及分析的具体过程; 第4节将进行仿真与分析, 并与已有方法进行对比; 第5节将对全文工作进行总结与展望.

## 2 问题描述(Problem statement)

具有双摆效应的桥式吊车模型如图1所示, 其动态特性可用如下方程描述:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 + m_2)l_1(\cos\theta_1\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1^2\sin\theta_1) + m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 - m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 = F, \quad (1)$$

$$(m_1 + m_2)l_1\cos\theta_1\ddot{x} + (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0, \quad (2)$$

$$m_2l_2\cos\theta_2\ddot{x} + m_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2gl_2\sin\theta_2 = 0, \quad (3)$$

式中:  $x(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 分别表示台车位移、吊钩摆角(第1级摆角)以及负载绕吊钩的摆角(第2级摆角);  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ 分别表示台车、吊钩及负载的质量;  $l_1$ ,  $l_2$ 分别表示吊绳长度及负载重心到吊钩重心的距离;  $F(t)$ 表示作用在台车上的驱动力.

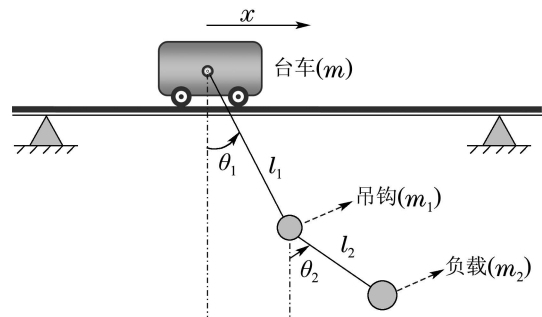


图1 具有双摆效应的吊车模型示意图

Fig. 1 Schematic illustration for the crane model with double-pendulum effects

对式(2)两边除以 $(m_1 + m_2)l_1$ , 同时对式(3)两边除以 $m_2l_2$ , 并整理可得

<sup>1</sup>加加速度反应了加速度的变化率, 其取值较大时, 不仅会导致规划的轨迹难以被跟踪, 还易激发系统震荡.

$$\cos \theta_1 \ddot{x} + l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + g \sin \theta_1 = 0, \quad (4)$$

$$\cos \theta_2 \ddot{x} + l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 = 0. \quad (5)$$

方程(4)–(5)描述了台车运动 $x(t)$ 与系统的两级摆动 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 之间的动态耦合关系, 即台车的运动会使系统的两级摆动产生何种影响. 对于全驱动机电系统而言, 如机器人关节的控制, 可方便地为每个关节的运动规划合理的轨迹, 且能在兼顾各种物理约束, 如最大速度、最大加速度等的同时, 实现高精度、平滑的控制效果. 然而, 由于双摆吊车系统的强欠驱动特性, 仅能为台车进行运动规划, 而无法直接为两级摆动 $\theta_1(t)$ 与 $\theta_2(t)$ 进行规划; 因此, 在对台车运行轨迹进行规划时, 必须充分利用耦合关系(4)–(5), 使 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 满足相应的约束, 实现定位与消摆的双重控制任务.

考虑到实际吊车系统的安全性、工作效率及物理约束, 本文将针对具有双摆效应的欠驱动吊车系统规划一条具有解析表达式的台车轨迹, 具体要实现的控制目标如下.

1) 台车在时间 $T$ 内到达并停止在目标位置 $p_d$ 处, 且在整个运行过程中, 台车最大速度、加速度及加加速度应始终保持在允许的范围内, 即

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0, \quad (6)$$

$$x(T) = p_d, \dot{x}(T) = \ddot{x}(T) = x^{(3)}(T) = 0, \quad (7)$$

$$|\dot{x}(t)| \leq v_{\max}, |\ddot{x}(t)| \leq a_{\max}, |x^{(3)}(t)| \leq j_{\max}, \quad (8)$$

式中 $v_{\max}$ ,  $a_{\max}$ ,  $j_{\max} \in \mathbb{R}^+$ 分别表示由执行器的能力所决定的台车最大速度/加速度/加加速度上限值.

2) 在整个运行过程中, 吊车系统的两级摆动 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 及其角速度 $\dot{\theta}_1(t)$ ,  $\dot{\theta}_2(t)$ 始终保持在合理的范围内, 且当台车到达目标位置后无残余摆动, 即

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0, \quad (9)$$

$$\theta_1(T) = \theta_2(T) = 0, \dot{\theta}_1(T) = \dot{\theta}_2(T) = 0, \quad (10)$$

$$|\theta_1(t)| \leq \theta_{1\max}, |\theta_2(t)| \leq \theta_{2\max}, \quad (11)$$

$$|\dot{\theta}_1(t)| \leq \omega_{1\max}, |\dot{\theta}_2(t)| \leq \omega_{2\max}, \quad (12)$$

其中 $\theta_{1\max}$ ,  $\theta_{2\max}$ ,  $\omega_{1\max}$ ,  $\omega_{2\max} \in \mathbb{R}^+$ 分别为系统的两级摆动 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 及相应角速度 $\dot{\theta}_1(t)$ ,  $\dot{\theta}_2(t)$ 的幅值上限.

### 3 主要结果(Main results)

本节将详述轨迹规划的过程. 具体而言, 首先通过坐标变换, 构造一个新颖的平坦输出信号, 将台车运

动与两级摆动用其不同阶导数(之和)表示, 从而将约束条件等效转化为对平坦输出的约束; 随后规划一条多项式轨迹, 根据约束条件, 利用二分法对轨迹参数进行优化求解.

#### 3.1 模型变换(Model transformation)

在吊车的工作过程中, 负载的大幅摆动不仅能带来安全隐患, 还会降低系统的工作效率. 因此, 在实际应用中应使吊车系统的两级摆动 $\theta_{1\max}$ ,  $\theta_{2\max}$ 保持在5度以内,  $\omega_{1\max}$ ,  $\omega_{2\max}$ 也应在较小的范围内变化. 在这种情况下,  $\cos \theta_i \simeq 1$ ,  $\cos(\theta_1 - \theta_2) \simeq 1$ ,  $\sin \theta_i \simeq \theta_i$ ,  $\sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_i^2 \simeq 0$ ,  $i = 1, 2$ . 相应地, 系统的运动学方程(4)–(5)可改写如下<sup>2</sup>:

$$\ddot{x} + l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \ddot{\theta}_2 + g \theta_1 = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{x} + l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 + g \theta_2 = 0. \quad (14)$$

联立式(13)与(14)并进行整理, 可得

$$\frac{m_1 l_2}{m_1 + m_2} \ddot{\theta}_2 + g(\theta_2 - \theta_1) = 0. \quad (15)$$

此外, 由图1知, 负载的水平位移信号可表示为 $x_p(t) \triangleq x(t) + l_1 \sin \theta_1(t) + l_2 \sin \theta_2(t)$ . 考虑到上述近似关系, 在此定义如下信号 $\chi_p(t)$ :

$$\chi_p \triangleq x + l_1 \theta_1 + l_2 \theta_2. \quad (16)$$

结合式(14)(16)知

$$\theta_2 = -\frac{1}{g} \ddot{\chi}_p \implies \dot{\theta}_2 = -\frac{1}{g} \dot{\chi}_p^{(3)}, \ddot{\theta}_2 = -\frac{1}{g} \chi_p^{(4)}. \quad (17)$$

将式(17)的结论代入式(15)并整理, 可以得出

$$\theta_1 = -\frac{1}{g} \ddot{\chi}_p - \frac{m_1 l_2}{(m_1 + m_2)g^2} \chi_p^{(4)}, \quad (18)$$

进一步有

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{1}{g} \dot{\chi}_p^{(3)} - \frac{m_1 l_2}{(m_1 + m_2)g^2} \chi_p^{(5)}. \quad (19)$$

把式(17)及(18)的结论代入式(16), 可将 $x(t)$ 表示为如下形式:

$$x = \chi_p + \frac{l_1 + l_2}{g} \ddot{\chi}_p + \frac{m_1 l_1 l_2}{(m_1 + m_2)g^2} \chi_p^{(4)}. \quad (20)$$

进一步可得

$$x^{(i)} = \chi_p^{(i)} + \frac{l_1 + l_2}{g} \chi_p^{(i+2)} + \frac{m_1 l_1 l_2}{(m_1 + m_2)g^2} \chi_p^{(4+i)}, \quad (21)$$

式中上标 $(i)$  ( $i = 1, 2, 3$ )表示 $x(t)$ 关于时间的第 $i$ 阶导数.

从式(17)–(21)可以看出, 所有系统状态均可以表示为 $\chi_p(t)$ 及其不同阶导数的代数和形式. 因此以 $\chi_p(t)$ 为输出, 由式(13)–(15)组成的吊车运动学系统

<sup>2</sup>随后的轨迹规划可保证系统的两级摆动 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 及其角速度 $\dot{\theta}_1(t)$ ,  $\dot{\theta}_2(t)$ 保持在式(11)–(12)所示范围内.

是微分平坦的<sup>[27]</sup>,  $\chi_p(t)$ 则为相应的平坦输出. 接下来, 将通过规划 $\chi_p(t)$ 来实现前面所述的控制目标(6)–(12), 将施加在台车运动 $x(t)$ 及两级摆动 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 上的约束等价地转化为对 $\chi_p(t)$ 的约束, 进而降低轨迹规划的复杂度.

### 3.2 轨迹规划(Trajectory planning)

选取 $\chi_p(t)$ 为如下的15次多项式曲线<sup>3</sup>:

$$\chi_p(t) = p_d(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{15} \alpha_i \tau^i) \triangleq p_d[\alpha_0 + \sum_{i=1}^{15} \alpha_i (\frac{t}{T})^i], \quad (22)$$

其中:  $0 \leq t \leq T$ ,  $\tau = t/T$ 为归一化的时间量, 易知

$$\dot{\tau}^i = \frac{i}{T} (\frac{t}{T})^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 15. \quad (23)$$

将式(17)–(21)代入式(6)–(12), 可将施加在 $x(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 及其导数上的约束转化为如下关于 $\chi_p(t)$ 及其导数的约束条件:

$$\begin{cases} \chi_p^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 7, \\ \chi_p^{(j)}(T) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7, \\ \chi_p(T) = p_d; \\ \left| \dot{\chi}_p + \frac{l_1+l_2}{g} \chi_p^{(3)} + \frac{m_1 l_1 l_2}{(m_1+m_2)g^2} \chi_p^{(5)} \right| \leq v_{\max}, \\ \left| \ddot{\chi}_p + \frac{l_1+l_2}{g} \chi_p^{(4)} + \frac{m_1 l_1 l_2}{(m_1+m_2)g^2} \chi_p^{(6)} \right| \leq a_{\max}, \\ \left| \chi_p^{(3)} + \frac{l_1+l_2}{g} \chi_p^{(5)} + \frac{m_1 l_1 l_2}{(m_1+m_2)g^2} \chi_p^{(7)} \right| \leq j_{\max}, \\ \left| -\frac{1}{g} \dot{\chi}_p - \frac{m_1 l_2}{(m_1+m_2)g^2} \chi_p^{(4)} \right| \leq \theta_{1 \max}, \\ \left| -\frac{1}{g} \ddot{\chi}_p \right| \leq \theta_{2 \max}, \\ \left| -\frac{1}{g} \chi_p^{(3)} - \frac{m_1 l_2}{(m_1+m_2)g^2} \chi_p^{(5)} \right| \leq \omega_{1 \max}, \\ \left| -\frac{1}{g} \chi_p^{(3)} \right| \leq \omega_{2 \max}. \end{cases} \quad (24)$$

利用式(23), 计算式(22)所示 $\chi_p(t)$ 关于 $t$ 的前7阶导数, 并代入式(24)中第1行所示的初始条件, 经整理可求得

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_7 = 0. \quad (26)$$

在此基础上,  $\chi_p(t)$ 的表达式变为

$$\chi_p(t) = p_d \sum_{i=8}^{15} \alpha_i \tau^i. \quad (27)$$

相应地,  $\chi_p(t)$ 关于时间 $t$ 的前7阶导数的表达式如下:

$$\chi_p^{(r)} = p_d \sum_{i=8}^{15} \alpha_i \frac{i!}{(i-r)!} (\frac{1}{T})^r \tau^{i-r}, \quad (28)$$

其中 $r = 1, 2, \dots, 7$ . 类似地, 将式(24)中第2, 3行所

述的约束代入式(28)并整理, 可得一个关于 $\alpha_8, \alpha_9, \dots, \alpha_{15}$ 的八元一次线性方程组. 求解该方程组, 可得式(22)中 $\alpha_8, \alpha_9, \dots, \alpha_{15}$ 如下:

$$\begin{cases} \alpha_8 = 6435, \quad \alpha_9 = -40040, \quad \alpha_{10} = 108108, \\ \alpha_{11} = -163800, \quad \alpha_{12} = 150150, \quad \alpha_{13} = -83160, \\ \alpha_{14} = 25740, \quad \alpha_{15} = -3432. \end{cases} \quad (29)$$

在求得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{15}$ 的值后, 对于式(22)所示轨迹 $\chi_p(t)$ , 还需确定 $T$ 以完成整个轨迹规划过程. 接下来通过调节 $T$ , 使所规划的轨迹满足式(25)中的不等式约束. 另一方面, 考虑到 $T$ 为台车的运行时间, 为提高整个系统的工作效率, 应使 $T$ 尽可能小. 此外, 易知式(25)中不等式约束均为凸约束. 因此, 参数 $T$ 的选取可归结为如下凸优化问题:

$$\min T, \text{ s.t. 式(25)}. \quad (30)$$

对于式(30)所示的凸优化问题, 在此利用二分法进行求解, 具体求解算法如算法1中的伪代码所示, 其中:  $T_l, T_u \in \mathbb{R}^+$ 分别表示待优化参数 $T$ 的下限值与上限值;  $\varepsilon$ 为优化容许误差, 作为优化结束的判断标准, 可根据实际需要设定;  $v_{\max}, a_{\max}, j_{\max}, \theta_{1 \max}, \theta_{2 \max}, \omega_{1 \max}, \omega_{2 \max}$ 为式(25)中所定义的状态上限值;  $T^*$ 为满足式(25)中约束的参数 $T$ 的最优值.

#### 算法 1 凸优化问题(30)的求解算法.

Input:  $T_l, T_u, v_{\max}, a_{\max}, j_{\max}, \theta_{1 \max}, \theta_{2 \max}, \omega_{1 \max}, \omega_{2 \max}$

Output:  $T^*$

repeat

  set  $T_m = (T_l + T_u)/2$

  if the constraints in (25) are satisfied then

$T_u \leftarrow T_m$

  else {the constraints in (25) are not satisfied}

$T_l \leftarrow T_m$

  end if

until  $|T_u - T_l| \leq \varepsilon$

$T^* \leftarrow T_m$

将上述计算得到的 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{15}$ 值及优化所得的 $T^*$ 代入式(20), 可得最终的规划轨迹为

$$x = \begin{cases} \chi_p + \frac{l_1+l_2}{g} \ddot{\chi}_p + \frac{m_1 l_1 l_2}{(m_1+m_2)g^2} \chi_p^{(4)}, & t \in [0, T^*], \\ p_d, & t > T^*. \end{cases} \quad (31)$$

至此, 整个轨迹规划过程完成.

<sup>3</sup>值得说明的是,  $\chi_p(t)$ 的选择并不唯一, 可选用其他形式的轨迹, 如三角多项式轨迹等.

**注1** 离线轨迹规划方法(包括本文方法)所面临的一个共同难题是它们难以有效应对不可预知的外界干扰<sup>[3-5,7-8]</sup>. 对于受干扰影响的吊车系统,可将它们与反馈跟踪控制器,如比例-微分(proportional derivative, PD)控制器相结合,提高控制系统的鲁棒性.

**注2** 由于已经得到了 $\alpha_0 \sim \alpha_{15}$ 的取值(参见式(26)与(29)),从式(31)可知,还有2个须确定的参数,即 $p_d$ 与 $T^*$ .  $p_d$ 可直接根据目标位置设定, $T^*$ 则须通过算法1获取. 由于规划的轨迹表达式解析,且式(25)所示的不等式约束均较简单,算法1所示算法具有较高的运行效率.

表1 性能指标

Table 1 Performance indices

控制方法	$p_d$	$v_{\max}$	$a_{\max}$	$j_{\max}$	$\theta_{1\max}$	$\theta_{2\max}$	$\omega_{1\max}$	$\omega_{2\max}$
本文方法	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
对比方法 <sup>[25]</sup>	✓	✓	×	×	×	×	×	×

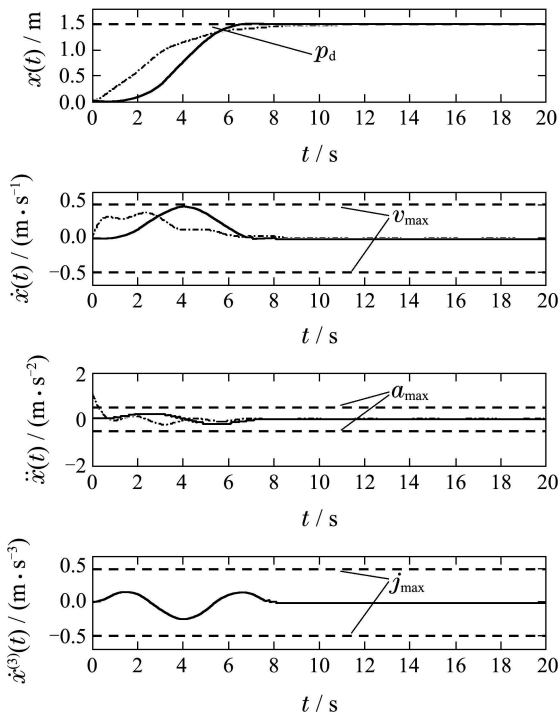
4 仿真与分析(Simulation and analysis)

本节将通过数值仿真验证所提方法的有效性,并与文献[25]中的无源性控制方法进行对比分析. 在仿真中,吊车参数设置如下:

$$\begin{cases} m = 20 \text{ kg}, m_1 = 5 \text{ kg}, m_2 = 5 \text{ kg}, \\ l_1 = 2 \text{ m}, l_2 = 0.2 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2. \end{cases} \quad (32)$$

台车目标位置及系统状态的约束取为

$$\begin{cases} p_d = 1.5 \text{ m}, v_{\max} = 0.5 \text{ m/s}, a_{\max} = 0.5 \text{ m/s}^2, \\ j_{\max} = 0.5 \text{ m/s}^3, \theta_{1\max} = \theta_{2\max} = 2^\circ, \\ \omega_{1\max} = \omega_{2\max} = 5^\circ/\text{s}. \end{cases} \quad (33)$$



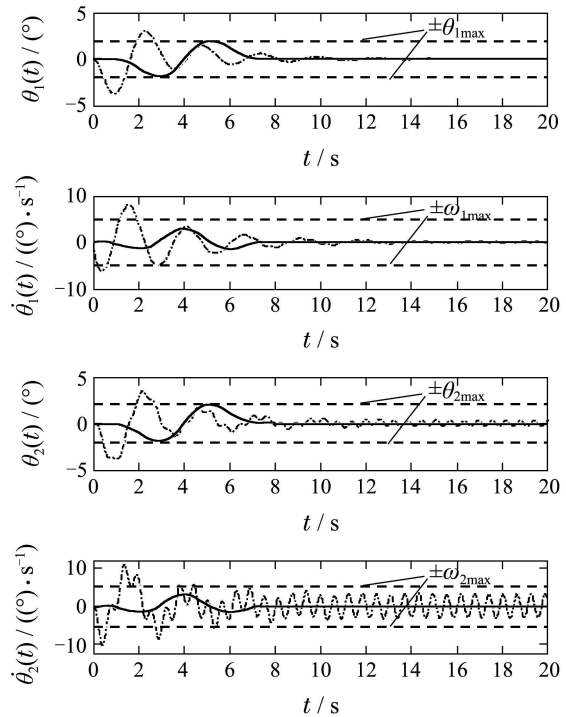
— 本文方法 --- 对比方法<sup>[25]</sup> - - - 状态约束

图2 台车运动 $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$ 及 $x^{(3)}(t)$

Fig. 2 Trolley motion  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$  and  $x^{(3)}(t)$

对于本文方法,算法1的参数选取为 $\varepsilon =$

0.0005 s,  $T_1 = 0$  s,  $T_u = 40$  s. 根据约束条件(33),经优化可得 $T^* = 8.1360$  s; 在处理器为Intel i5-2300 (2.8 GHz), 内存为4 GB, 操作系统为Windows 7 (64位), MATLAB版本为R2008a的运行环境中,整体的耗时约为1.71 s. 将 $T^*$ 的值及式(26)(29)所示的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{15}$ 值代入式(31)可得最终规划的台车轨迹. 对于文献[25]提出的无源控制方法,其控制参数选为 $k_p = 15$ ,  $k = 43.5$ ,限于篇幅,在此略去该控制器的具体表达式.



— 本文方法 --- 对比方法<sup>[25]</sup> - - - 状态约束

图3 两级摆动 $\theta_1(t)$ ,  $\dot{\theta}_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 及 $\dot{\theta}_2(t)$

Fig. 3 Double pendulum swing  $\theta_1(t)$ ,  $\dot{\theta}_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $\dot{\theta}_2(t)$

相应的仿真结果如图2与图3所示,实线与点划线分别表示本文方法与文献[25]中方法对应的控制效果,虚线则表示各状态的约束条件;由于对比方法对应的台车加加速度在 $t = 0$ 时的取值为无穷大,

在图2中未给出其曲线. 此外, 表1对两种方法是否满足状态约束条件的情况进行了统计, 其中: “√”表示满足该约束/指标, “×”则表示不满足; 以 $a_{\max}$ 为例, 表1中的统计信息表明本文方法保证了整个过程中的台车加速度幅值始终保持在 $a_{\max}$ 以内, 而对比方法<sup>[25]</sup>则未能满足该约束, 如图2所示.

从图2与图3所示的结果及表1中的信息可知, 本文方法能在保证所有状态约束条件的前提下, 实现台车的快速、准确定位, 并充分抑制与消除系统的两级摆动, 与理论分析保持完全一致; 相比之下, 文献[25]中的无源控制方法则无法保证绝大多数的约束条件, 在实际吊车系统中, 受限于驱动电机的最大转速等约束, 台车能提供的最大运行速度/加速度是有限的, 而文献中已有方法均仅假设台车能达到所需的任意速度/加速度值(只要不发散), 极有可能会饱和, 从而使控制效果恶化.

接下来比较两种方法在消摆与定位方面的控制性能. 对比图2与图3中两者的曲线可知, 本文方法能更快地将台车定位到目标位置处, 其两级摆动 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ 的最大幅值分别为对比方法<sup>[25]</sup>相应摆角的51%和52%. 此外, 由图3还可看出, 对于本文方法, 当台车到达目标位置后, 无任何残余摆动; 相比之下, 文献[25]的无源控制方法则有着明显的残余摆动, 降低了系统工作效率. 综上所述, 本文方法在定位、摆角抑制方面均能取得更为良好的控制效果.

**注3** 本文方法适用于驱动电机工作在不同模式下的吊车系统. 对于驱动电机工作在速度控制模式下的吊车系统, 该方法规划的(速度)轨迹可直接用作输入信号; 而对于驱动电机工作于力矩控制模式的吊车系统, 本文所规划的轨迹光滑易跟踪, 可使用常规的PD控制器使台车跟踪规划的轨迹, 将位移/速度信号转化为相应的力矩信号<sup>[5,7]</sup>.

## 5 结论(Conclusions)

针对具有复杂双摆效应的欠驱动桥式吊车系统, 本文提出了一种解析轨迹规划方法, 不仅能实现台车定位与摆动抑制的双重控制目标, 还能保证系统状态满足实际物理约束, 且简单易行, 具有良好的应用前景. 具体而言, 根据台车运动与两级摆动之间的耦合关系, 构造了一个平坦输出信号, 利用其不同阶导数表示系统的状态量, 将台车定位与负载摆动抑制的控制目标与物理约束等效转化为作用于平坦输出的凸约束, 进而将轨迹规划问题转化为凸优化问题. 通过数值仿真与已有控制方法进行了比较, 结果表明本文方法能取得更为良好的控制效果. 在后续的工作中, 笔者将改进现有的桥式吊车实验

平台, 在台车下方加装相机, 借助视觉来无接触地获取负载的水平位置信息, 进而通过几何关系计算得到负载的第二级摆动, 以进一步对所提方法的效果进行实验验证. 在条件成熟时, 将把本文方法应用于目前正在和天津起重设备有限公司合作研发的大型工业自动吊车系统.

## 参考文献(References):

- [1] DA CRUZ J J, LEONARDI F. Minimum-time anti-swing motion planning of cranes using linear programming [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2013, 34(2): 191 – 201.
- [2] 刘熔洁, 李世华. 桥式吊车系统的伪谱最优控制设计 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(8): 981 – 989. (LIU Rongjie, LI Shihua. Optimal control design for an overhead crane system using pseudospectral method [J]. *Control Theory and Applications*, 2013, 30(8): 981 – 989.)
- [3] UCHIYAMA N, OUYANG H, SANO S. Simple rotary crane dynamics modeling and open-loop control for residual load sway suppression by only horizontal boom motion [J]. *Mechatronics*, 2013, 23(8): 1223 – 1236.
- [4] SORENSEN K, SINGHOSE W. Command-induced vibration analysis using input shaping principles [J]. *Automatica*, 2008, 44(9): 2392 – 2397.
- [5] SUN N, FANG Y, ZHANG Y, et al. A novel kinematic coupling-based trajectory planning method for overhead cranes [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2012, 17(1): 166 – 173.
- [6] SUN N, FANG Y. An efficient online trajectory generating method for underactuated crane systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, in press, DOI: 10.1002/mc.2953.
- [7] SUN N, FANG Y, ZHANG X, et al. Transportation task-oriented trajectory planning for underactuated overhead cranes using geometric analysis [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(10): 1410 – 1423.
- [8] XIE X, HUANG J, LIANG Z. Vibration reduction for flexible systems by command smoothing [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 39(1/2): 461 – 470.
- [9] SUN N, FANG Y. New energy analytical results for the regulation of underactuated overhead cranes: An end-effector motion-based approach [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 59(12): 4723 – 4734.
- [10] SUN N, FANG Y, ZHANG X. Energy coupling output feedback control of 4-DOF underactuated cranes with saturated inputs [J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1318 – 1325.
- [11] LIU R, LI S, DING S. Nested saturation control for overhead crane systems [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2012, 34(7): 862 – 875.
- [12] 翟军勇, 费树岷. 集装箱桥吊防摆切换控制研究 [J]. *电机与控制学报*, 2009, 13(6): 933 – 936. (ZHAI Junyong, FEI Shumin. Anti-swing switching control for overhead containers [J]. *Electric Machines and Control*, 2009, 13(6): 933 – 936.)
- [13] YANG J H, YANG K S. Adaptive coupling control for overhead crane systems [J]. *Mechatronics*, 2007, 17(2): 143 – 152.
- [14] WANG W, YI J, ZHAO D, et al. Design of a stable sliding mode controller for a class of second-order underactuated systems [J]. *IEE Control Theory and Applications*, 2004, 151(6): 683 – 690.
- [15] 王伟, 易建强, 赵冬斌, 等. 一类非确定欠驱动系统的串级模糊滑模控制 [J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(1): 53 – 59. (WANG Wei, YI Jianqiang, ZHAO Dongbin, et al. Cascade fuzzy

- sliding mode control for a class of uncertain underactuated systems [J]. *Control Theory and Applications*, 2006, 23(1): 53 – 59.)
- [16] 徐攀, 徐为民, 褚建新. 双起升桥吊双吊具同步协调控制 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(10): 1300 – 1308.  
(XU Pan, XU Weimin, CHU Jianxin. Synchronous control of double-container in overhead crane system [J]. *Control Theory and Applications*, 2013, 30(10): 1300 – 1308.)
- [17] SUN N, FANG Y, SUN X, et al. An energy exchanging and dropping-based model-free output feedback crane control method [J]. *Mechatronics*, 2013, 23(6): 549 – 558.
- [18] ZHAO Y, GAO H. Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(1): 181 – 186.
- [19] CHANG C Y, LIE H W. Real-time visual tracking and measurement to control fast dynamics of overhead cranes [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 59(3): 1640 – 1649.
- [20] YU W, MORENO-ARMENDARIZ M A, RODRIGUEZ F O. Stable adaptive compensation with fuzzy CMAC for an overhead crane [J]. *Information Sciences*, 2011, 181(21): 4895 – 4907.
- [21] LEE L H, HUANG P H, SHIH Y C, et al. Parallel neural network combined with sliding mode control in overhead crane control system [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2014, 20(5): 749 – 760.
- [22] SINGHOSE W, KIM D. Manipulation with tower cranes exhibiting double-pendulum oscillations [C] // *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Roma, Italy: IEEE, 2007: 4550 – 4555.
- [23] VAUGHAN J, KIM D, SINGHOSE W. Control of tower cranes with double-pendulum payload dynamics [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(6): 1345 – 1358.
- [24] MASOUD Z, ALHAZZA K, ABU-NADA E, et al. A hybrid command – shaper for double-pendulum overhead cranes [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2014, 20(1): 24 – 37.
- [25] 郭卫平, 刘殿通. 二级摆型吊车系统动态及基于无源的控制 [J]. *系统仿真学报*, 2008, 20(18): 4945 – 4948.  
(GUO Weiping, LIU Diantong. Double-pendulum-type crane dynamics and passivity based control [J]. *Journal of System Simulation*, 2008, 20(18): 4945 – 4948.)
- [26] TUAN L A, LEE S G. Sliding mode controls of double-pendulum crane systems [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2013, 27(6): 1863 – 1873.
- [27] ROUCHON P, FLIESS M, LÉVINE J, et al. Flatness, motion planning and trailer systems [C] // *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. San Antonio, Texas: IEEE, 1993: 2700 – 2705.

### 作者简介:

孙宁 (1988–), 男, 第19届(2013年)《关肇直奖》获提名奖论文作者, 讲师, 目前研究方向为欠驱动机电系统的先进控制、轨迹规划等, E-mail: sunn@robot.nankai.edu.cn;

方勇纯 (1973–), 男, 教授, 博士生导师, IEEB高级会员, 主要研究方向为非线性控制、机器人视觉伺服、无人机及桥式吊车等欠驱动系统控制, E-mail: yfang@robot.nankai.edu.cn;

钱彧哲 (1991–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为欠驱动船用吊车系统控制, E-mail: qianyz@robot.nankai.edu.cn.