

考虑铰间间隙和重力影响的空间机械臂轨迹跟踪控制

刘福才^{1†}, 侯甜甜¹, 秦利¹, 冯伟波²

(1. 燕山大学 工业计算机控制工程河北省重点实验室, 河北 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学 河北省并联机器人与机电系统实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 以在轨服务高精度操控任务为背景, 研究了铰间间隙和重力对空间机械臂末端轨迹跟踪精度的耦合影响, 并设计了间隙补偿控制器. 通过分析不同重力环境下含铰间间隙机构的运动特性, 基于铰间间隙的Kelvin-Voigt线性弹簧阻尼假设, 建立了地面装调及空间服役两种不同工况下的近似间隙等效模型. 以二自由度空间机械臂为例, 利用牛顿欧拉法推导了重力及重力释放条件下的含间隙机械臂动力学模型, 并分离出了间隙补偿项. 最后, 通过轨迹跟踪控制仿真研究, 给出了含间隙机械臂在不同重力环境下的动力学行为差异, 同时验证了间隙补偿控制器的有效性.

关键词: 铰间间隙; 重力; 间隙补偿; 空间机械臂; 牛顿-欧拉

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Trajectory tracking control of space manipulator considering joint clearance and gravity

LIU Fu-cai^{1†}, HOU Tian-tian¹, QIN Li¹, FENG Wei-bo²

(1. Key Lab of Industrial Computer Control of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China;

2. Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: Taking the on-orbit servicing high precision manipulation task as background, we investigate the coupling effect of joint clearance and gravity on the accuracy of trajectory tracking for space manipulator, and design the clearance compensation controller. By analyzing the motion characteristics about mechanism with joint clearance under different gravity environments, we build approximate clearance equivalent models for ground alignment as well as for space applications, on the basis of Kelvin-Voigt linear spring damping assumption. Taking a two degree-of-freedom (DOF) manipulator as an example, we use Newton-Euler method to derive the dynamic model of space manipulator with joint clearance in the gravity and gravity release conditions, and isolate the clearance compensation. Through the simulation studies of trajectory tracking control, the differences between the dynamic behaviors of space manipulator in different gravity environments are explored and the effectiveness of the clearance compensation controller is demonstrated.

Key words: joint clearance; gravity; clearance compensation; space manipulator; Newton-Euler

1 引言(Introduction)

随着空间探索的不断深入, 人们对空间机械臂精度的要求也越来越高, 铰间间隙引起的空间机构动力学非线性特性逐渐成为关注焦点. 铰间间隙一方面不可避免地存在于各活动铰接处, 使实际机构与理想机构的运动发生偏离, 降低了机构运动精度^[1]; 另一方面在机构运行过程中, 运动副元素之间的相互摩擦、磨损及碰撞, 尤其是间隙与重力等元素产生耦合影响时, 将会给机构建模和控制器设计带来极大的困难.

针对铰间间隙的研究, 人们最早关注的是铰间间隙的存在对机构运动精度的影响. 如文献[2-4]从运动学的角度出发, 通过坐标计算, 分析了关节间隙对末端位置重复定位精度的影响. 文献[5-6]分别通过区间分析方法和冗余约束的方法减少间隙对机械臂轨迹跟踪精度的影响. 然而随着对机构精度的要求不断提高, 人们逐渐发现相对于运动学的影响, 间隙的存在对机构动力学性能的影响更加严重. 针对这一问题, 大量的学者进行了间隙等效模型的建立^[7-10], 并以此为基础进而研究了间隙对机构动力学性能的影响. 文

收稿日期: 2014-05-06; 录用日期: 2015-02-02.

[†]通信作者. E-mail: lfc@ysu.edu.cn; Tel.: +86 13930301628.

国家高技术研究发展计划项目(863计划2012AA), 河北省自然科学基金(F2015203362)资助.

Supported by National High Technology Research and Development Program of China China (863 2012AA) and Natural Science Foundation of Hebei Province (F2015203362).

献[11]采用虚功原理的方法对含铰间间隙的机构进行分析;文献[12]基于轨迹规划提出了一种改进的旋转和球形关节分离准则以避免机械手的关节间隙元素分离的新方法;文献[13]提出了包括空间机构间隙接触非线性动力学分析设计、在轨运行机构稳定性分析等待解决的若干含间隙空间机构动力学关键问题.文献[14-16]分别研究了考虑润滑、柔性和摩擦的含铰间间隙机构的动力学行为.现有研究中主要分析间隙对机构运动性能的影响,整体呈现从运动学误差到动力学性能再到与机构柔性、磨损、润滑耦合的发展趋势,但均未从控制角度进行分析和研究.尤其是针对不同重力环境下含间隙机构的控制器设计研究较少.

众所周知,所有空间机构都是在地面装调,空间应用的.空间机构由地面到空间,由于间隙的存在使机构动力学模型和运动学模型发生了变化从而导致地面模拟调试好的控制器在空间难以达到期望的控制精度.人们也渐渐注意到这一问题,文献[17]就指出无重力与有重力环境时含间隙可展机构动力学行为有较大地差别,重力作用使间隙铰内碰撞减弱.为了保证在地面试验中可靠地预测在太空展开性能,可展机构在地面试验时应采取重力补偿措施.文献[18]只是研究了重力对空间机构轨迹跟踪精度的影响,并没有考虑间隙的影响.因此,对于含铰间间隙的空间机械臂,不同重力环境下间隙对其末端轨迹到底有哪些影响,如何通过控制方法消除这些影响,这是本文所要解决的关键问题.

本文以空间二自由度机械臂为例,结合现有相关研究结论,以Kelvin-Voigt线性弹簧阻尼模型为基础,建立了简化的含铰间间隙的二自由度机械臂动力学模型,分析了铰间间隙和重力的耦合作用对机械臂轨迹跟踪以及驱动力的影响,并且设计了一种间隙补偿控制器以减小或消除铰间间隙和重力的耦合作用对机械臂产生的影响.

2 不同重力环境下间隙等效模型分析(Analysis of clearance equivalent model in different gravity environments)

弹簧阻尼模型就是用一组弹簧阻尼系统代替接触区复杂变形的近似方程.将含间隙处理为弹簧阻尼等效模型可将含间隙机构转化为完全约束模型,容易处理多间隙耦合情况.弹簧阻尼元件在便于分析的同时可考虑接触面的碰撞变形及受力情况,更适合间隙引起的控制器补偿项的分析与设计.

等效弹簧阻尼模型假定两体的碰撞为点接触,碰撞力的大小取决于等效弹簧的刚度特性和阻尼特性,该模型虽然是一种近似分析的方法,但它使用起来简单方便,并且当等效刚度和等效阻尼的参数选择合理的时候,计算的结果也比较准确.其模型如图1所示.

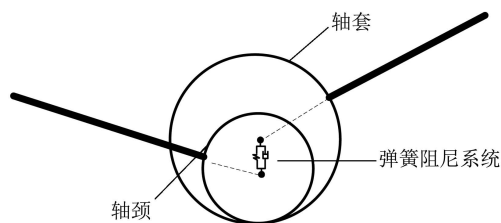


图1 弹簧阻尼模型

Fig. 1 Spring damping model

图2是利用ADAMS软件仿真得到的,考虑含间隙时关节轴颈中心点在不同重力环境下,销轴转速同为1500 rad/min的持续运动轨迹图.

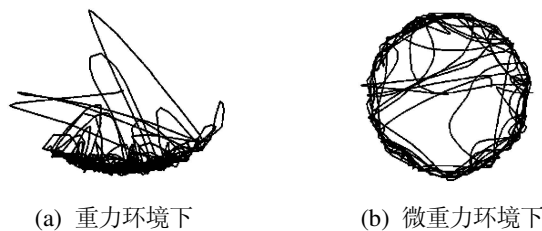


图2 不同重力环境下轴颈中心轨迹图

Fig. 2 The journal center locus in different gravity environments

从图2中可见重力环境下重力项比重大,重力指向作用更加明显,接触力产生点会更加集中于轴套底端,同时由于静态径向间隙与弹性变形值较小,因此可假设接触力产生位置在轴套正下端;微重力环境下,由于重力释放指向作用消失,轴颈基本沿着轴套圆周运动,因此可假设接触力产生位置在轴套圆周上.

以二自由度机械臂为例,考虑关节1为理想关节,关节2为含铰间间隙关节,模拟重力指向作用下机构的运动学变化与受力情况,其等效模型如图3所示.本文中所研究的微重力环境下的二自由度机械臂是以安装在航天器进行服务作业为背景的,即机械臂的底座是固定的,从而模拟微重力环境下机构的运动学变化与受力情况.

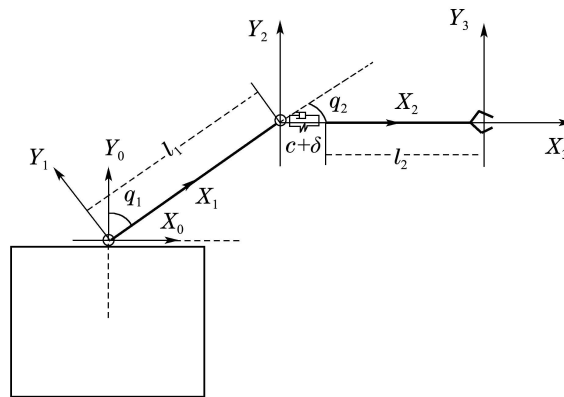


图3 含铰间间隙空间机械臂等效结构示意图

Fig. 3 The equivalent structure diagram of space manipulator with joint clearance

图3中: X_0, Y_0 为基座坐标; X_1, Y_1 为固结在关节1的坐标; X_2, Y_2 为固结在关节2的坐标; X_3, Y_3 为固结机械臂末端的坐标; q_1, q_2 为关节1和关节2的输出关节角; l_1 为连杆1的长度; l_2 为连杆2的长度; c 为关节径向静态间隙, δ 为弹性变形量。

在Kelvin-Voigt线性弹簧阻尼模型中, 接触力定义为 F_c :

$$F_c = u(\delta)(F_n + F_t), \quad (1)$$

$$\begin{cases} F_n = k\delta + b\dot{\delta}, \\ F_t = -\text{sgn } \dot{q}_2 \cdot \mu F_n, \end{cases} \quad (2)$$

其中: F_n 为法向碰撞力, F_t 为切向摩擦力, μ 为接触面摩擦系数, k 是线性化接触刚度系数, b 是阻尼系数, $u(\delta)$ 为阶跃函数, 具体形式如式(3)所示:

$$u(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta \leq 0, \\ 1, & \delta > 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 δ 为接触形变量。为了便于研究, 在模拟含铰间间隙机构的运动特性的基础上本文做以下假设: 由于重力环境下 δ 的变化具有周期性, 可利用轴颈连接杆件与重力方向夹角的相关函数来近似模拟 $\delta_d = |\delta_{\max d} \cdot \cos(q_1 + q_2)|$; 另外, 由于微重力环境下机构的间隙具有高度随机性, 近似模拟变化规律为 $\delta_k = \delta_{\max k}$ 。

3 含间隙二自由度机械臂分析与建模(Analysis and modeling of the 2-DOF manipulator with clearance)

3.1 不同重力环境下二自由度机械臂运动学分析(Kinematics analysis of 2-DOF manipulator in different gravity environments)

根据图3所示含等效间隙结构, 当给定轨迹(x_d, y_d)已知时, 关节角度 q_{d1}, q_{d2} 可通过几何关系求得, 逆运动学方程如下所示:

$$q_{d2} = -\arccos((x_d^2 + y_d^2 - (l_1^2 + l_2'^2))/2l_1l_2'), \quad (4)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arctan(x_d/y_d), & y_d \geq 0, \\ \pi + \arctan(x_d/y_d), & y_d < 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\beta = \arccos((x_d^2 + y_d^2 + l_1^2 - l_2'^2)/2l_1\sqrt{x_d^2 + y_d^2}), \quad (6)$$

$$q_{d1} = \beta - \alpha, \quad (7)$$

其中: $l_2' = l_2 + c + \delta$ 表示杆件2长度在考虑间隙情况下的变化量, c 为关节径向静态间隙, δ 为上节所述的弹性变形量。微重力环境下 δ 取 $\delta_k = \delta_{\max k}$, 重力环境下, δ 取 $\delta_d = |\delta_{\max d} \cos(q_1 + q_2)|$ 。

3.2 不同重力环境下二自由度机械臂动力学分析(Dynamics analysis of 2-DOF manipulator in different gravity environments)

将间隙等效模型中产生的弹簧阻尼接触碰撞力看

作系统中各连杆所受的外力, 使用牛顿-欧拉的建模方法建立不同重力环境下含间隙的二自由度机械臂动力学模型。

首先从基座到连杆末端向外递推各连杆的速度和加速度, 计算出各连杆的惯性力和力矩:

$$\begin{cases} {}^{i+1}f_{ci+1} = m_{i+1} {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}, \\ {}^{i+1}n_{ci+1} = {}^{i+1}w_{i+1} \times ({}^{ci+1}I_{i+1} {}^{i+1}w_{i+1}) + {}^{ci+1}I_{i+1} {}^{i+1}\dot{w}_{i+1}. \end{cases} \quad (8)$$

然后, 从连杆末端到基座向内递推计算关节驱动力和力矩:

$$\begin{cases} {}^i f_i = {}_{i+1}^i R {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i f_{ci}, \\ {}^i n_i = {}_{i+1}^i R {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i n_{ci} + {}^i r_{ci} \times {}^i f_{ci} + {}^i p_{i+1} \times {}_{i+1}^i R {}^{i+1} f_{i+1}, \\ \tau_i = {}^i n_i^T {}^i Z_i, \end{cases} \quad (9)$$

其中: ${}^{i+1}v_{i+1}, {}^{i+1}w_{i+1}$ 分别为连杆 $i+1$ 的线速度和角速度; ${}^{i+1}\dot{v}_{i+1}, {}^{i+1}\dot{w}_{i+1}$ 分别为连杆 $i+1$ 的线加速度和角加速度; ${}^{i+1}f_{ci+1}, {}^{i+1}n_{ci+1}$ 分别为作用在连杆 $i+1$ 上的外力合矢量和外力矩合矢量; ${}^{ci+1}I_{i+1}$ 为连杆 $i+1$ 相对质心的惯性张量; ${}^{i+1}f_{i+1}$ 为连杆 i 作用在连杆 $i+1$ 上的力; ${}^{i+1}n_{i+1}$ 为连杆 i 作用在连杆 $i+1$ 上的力矩; ${}_{i+1}^i R$ 为坐标系 $i+1$ 向坐标系 i 的旋转变换矩阵; ${}^i p_{i+1}$ 为坐标系 $i+1$ 原点对于 i 的位置矢量; ${}^i r_{ci}$ 为连杆 i 的质心矢径。

基于图3含铰间间隙空间机械臂等效结构示意图建立了动力学模型, 假定图3所示的二自由度机械臂的质量分布特别简单, 两连杆的质量集中在连杆的末端, 分别为 m_1, m_3 , 弹簧阻尼元件质量为 $m_2 = 0$, 两连杆的质心矢径为 ${}^1r_{c1} = l_1 X_1$ 和 ${}^2r_{c2} = l_2 X_2$; 相对质心的惯性张量为零 ${}^c I_1 = 0, {}^c I_2 = 0$; 末端执行器自由, 没有力作用, ${}^3 f_3 = 0, {}^3 n_3 = 0$; 基座不转动, ${}^0 w_0 = 0, {}^0 \dot{w}_0 = 0$; 考虑重力作用时, ${}^0 \dot{v}_0 = g Y_0, g$ 为重力加速度。

1) 地面装调阶段。

在重力环境中弹簧阻尼力在坐标 X_2, Y_2 中可表示为

$$\begin{bmatrix} (k\delta_d + b\dot{\delta}_d)(s_{12} + \text{sgn } \dot{q}_2 \cdot \mu c_{12}) \\ (k\delta_d + b\dot{\delta}_d)(c_{12} - \text{sgn } \dot{q}_2 \cdot \mu s_{12}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中: $s_1 = \sin q_1, c_1 = \cos q_1, s_{12}, c_{12}$ 以此类推。

通过使用牛顿欧拉法, 首先通过速度和加速度的计算, 得出各连杆的惯性力和力矩, 然后考虑弹簧阻尼力以及重力的影响, 计算各关节驱动力和力矩。对地面上平面二自由度机械臂进行动力学建模, 通过整理, 最终动力学模型如式(11)所示:

$$H(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_1(q) = \tau, \quad (11)$$

其中: $H(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是平面二自由度机械臂系统的惯

性矩阵, $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是机械臂系统的哥氏力和离心力矩阵, $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 是机械臂系统的重力载荷向量矩阵, $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 为关节角的位移矢量, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 为作用在机械臂上的驱动力矩, $\mathbf{F}_1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 是机械臂系统的间隙向量矩阵. 其中, $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [g_1 \ g_2]^T$ 和 $\mathbf{F}_1(\mathbf{q}) = [f_1 \ f_2]^T$ 依次是

$$\begin{cases} g_1 = m_3 g (l_2 + c + \delta_d) c_{12} + (m_1 + m_3) g l_1 c_1, \\ g_2 = m_3 g (l_2 + c + \delta_d) c_{12}, \\ f_1 = m_3 (c + \delta_k) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) (c + \delta_d + 2l_2) + \\ ((l_2 + c + \delta_d) c_{12} + l_1 c_1) (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) - \\ \text{sgn } \dot{q}_2 \cdot (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) l_1 (s_{12} + \mu s_1) - \\ m_3 l_1 (c + \delta_k) (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1) \ddot{q}_2 s_2 + \\ m_3 l_1 (c + \delta_k) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) c_2, \\ f_2 = - (l_2 + c + \delta_d) (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) \text{sgn } \dot{q}_2 \cdot \mu s_{12} + \\ m_3 (c + \delta_k) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) (2l_2 + c + \delta_d) + \\ m_3 l_1 (c + \delta_k) (\dot{q}_1^2 s_2 + \ddot{q}_1 c_2) + \\ (l_2 + c + \delta_d) (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) c_{12}. \end{cases} \quad (12)$$

2) 空间运行阶段.

在微重力环境中弹簧阻尼力在坐标 X_2, Y_2 中可表示为

$$\begin{bmatrix} (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) (s_{12} + \text{sgn } \dot{q}_2 \cdot \mu c_{12}) \\ (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) (c_{12} - \text{sgn } \dot{q}_2 \cdot \mu s_{12}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

通过牛顿欧拉法对空间中含间隙平面二连杆进行动力学建模, 由于重力加速度和 δ 取值的变化, 最终动力学模型如式(15)所示:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_2(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (15)$$

其中: $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是平面二自由度机械臂系统的惯性矩阵, $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是机械臂系统的哥氏力和离

心力矩阵, $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 为关节角的位移矢量, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 为作用在机械臂上的驱动力矩, $\mathbf{F}_2(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 是机械臂系统的间隙向量矩阵. 获得间隙项 $\mathbf{F}_2(\mathbf{q}) = [f_1 \ f_2]^T$ 为

$$\begin{cases} f_1 = m_3 (c + \delta_k) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) (c + \delta_k + 2l_2) + \\ ((l_2 + c + \delta_k) c_{12} + l_1 c_1) (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) - \\ \text{sgn } \dot{q}_2 \cdot (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) l_1 (s_{12} + \mu s_1) - \\ m_3 l_1 (c + \delta_k) (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1) \ddot{q}_2 s_2 + \\ m_3 l_1 (c + \delta_k) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) c_2, \\ f_2 = - (l_2 + c + \delta_k) (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) \text{sgn } \dot{q}_2 \cdot \mu s_{12} + \\ m_3 (c + \delta_k) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) (2l_2 + c + \delta_k) + \\ m_3 l_1 (c + \delta_k) (\dot{q}_1^2 s_2 + \ddot{q}_1 c_2) + \\ (l_2 + c + \delta_k) (k \delta_k + b \dot{\delta}_k) c_{12}. \end{cases} \quad (16)$$

4 不同重力环境下间隙补偿控制器设计与稳定性分析(Stability analysis and design of clearance compensation controller in different gravity environments)

间隙的存在不仅会导致机械臂产生拓扑结构的时变问题, 另外间隙铰接触碰撞还会导致机构的动力学特性发生变化. 本文针对间隙和重力的存在会引起机械臂动力学模型发生变化的问题, 利用动力学计算中的重力项和间隙项, 即引起的力矩变化, 作为控制系统输入的组成部分, 以实现间隙和重力前馈控制, 来改善系统的动态性能. 另一方面对于间隙产生的拓扑结构的时变问题, 这一问题主要体现在机械臂的运动学正解上. 设定 $\mathbf{Y} = [x \ y]^T$, $\mathbf{Q} = [q_1 \ q_2]^T$, $\mathbf{J}$ 为雅可比矩阵, 则 $\mathbf{Y} = \mathbf{J}\mathbf{Q} + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. 本文将间隙带来的拓扑结构变化项 $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 作为系统的不确定干扰项, 利用PD控制器对干扰进行控制. 系统控制框图如图4所示.

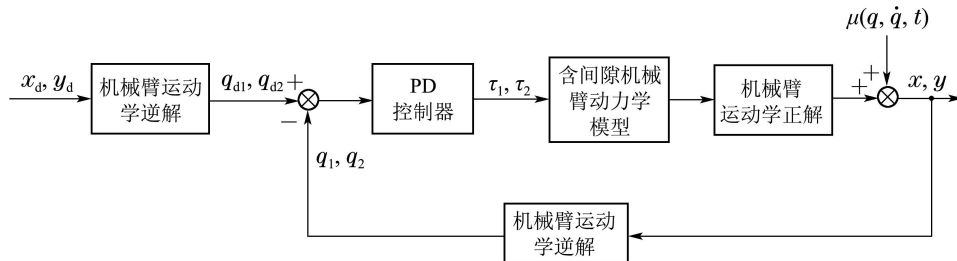


图4 系统控制框图

Fig. 4 The system control diagram

图中: x_d, y_d 是给定的末端轨迹, q_{d1}, q_{d2} 则是由给定轨迹通过运动学逆解求得的给定关节角度, (x, y) 是实际输出的末端轨迹, q_1, q_2 是实际输出的关节角度, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 是间隙带来的拓扑结构变化项, τ_1, τ_2 为控制器输出力矩. 通过PD控制器控制各关

节驱动力矩, 使得机械臂的实际输出轨迹能够跟踪期望给定轨迹^[19].

4.1 控制器设计(Controller design)

本文研究对象为二自由度机械臂, 其地面和空间的动力学模型分别为

$$\tau = H(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + G + F_1, \quad (17)$$

$$\tau = H(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + F_2. \quad (18)$$

分别对不同重力环境下的机械臂设计了控制器, 考虑如下控制律:

1) 地面环境.

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e} + G + F_1, \quad (19)$$

其中: G 为重力项对应的重力补偿项, F_1 为地面机械臂间隙项对应的间隙补偿项.

2) 空间环境.

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e} + F_2, \quad (20)$$

其中 F_2 为空间机械臂间隙项对应的间隙补偿项.

用李雅普诺夫稳定性理论, 判别系统稳定性.

分别对式(17)和式(19)、式(18)和式(20)求差均可得到不同重力环境下系统的闭环方程:

$$H(q)\ddot{e} + B(q, \dot{q})\dot{e} + K_p e + K_d \dot{e} = -d, \quad (21)$$

其中 $d = H(q)\ddot{q}_d + B(q, \dot{q})\dot{q}_d$.

选取李雅普诺夫函数

$$V(e, \dot{e}) = \frac{1}{2} \dot{e}^T H(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e + \alpha \dot{e}^T H(q) f(e), \quad (22)$$

其中: $f(e) = \frac{e}{1 + \|e\|} = \beta e$, $0 < \alpha < 1$.

然后计算 $\dot{V}(e, \dot{e})$, 并将闭环方程代入. 求得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \dot{e}) = & -\dot{e}^T K_d \dot{e} - \alpha f^T(e) K_p e - \alpha f^T(e) K_d \dot{e} + \\ & \alpha \dot{e}^T H(q) \dot{f}(e) + \alpha \dot{e}^T B(q, \dot{q}) f(e) - \\ & (\dot{e}^T + \alpha f^T(e)) d, \end{aligned} \quad (23)$$

因为,

$$d = H(q)\ddot{q}_d + B(q, \dot{q})\dot{q}_d \leq \gamma_1 + \gamma_2 \|\dot{e}\|, \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \sup(\|H(q)\| \|\ddot{q}_d\| + \|B(q, \dot{q})\| \|\dot{q}_d\|), \\ \gamma_2 = & \sup(k_c \|\dot{q}_d\|), \\ \dot{e}^T B(q, \dot{q}) f(e) = & \\ \dot{e}^T B(q, \dot{q}_d + \dot{e}) f(e) \leq & \\ \beta \sup(k_{c1} \|\dot{q}_d\|) \|e\| \|\dot{e}\| + k_{c2} \|\dot{e}\|^2 = & \\ \beta \gamma_3 \|e\| \|\dot{e}\| + \gamma_4 \|\dot{e}\|^2, & \end{aligned} \quad (25)$$

$$\|e\| \|\dot{e}\| \leq \frac{e^2 + \dot{e}^2}{2}, \quad (26)$$

所以,

$$\dot{V}(e, \dot{e}) \leq -(\lambda_{\min}(K_d) - \gamma_5 - \frac{\alpha\beta\gamma_6}{2}) \|\dot{e}\|^2 -$$

$$\alpha\beta(\lambda_{\min}(K_p) - \frac{\gamma_6}{2}) \|e\|^2 +$$

$$\gamma_1 \|\dot{e}\| + \alpha\beta\gamma_1 \|e\|, \quad (27)$$

其中: $\gamma_5 = 2\alpha\beta\lambda_{\max}(H(q)) + \gamma_2 + \alpha\gamma_4$, $\gamma_6 = -\lambda_{\min}(K_d) + \gamma_2 + \gamma_3$.

由不等式定理得

$$\begin{aligned} & -(\lambda_{\min}(K_d) - \gamma_5 - \frac{\alpha\beta\gamma_6}{2}) \|\dot{e}\|^2 + \gamma_1 \|\dot{e}\| \leq \\ & -\frac{1}{4}(\lambda_{\min}(K_d) - \gamma_5 - \frac{\alpha\beta\gamma_6}{2}) \|\dot{e}\|^2 + \\ & \frac{\gamma_1^2}{\lambda_{\min}(K_d) - \gamma_5 - \frac{\alpha\beta\gamma_6}{2}}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & -(\lambda_{\min}(K_p) - \frac{\gamma_6}{2}) \|e\|^2 + \gamma_1 \|e\| \leq \\ & -\frac{1}{4}(\lambda_{\min}(K_p) - \frac{\gamma_6}{2}) \|e\|^2 + \\ & \frac{\gamma_1^2}{\lambda_{\min}(K_p) - \frac{\gamma_6}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

综上,

$$\dot{V}(e, \dot{e}) \leq -\xi_1 \|\dot{e}\|^2 - \xi_2 \|e\|^2 + \eta, \quad (30)$$

由于 α 可取很小的值, 因此总可以找到足够大的 K_p 和 K_d , 以保证 $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, 使得 e 和 $\dot{e}$ 按指数收敛到半径 $r_i (i = 1, 2)$ 的封闭球.

4.2 鲁棒稳定性分析(Robustness stability analysis)

本文将间隙带来的拓扑结构变化项 $\mu(q, \dot{q}, t)$ 作为系统的不确定干扰项, 引入不确定干扰项后, 不同重力环境下机械臂的动力学模型为

$$\begin{aligned} \tau = & H(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + G + F_1 + \\ & \mu(q, \dot{q}, t), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\tau = H(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + F_2 + \mu(q, \dot{q}, t). \quad (32)$$

相应的系统的误差方程即

$$\begin{aligned} H(q)\ddot{e} + B(q, \dot{q})\dot{e} + K_p e + K_d \dot{e} = & \\ H(q)\ddot{q}_d + B(q, \dot{q})\dot{q}_d + \mu(q, \dot{q}, t). \end{aligned} \quad (33)$$

为分析鲁棒性需要以下引理:

引理 1^[20] 对式(17)和式(18)所示的系统, 考虑 PD 控制律时, 如果期望跟踪轨迹的轨迹速度和加速度有界, 则可保证 e 和 $\dot{e}$ 指数收敛到半径为 $r_i (i = 1, 2)$ 的封闭球, 增大 K_p 和 K_d 可以使半径任意小.

对于 $\mu(q, \dot{q}, t)$, 由于间隙的尺寸是一个较小且有界的量, 因此 $\mu(q, \dot{q}, t)$ 可以看作一个有界的不确定项. 假定满足如下约束:

$$\|\mu(q, \dot{q}, t)\| \leq \mu_1 + \mu_2 \|\dot{q}\|, \quad (34)$$

其中 μ_1, μ_2 为正常数.

由于

$$\begin{aligned} \|\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\| &\leq \mu_1 + \mu_2 \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \\ &\mu_1 + \sup(\mu_2 \|\dot{\mathbf{q}}_d\|) + \mu_2 \|\dot{\mathbf{e}}\|, \end{aligned} \quad (35)$$

所以间隙带来的拓扑结构变化项 $\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 满足引理1应用的条件, 所以由引理1可得PD控制能够克服间隙带来的干扰, 并可通过增大 K_p 和 K_d 使干扰产生的轨迹误差任意小.

5 仿真实验研究(The simulation experiment)

为了研究间隙对机械臂轨迹跟踪精度的影响, 在建立的含间隙二自由度机械臂的模型以及控制器的基础上, 运用MATLAB进行仿真研究, 在给定运动轨迹之后, 观察间隙补偿控制器对机械臂末端输出轨迹跟踪精度的控制效果.

空间含间隙二自由度机械臂模型参数如下:

$$\begin{aligned} m_1 &= 4 \text{ kg}, m_2 = 0 \text{ kg}, m_3 = 3 \text{ kg}, l_1 = 1 \text{ m}, \\ l_2 &= 1 \text{ m}, \mu = 0.3, \delta_{\max d} = \delta_{\max k} = 5 \times 10^{-6} \text{ m}, \\ c &= 1 \times 10^{-4} \text{ m}, b = 1750 \text{ N} \cdot \text{m/s}, \\ k &= 6.61 \times 10^7 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

机械臂的末端初始位置 (q_1, q_2) 为 $(0.8, -1.85)$, 期望末端轨迹 (x_d, y_d) 为

$$\begin{cases} x_d = 0.28 \cos \frac{\pi t}{5}, \\ y_d = 0.28 \sin \frac{\pi t}{5} + 0.85. \end{cases} \quad (36)$$

PD控制器参数: $K_p = \text{diag}\{1000, 1000\}$, $K_d = \text{diag}\{250, 250\}$.

1) 未加间隙补偿情况下, 地面和空间二自由度机械臂的轨迹跟踪情况.

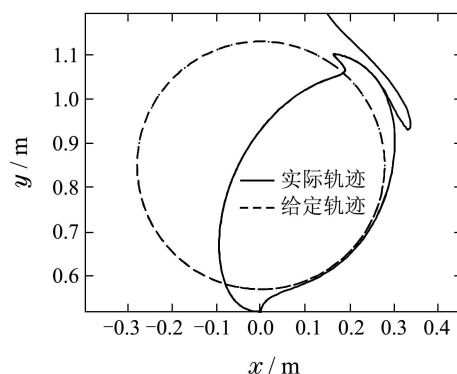
针对不同重力环境下的二自由度机械臂设计不含间隙补偿的PD控制器, 观察间隙的存在对机械臂末端的跟踪精度的影响. 式(37)和式(38)分别为地面和空间的PD控制器. 仿真曲线如图5和图6所示.

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e} + G, \quad (37)$$

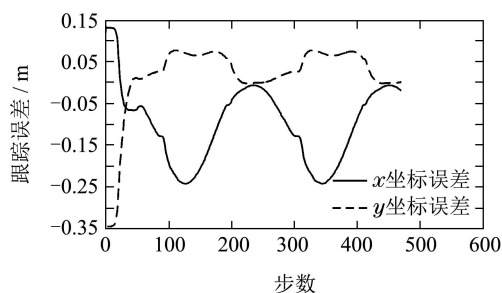
$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e}. \quad (38)$$

由图5-6可以看出: 无论是在地面还是空间中, 由于所设计控制器不含有间隙补偿项, 即未对间隙进行补偿控制时, 可以看出间隙的存在导致机械臂末端的实际输出曲线严重偏离期望给定轨迹. 地面重力环境下, 末端轨迹在X轴和Y轴方向上的偏离误差最大值约为0.24 m和0.07 m; 空间微重力环境下, 末端轨迹在X轴和Y轴方向上的偏离误差最大值约为0.43 m和0.2 m. 可见间隙的存在严重影响了

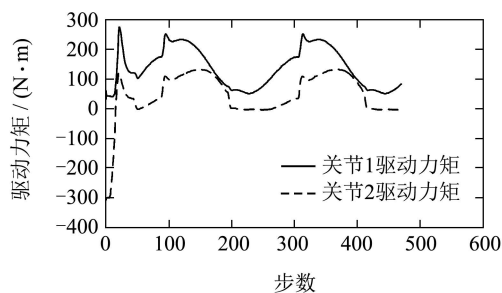
机械臂末端的跟踪精度. 另外由于重力环境不同, 不同重力环境下输出曲线存在一定的差异.



(a) 末端轨迹跟踪



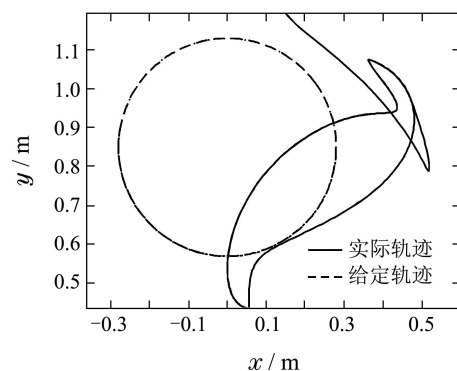
(b) 末端轨迹跟踪误差



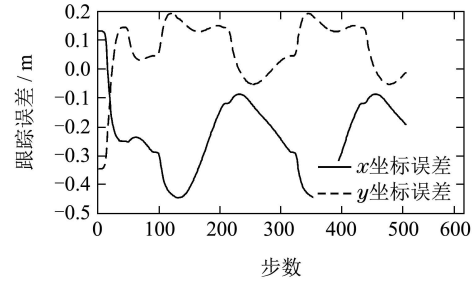
(c) 关节驱动力矩

图5 地面无间隙补偿机械臂仿真结果

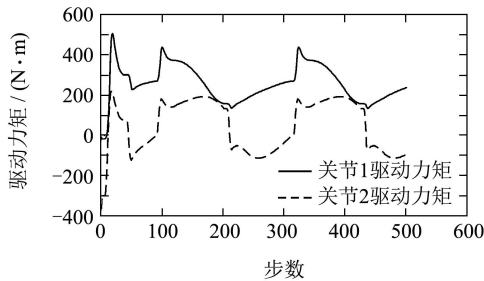
Fig. 5 Simulation results without clearance compensation on the ground



(a) 末端轨迹跟踪



(b) 末端轨迹跟踪误差



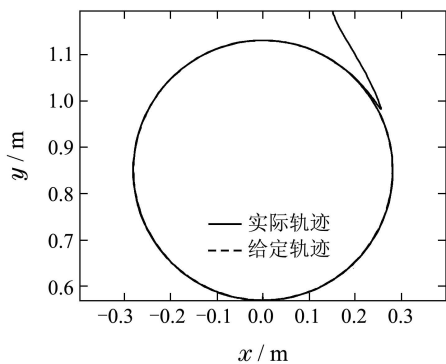
(c) 关节驱动力矩

图6 空间无间隙补偿机械臂仿真结果

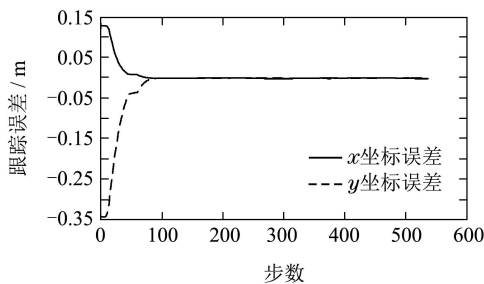
Fig. 6 Simulation results without clearance compensation in space

2) 同一控制器下地面和空间二自由度机械臂的轨迹跟踪情况.

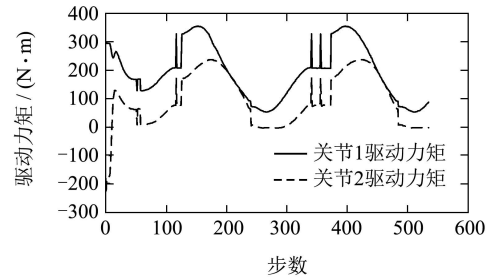
为了讨论在不同重力环境下, 间隙对机械臂动力学行为产生的影响不同, 在同一控制器下观察二自由度机械臂在地面和空间的跟踪情况, 此处的控制器是基于地面二自由度机械臂的动力学模型间隙项设计的含间隙补偿的PD控制器, 如式(19)所示, 从而验证在该控制器下地面和空间二自由度机械臂的轨迹跟踪情况. 仿真曲线如图7和图8所示.



(a) 末端轨迹跟踪



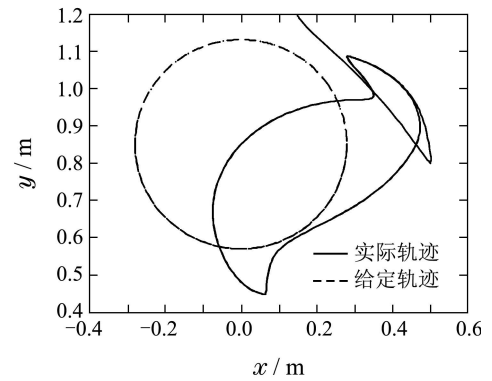
(b) 末端轨迹跟踪误差



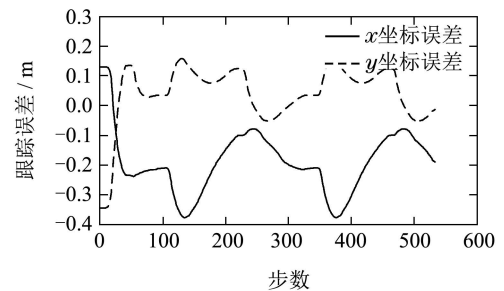
(c) 关节驱动力矩

图7 地面有间隙补偿机械臂仿真结果

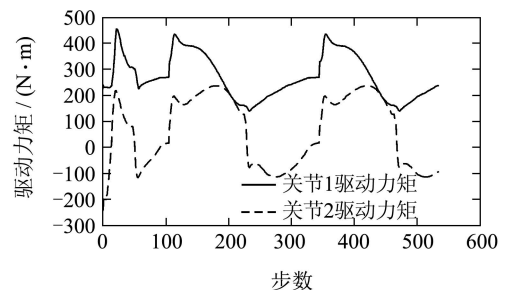
Fig. 7 Simulation results with clearance compensation on the ground



(a) 末端轨迹跟踪



(b) 末端轨迹跟踪误差



(c) 关节驱动力矩

图8 同一控制器下空间有间隙补偿机械臂仿真结果

Fig. 8 Simulation results with the same clearance compensation in space

由图7-8可以看出: 在地面, 由于机械臂动力学模型中的重力项以及间隙项能够与控制器中的重力补偿项和间隙补偿项相互抵消, 使得实际输出轨迹

能够很快跟踪上期望给定轨迹,并且跟踪误差最终收敛到0;但对于空间机械臂模型,在同一控制器下,由于机械臂不受重力的影响,并且动力学模型中间隙项的取值与地面不一样,因此控制器中的重力项和间隙项会对机械臂末端的轨迹跟踪情况产生影响,导致跟踪效果不好。

因此,基于地面间隙补偿项的控制器对地面机械臂的控制效果较好,但不适用于空间二自由度机械臂的轨迹跟踪控制。

3) 不同控制器下空间二自由度机械臂的轨迹跟踪情况。

针对空间二自由度机械臂动力学模型的间隙项以及不含重力项的特点,采用间隙前馈控制来改善系统的动态性能。式(20)为含空间间隙项的PD控制器。仿真曲线如图9所示。

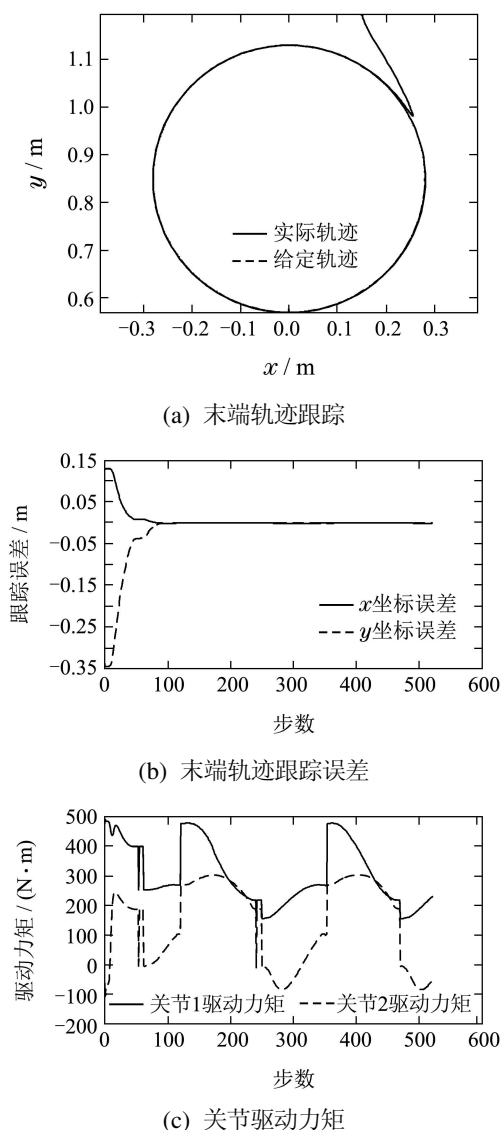


图9 空间有间隙补偿机械臂仿真结果

Fig. 9 Simulation results with clearance compensation in space

由图9可以看出:一方面根据空间机械臂不受重力的影响,在控制器中去掉重力补偿项;另一方面,根据空间机械臂模型中的间隙项对控制器中的间隙补偿项进行调整,使得机械臂末端的实际输出轨迹能够很好地跟踪期望给定轨迹,并且跟踪误差最终收敛到0。即基于空间动力学模型间隙补偿项的控制器对空间机械臂的轨迹跟踪控制效果较好。

6 结论(Conclusions)

本文针对空间二自由度机械臂研究了铰间间隙和重力效应对机械臂末端轨迹跟踪精度的影响,并且提出了一种间隙补偿方法。从仿真结果可以看出,当重力环境改变时,需利用不同的间隙动力学补偿项实现主动补偿控制。关节间隙在不同重力环境下,对机构动力学特性产生的影响是不同的。另外,由仿真曲线可以看出,关节驱动力矩有较大抖动,可以反应出间隙的存在对机构的控制性能产生较大影响。下一步工作主要是对间隙的等效模型进行完善,使其更接近实际模型,进而对两种不同重力环境设计一种自适应间隙补偿控制器。

参考文献(References):

- [1] 田浩, 寇伟, 白争锋. 间隙对平面机构运动特性的影响分析 [J]. 机械设计与制造, 2010, (2): 17-18.
(TIAN Hao, KOU Wei, BAI Zhengfeng. Effects analysis of clearance on kinetic characteristic of plane mechanism [J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2010, (2): 17-18.)
- [2] 黄宇中, 刘文煊, 谢莉. 机器人机构关节间隙对手部位姿误差的影响 [J]. 上海交通大学学报, 1990, 24(1): 48-56.
(HUANG Yuzhong, LIU Wenying, XIE Li. The affection of clearance in joints to the error at end effector of robot [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 1990, 24(1): 48-56.)
- [3] 崔道碧. 关节间隙对机器人末端位姿误差的影响 [J]. 湖南大学学报, 1999, 26(2): 32-36.
(CUI Daobi. Effect of gap of key links on location-posture errors for tip executing apparatus of robot [J]. *Journal of Hunan University*, 1999, 26(2): 32-36.)
- [4] 宋月娥, 吴林, 戴明. 机器人关节间隙误差分析 [J]. 机械工程学报, 2003, 39(4): 11-14.
(SONG Yuee, WU Lin, DAI Ming. Error analysis of robot joint clearance [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2003, 39(4): 11-14.)
- [5] WU W D, RAO S S. Uncertainty analysis and allocation of joint tolerances in robot manipulators based on interval analysis [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92(1): 54-64.
- [6] HUANG T, CHETWYND D G, MEI J P, et al. Tolerance design of a 2-DOF overconstrained translational parallel robot [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, 22(1): 167-172.
- [7] TSAI M J, LAI T H. Kinematic sensitivity analysis of linkage with joint clearance based on transmission quality [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2004, 39(11): 1189-1206.
- [8] 白争锋, 赵阳, 赵志刚. 考虑运动副间隙的机构动态特性研究 [J]. 振动与冲击, 2011, 30(11): 17-20, 41.
(BAI Zhengfeng, ZHAO Yang, ZHAO Zhigang. Dynamic characteristics of mechanisms with joint clearance [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(11): 17-20, 41.)

- [9] 朱巨才, 符炜. 含间隙机构无质量杆-弹簧阻尼组合模型的近似解法[J]. 机械设计, 2004, 21(2): 43–46.
(ZHU Jucai, FU Wei. Approximate solving method on massless-link and spring-damper (MLSD) model of mechanism with clearance [J]. *Journal of Machine Design*, 2004, 21(2): 43–46.)
- [10] 何柏岩, 高峰, 王树新. 计及铰链间隙的机械臂动力学建模与仿真[J]. 天津大学学报, 2005, 38(9): 795–799.
(HE Baiyan, GAO Feng, WANG Shuxin. Modeling and simulation of a mechanical arm with joint clearance [J]. *Journal of Tianjin University*, 2005, 38(9): 795–799.)
- [11] PARENTI-CASTELLI V, VENANZI S. Clearance influence analysis on mechanisms [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2005, 40(12): 1316–1329.
- [12] BU W H, LIU Z Y, TAN J R, et al. Detachment avoidance of joint elements of a robotic manipulator with clearances based on trajectory planning [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(6): 925–940.
- [13] 阎绍泽. 航天器中含间隙机构非线性动力学问题及其研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2004, 2(2): 50–54.
(YAN Shaoze. Development and problems of nonlinear dynamics of the mechanisms with clearances for spacecrafts [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(2): 50–54.)
- [14] FLORES P, AMBRÓSIO J, CLARO J, et al. A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(3): 247–261.
- [15] 阎绍泽, 申永胜, 陈洪彬. 考虑杆件柔性和铰间隙的可展结构动力学数值模拟[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(2): 145–148.
(YAN Shaoze, SHEN Yongsheng, CHEN Hongbin. Dynamic performance of deployable structures with flexible members and clearance connections [J]. *Journal of Tsinghua University (Natural Science Edition)*, 2003, 43(2): 145–148.)
- [16] SHIAU T N, TSAI Y J, TSAI M S. Nonlinear dynamic analysis of a parallel mechanism with consideration of joint effects [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2008, 43(4): 491–505.
- [17] 阎绍泽, 陈鹿民, 季林红, 等. 含间隙铰的机械多体系统动力学模型[J]. 振动工程学报, 2003, 16(3): 36–40.
(YAN Shaoze, CHEN Lumin, JI Linhong, et al. Dynamic modeling of multibody system with clearance joints [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(3): 36–40.)
- [18] 刘福才, 高娟娟, 王芳. 地面装调的空间机械臂在空间应用时的自适应鲁棒控制[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(1): 69–76.
(LIU Fucui, GAO Juanjuan, WANG Fang. Adaptive robust control of space manipulator during both ground alignment and space applications [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(1): 69–76.)
- [19] XU W K, CAI C X, ZOU Y. PD-based trajectory tracking control in automatic cell injection system [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2013, 11(2), 207–214.
- [20] 陈启军, 王月娟, 陈辉堂. 基于PD控制的机器人轨迹跟踪性能研究与比较[J]. 控制与决策, 2003, 18(1): 53–57.
(CHEN Qijun, WANG Yuejuan, CHEN Huitang. Comparative research of trajectory tracking performance of robotic manipulator based on PD control scheme [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(1): 53–57.)

作者简介:

刘福才 (1966–), 男, 博士生导师, 目前研究方向为空间机器人控制技术、模糊辨识与预测控制等, E-mail: lfc@ysu.edu.cn;

侯甜甜 (1990–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为空间机器人控制, E-mail: 923157044@qq.com;

秦利 (1984–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为机器人技术、智能控制, E-mail: ql@ysu.edu.cn;

冯伟波 (1987–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为空间跟瞄机构精度与应用研究, E-mail: weibof@126.com.