

解系统控制问题的递推方法

陈翰馥[†]

(中国科学院 数学与系统科学研究院 系统科学所 系统控制重点实验室, 北京 100190;

中国科学院 国家数学与交叉科学中心, 北京 100190)

摘要: 本文对系统控制及其他领域中的一大类问题, 介绍一种递推解法, 使当数据增加时, 递推解以概率1收敛到真解. 这方法主要以3个步骤来实现: 首先, 把欲解的问题参数化; 然后, 选择适用的递推参数估计算法; 最后, 证明递推估计收敛到笔者想要的值. 文中列举了具体的系统控制问题, 展示如何把它们参数化. 作为递推估计算法, 文中介绍了扩展截尾的随机逼近算法(SAAWET), 给出了它的一般收敛定理. 随后, 以两个系统控制问题, 展示该方法的具体实现, 所附模拟计算实例证实了该方法. 实际上, 这种方法已成功地解决了系统控制及其他相关领域中的一系列问题.

关键词: 系统控制; 递推解法; 随机逼近; 系统辨识; 适应调节

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Recursive approach to solving problems from systems and control

CHEN Han-fu[†]

(Key Laboratory of Systems and Control, Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

National Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: A recursive approach to solving a large class of problems arising from systems and control and other areas is introduced. The essence of the method consists of three steps: First, the problem under consideration is parameterized; Second, an appropriate recursive parameter estimation method is selected; Finally, the recursive estimate is proved to converge to the sought-for value. In the paper, parametrization of two problems from systems and control is demonstrated. To serve as the recursive estimation method, the stochastic approximation algorithm with expanding truncations (SAAWET) is introduced, and its general convergence theorem is presented. Then, the two parameterized problems from system and control are actually solved by the proposed approach. The attached numerical examples have justified the method. As a matter of fact, a series of problems from systems and control and other related areas have successfully been solved by the approach.

Key words: system and control; recursive solution; stochastic approximation; system identification; adaptive regulation

1 引言(Introduction)

Kalman滤波是系统状态估计的方法, 它得到广泛应用的重要原因之一在于它是递推的方式来实现的. 由于上一步的状态估计实际上已包含了过去量测数据对状态估计的全部有用信息, 所以它不要求存贮已有的量测数据. 只要用新的量测数据来修正上一步估计, 就可以得到下一步对状态的估计. 这样, 递推方法减少了存贮, 减少了计算, 用起来很方便. 这便使得笔者考虑用递推方法来求解系统控制中的其他问题.

本文介绍求解系统控制问题的一种递推方法. 这种方法分3步来解相关问题. 第1步, 要把问题参数化, 也就是把系统控制问题转化为参数估计, 同时把待估的参数看成是某一函数的根. 例如, 辨识线性随机系

统时, 要用量测数据估计系统的未知系数、系统的阶以及噪声的协方差阵, 这些都是待估参数. 注意到系统的自回归部分的系数 θ_A 是一个矩阵, 如果系统输出维数为 m , 自回归部分的系统阶数为 p , 那么 θ_A 是一个 $m \times mp$ 阵. 在一些很一般的条件下, θ_A 满足广义的Yule-Walker方程, 它是一个线性代数方程, 所以 θ_A 是一个线性矩阵函数的根. 这个矩阵函数依赖于系统输出的协方差阵, 所以它可以用量测数据估计出来. 这样, θ_A 是可用量测数据估计的函数的根. “参数化”虽是解问题的出发点和基础, 但对不少系统控制问题, “参数化”实际上并不难解决. 第2步, 要选用适当的函数求根的递推算算法来估计参数, 也就是解原来的系统控制问题. 由于被求根的函数不能事先确定, 例如

收稿日期: 2014-08-13; 录用日期: 2014-09-29.

[†]通信作者. E-mail: hfchen@iss.ac.cn; Tel.: +86 10-82541822.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273193, 61120106011, 61134013); 国家重点基础研究计划(“973”计划)资助项目(2014CB845301).

上述Yule-Walker方程的系数依赖于输出协方差阵,只能靠量测数据来估计.所以一般的确定性求根算法并不适用,而经典的Robbin-Monro(RM)算法^[1],由于被它的收敛条件所限,一般不能导致满意的结果,所以采用扩展截尾的随机逼近算法(stochastic approximation algorithm with expanding truncations, SAAWET)^[2-4].在这一步中,涉及到量测量以及核函数之类的选取,但算法本身及其性质已有较多研究.这个方法最关键的是第3步,就是要证明所给出的递推算法确实收敛到系统控制的解,往往要用不同的方法和技巧,去克服困难.

笔者运用上述路径,已解决了不少系统控制问题,在此仅列举部分有关论文,例如:线性随机系统的递推辨识^[5]、非线性系统的递推辨识^[6-11]、变量带误差系统的辨识^[12-13]、随机非线性系统的适应调节^[14]、随机系统的迭代学习控制^[15]、信号处理中的问题^[16-17]、主分量分析^[18]、网络系统中的问题^[19-20]等.所有这些问题的解决都要经过参数化这一步.在第2节中将列举一些问题的参数化方法,在第3节中将介绍SAAWET方法,并列出使算法收敛的条件.在第4节中,以带外源输入的自回归(auto-regression with exogenous input, ARX)系统的辨识、Hammerstein及Wiener系统的适应调节为例,介绍对它们的递推辨识算法,以及使算法收敛的条件,并辅以计算实例,最后是一个简单的结束语.

2 参数化举例(Examples of parametrization)

上面已经提到,有许多系统控制问题可归结为参数估计.下面列举两个系统控制问题,看如何把它们转化为参数估计,并把其中的参数表达为函数的根,该函数又便于用量测数据进行估计.

ARX系统的辨识

要辨识下列多维ARX系统:

$$\begin{aligned} y_k + A_1 y_{k-1} + \cdots + A_p y_{k-p} = \\ B_1 u_{k-1} + \cdots + B_q u_{k-q} + w_k, \end{aligned} \quad (1)$$

这里: $\{u_k\}$, $\{y_k\}$ 分别表示系统的输入和输出, $u_k \in \mathbb{R}^l$, $y_k \in \mathbb{R}^m$, $\{w_k\}$ 是系统噪声.不妨假设 $\{w_k\}$ 为零均值、独立同分布(iid)的随机矢量序列, $E(w_k w_k^T) \triangleq R_w < \infty$. 系统辨识就是利用系统的输入输出数据来估计系统的阶 (p, q) , w_k 的协方差阵 R_w 以及系统的系数阵

$$\theta_A^T \triangleq [A_1 \cdots A_p], \theta_B^T \triangleq [B_1 \cdots B_q]. \quad (2)$$

系统(1)简记为

$$A(z)y_k = B(z)u_k + w_k, \quad zy_k = y_{k-1}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} A(z) = I + A_1 z + \cdots + A_p z^p, \\ B(z) = B_1 z + \cdots + B_q z^q. \end{cases} \quad (4)$$

为简单起见,设系统阶 (p, q) 已知,只讨论对 θ_A , θ_B 及

R_w 的估计.取 $\{u_k\}$ 为零均值, $E(u_k u_k^T) = I$ iid 序列,并且和 $\{w_k\}$ 相互独立.设 $A(z)$ 稳定,即 $\det A(z) \neq 0$, $\forall z: |z| \leq 1$.那么在适当的初始条件下,系统的输出 $\{y_k\}$ 是平稳过程,把它的相关函数记为 $R_i \triangleq E(y_k y_{k-i}^T)$.

对式(1)从右端乘以 y_{k-t}^T , $t \geq q+1$, 并取期望便得

$$\begin{aligned} E(y_k + A_1 y_{k-1} + \cdots + A_p y_{k-p}) y_{k-t}^T = \\ E(B_1 u_{k-1} + \cdots + B_q u_{k-q} + w_k) y_{k-t}^T = 0, \\ \forall t \geq q+1. \end{aligned}$$

由此得

$$\sum_{i=0}^p A_i R_{q-i+s} = 0, \quad \forall s \geq 1, \quad A_0 \triangleq I. \quad (5)$$

记

$$\Gamma \triangleq \begin{bmatrix} R_q & R_{q+1} & \cdots & R_{q+mp-1} \\ R_{q-1} & R_q & \cdots & R_{q+mp-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{q-p+1} & R_{q-p+2} & \cdots & R_{q+(m-1)p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times m^2 p} \quad (6)$$

及

$$W^T \triangleq -[R_{q+1} \ R_{q+2} \ \cdots \ R_{q+mp}]. \quad (7)$$

注意到 $A_0 = I$, 从式(5)就得到Yule-Walker方程

$$[A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_p] \Gamma = -W \text{ 或 } \Gamma \Gamma^T \theta_A - \Gamma W = 0. \quad (8)$$

这说明 θ_A 是线性函数 $g(X) \triangleq \Gamma \Gamma^T X - \Gamma W$ 的根.所以,估计 θ_A 等同于求函数 $g(\cdot)$ 的根.但矩阵 Γ 及 W 不能事先给出.递推地定义

$$R_{i,k} = R_{i,k-1} - \frac{1}{k} (R_{i,k-1} - y_k y_{k-i}^T),$$

从 $\{y_k\}$ 的遍历性知 $R_{i,k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} R_i$. 把对 R_i 的估计 $R_{i,k}$ 代入式(6)-(7)后得到对 Γ 及 W 的估计 Γ_k, W_k . 所以在 k 时刻对未知函数 $g(X)$ 的估计为 $\Gamma_k \Gamma_k^T X - \Gamma_k W_k$. 记 $\theta_{A,k-1}$ 为在 $k-1$ 时刻对 θ_A 的估计,那么对未知函数 $g(\cdot)$ 在 $\theta_{A,k-1}$ 的值的估计为 $\Gamma_k \Gamma_k^T \theta_{A,k-1} - \Gamma_k W_k$. 把它看成在 k 时刻对 $g(\theta_{A,k-1})$ 的量测量 O_k , 那么

$$O_k = g(\theta_{A,k-1}) + \epsilon_k, \quad \epsilon_k = \epsilon_k^{(1)} + \epsilon_k^{(2)}, \quad (9)$$

这里 ϵ_k 为量测误差,

$$\epsilon_k^{(1)} \triangleq (\Gamma_k \Gamma_k^T - \Gamma \Gamma^T) \theta_{A,k-1}, \quad \epsilon_k^{(2)} \triangleq \Gamma W - \Gamma_k W_k.$$

这样,对系统(1)中自回归(auto-regression, AR)部分的系数 θ_A 的辨识转化为了求未知函数 $g(\cdot)$ 的根,而函数 $g(\cdot)$ 又可以用量测数据来估计,从而对 $g(\theta_{A,k-1})$ 得到量测方程(9).

现在来看对 θ_B 的估计.记

$$\eta_{k-1} \triangleq [u_{k-1}^T \ \cdots \ u_{k-1-q}^T]^T,$$

那么 $B(z)u_k = \theta_B^T \eta_{k-1}$. 注意到 $\{u_k\}$ 和 $\{w_k\}$ 独立,

$E(\eta_k \eta_k^T) = I$, 从上式便知

$$E(A(z)y_k \eta_{k-1}^T) = \theta_B^T. \quad (10)$$

所以未知参数 θ_B 也是一个线性函数的根.

利用对 θ_A 已有的估计, 并用 $\{y_k\}, \{\eta_k\}$ 的遍历性 $E(A(z)y_k \eta_{k-1}^T)$ 可以递推地估计出来, 所以根为 θ_B 的线性函数也可以用量测数据来估计.

Hammerstein和Wiener系统的适应调节

考察单输入单输出的Hammerstein和Wiener系统, 系统结构如图1-2所示.

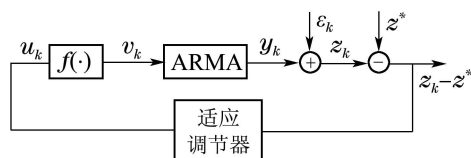


图 1 适应调节Hammerstein系统

Fig. 1 Adaptive regulation of Hammerstein system

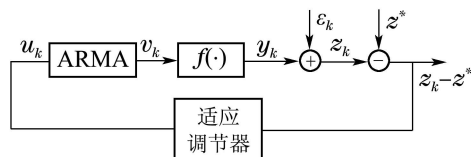


图 2 适应调节Wiener系统

Fig. 2 Adaptive regulation of Wiener system

对Hammerstein系统及Wiener系统中的线性子系统都为ARMA, 分别表达为

$$C(z)y_k = D(z)v_k, \quad C(z)v_k = D(z)u_k, \quad (11)$$

这里后移算符的多项式 $C(z)$ 及 $D(z)$ 为

$$\begin{cases} C(z) = 1 + c_1 z + \cdots + c_p z^p, \\ D(z) = 1 + d_1 z + \cdots + d_q z^q, \quad q < p. \end{cases} \quad (12)$$

系统中 $C(z), D(z)$ 及非线性函数 $f(\cdot)$ 都未知, z_k 是对输出 y_k 的量测, $\{\varepsilon_k\}$ 为量测噪声.

设 z^* 为给定常数. 适应调节问题就是要设计可依赖于 $(z_0, \dots, z_{k-1})$ 的反馈控制 u_k , 极小化跟踪误差:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k - z^*|^2 \text{ a.s.} \quad (13)$$

下面只对Hammerstein系统的适应调节问题参数化, 而对Wiener系统完全类似.

设 $C(z)$ 稳定, $c \triangleq \sum_{i=0}^p c_i \neq 0$, $c_0 \triangleq 1$ 并且量测噪声 $\{\varepsilon_k\}$ 为零均值iid随机变量序列,

$$E(\varepsilon_k^2) < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = R < \infty \text{ a.s.}$$

记 $d \triangleq 1 + d_1 + \cdots + d_q$, 并设 u^0 为函数

$$g(u) \triangleq \frac{d}{c} f(u) - z^* \quad (14)$$

的根.

在Hammerstein系统中设 $u_k \equiv u^0$, 并相应地把 y_k, z_k 记为 y_k^0, z_k^0 .

由于 $C(z)$ 稳定, 从 $C(z)y_k^0 = D(z)f(u^0)$ 知

$$y_k^0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} \frac{d}{c} f(u^0). \quad (15)$$

利用鞅差性质, 对任何反馈控制有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (y_k - z^*) \varepsilon_k &= \\ O\left(\left(\sum_{k=1}^n (y_k - z^*)^2\right)^{\frac{1}{2} + \eta}\right) \text{ a.s. } \forall \eta > 0, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k - z^*|^2 &= \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n (y_k - z^*)^2 (1 + o(1)) \right] + R &\geq R \text{ a.s.} \end{aligned} \quad (16)$$

但用式(15)便知

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k^0 - z^*|^2 &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |o(1) + \varepsilon_k|^2 &= R \text{ a.s.,} \end{aligned} \quad (17)$$

所以最优适应调节控制为常数 u^0 . 因此, 解Hammerstein系统的适应调节问题就是求由式(14)给出的函数的根.

上面仅用两个例子, 说明如何把系统控制问题转化为函数求根.

3 未知函数求根的递推方法 (Recursive methods for seeking roots of unknown function)

因为函数不确定, 诸如梯度法等确定性递推函数求根法这里不适用. 20世纪50年代初Robbins和Monro提出随机逼近算法^[1], 给出了函数(称为回归函数)可带噪声量测时的递推求根算法, 得到很多研究和广泛应用^[21-24]. 这个算法的优点是简单便于计算.

Robbins-Monro(RM)算法

设 $g(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的根为 x^0 , 对 x^0 在 k 时刻的估计为 x_k . 假设在 $k+1$ 时刻对 $g(x_k)$ 的量测为

$$O_{k+1} = g(x_k) + \varepsilon_{k+1}.$$

任意给出初值 x_0 后, RM算法对 x^0 的估计 x_k 递推地更新如下:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + a_k O_{k+1}, \\ a_k &> 0, \quad a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

在一些苛严条件下, x_k 可收敛到 x^0 .

下面列举使RM算法收敛的典型条件:

1) 存在二阶导数有界的 $v(x) > 0, \forall x \neq x^0, v(x^0) = 0$, 使 $v(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} \sup_{\|x-x^0\| > \epsilon} g^T(x)v_x(x) < 0$.

2) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $\|g(x)\|$ 的增长速度不快于线性.

3) $\{\epsilon_k\}$ 是二阶矩有穷的鞅差列, 特例: $\{\epsilon_k\}$ 为零均值相互独立相同分布(iid)序列.

例1 把未知参数 $x^0 \in \mathbb{R}^l$ 看成线性函数的根: $g(x) \triangleq Fx + f, F \in \mathbb{R}^{l \times l}, f \in \mathbb{R}^l$. F 和 f 未知, 但在任意时刻 k 可以得到它们的近似值 F_k 和 f_k .

在 k 时刻, 对 $g(x_k)$ 的量测很自然取 $O_{k+1} \triangleq F_k x_k + f_k$. 这时,

$$O_{k+1} = g(x_k) + \epsilon_{k+1}, \\ \epsilon_{k+1} \triangleq (F_k - F)x_k + f_k - f.$$

设 F 稳定, 根据Lyapunov定理, 存在正定阵 $P > 0$ 使 $F^T P + PF = -I$, 那么可取 $v(x) = (Fx + f)^T P(Fx + f)$, 使条件1)成立.

条件2)显然成立, 但条件3)不易满足, 因为量测噪声 ϵ_{k+1} 不仅依赖上一个估计 x_k , 而且还依赖估计误差 $F_k - F$ 及 $f_k - f$. 显然, 很难指望量测误差有简单的概率性质.

下面的例子说明, 条件2)也很重要.

例2 $f(x) = -(x - 10)^3, a_k = \frac{1}{k+1}$. 很容易计算, 甚至当 $\epsilon_k \equiv 0$ 时, RM算法也发散

$$x_0 = 0, x_1 = -1000, x_2 = 515149400, \dots$$

扩张截尾的随机逼近算法(SAAWET)

下面引进对RM算法的修正, 称它为扩张截尾的随机逼近算法(SAAWET).

设 $\{M_k\}$ 为发散到无穷递增的正数序列, $x^* \in \mathbb{R}^l$ 为一固定点. SAAWET由下列递推式定义:

$$x_{k+1} = (x_k + a_k O_{k+1}) I_{[\|x_k + a_k O_{k+1}\| \leq M_{\sigma_k}]} +$$

$$x^* I_{[\|x_k + a_k O_{k+1}\| > M_{\sigma_k}]},$$

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k-1} I_{[\|x_i + a_i O_{i+1}\| > M_{\sigma_i}]}, \sigma_0 = 0,$$

$$O_{k+1} = g(x_k) + \epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+1} = \epsilon_{k+1}(x_k, \omega), \omega \in \Omega.$$

这里 I_A 表示集合 A 的示性函数, 即 $I_A = 1, \forall \omega \in A; I_A = 0, \forall \omega \notin A$.

要用以下条件:

A1) $a_k > 0, a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ 及 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$, 例如 $a_k = \frac{1}{k}$.

A2) 存在连续可微函数(不一定非负)的函数

$$v(\cdot) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}, v(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} \infty$$

使得对任意 $\epsilon > 0$ 成立

$$\sup_{\|x-x^0\| \geq \epsilon} g^T(x)v_x(x) < 0.$$

A3) $g(\cdot)$ 为可测函数, 且局部有界.

A4) 噪声 ϵ_k 可分解为 $\epsilon_k = \epsilon_k^{(1)} + \epsilon_k^{(2)}$ 使得

$$\epsilon_k^{(1)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \sum_{i=1}^{\infty} a_i \epsilon_{i+1}^{(2)} < \infty.$$

SAAWET的一般收敛定理

设 $\{x_k\}$ 由SAAWET给出, 初值 x_0 任意.

设A1)–A3)成立, 那么, 在A4)成立的样本上, 必有 $\|x_k - x^0\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. 同时, 当 $g(\cdot)$ 在 x^0 处连续时, A4)也是必要的.

定理的证明见文献[2–3].

注1 定理可推广到一般根集 $J \triangleq \{x : g(x) = 0\}$ 的情形.

条件A4)可改为更弱的条件A4'), 一般收敛定理照样成立:

A4') 对所考察的样本 ω 沿着任一收敛子列 $x_{n_k}(\omega)$ 的足标 $\{n_k\}$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\| \sum_{i=n_k}^{m(n_k, T_k)} a_i \epsilon_{i+1}(x_i(\omega), \omega) \right\| = 0, \\ \forall T_k \in [0, T],$$

这里

$$m(k, T) \triangleq \max \{m : \sum_{i=k}^m a_i \leq T\}.$$

若 $\epsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ 或 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \epsilon_{i+1} < \infty$, 则

$$\lim_{T \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\| \sum_{i=k}^{m(k, T_k)} a_i \epsilon_{i+1}(x_i(\omega), \omega) \right\| = 0, \\ \forall T_k \in [0, T],$$

而A4')只要求在 $\{x_k\}$ 的收敛子列上成立上述条件.

注2 条件A4')只要在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 上验证. 这比在整序列上验证要容易得多.

看例1中的噪声 $\epsilon_{k+1} \triangleq (F_k - F)x_k + f_k - f$. 在分析收敛性前, $\{x_k\}$ 的有界性没有保证, 所以即使 $F_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F, (F_k - F)x_k$ 仍可能很坏. 但沿着收敛子列 $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ 当 $F_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F$ 及 $f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ 时, 在系统控制的许多问题中, 往往可以证明下述两点:

- 在 $x_{n_k}, k = 1, 2, \dots$ 的小邻域中, 算法不截尾;
- 在 $x_{n_k}, k = 1, 2, \dots$ 的小邻域中, 尽管不知序列 $\{x_k\}$ 本身是否有界, 但可保证估计值 x_k 之间相互很靠近.

对例1中的噪声

$$\epsilon_{k+1} \triangleq (F_k - F)x_k + f_k - f,$$

有

$$\lim_{T \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\| \sum_{i=n_k}^{m(n_k, T_k)} a_i \epsilon_{i+1} \right\| = \\ \lim_{T \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\| \sum_{i=n_k}^{m(n_k, T_k)} a_i [(F_i - F)(x_i - x_{n_k}) + \right.$$

$$(F_i - F)x_{n_k} + (f_i - f) = 0.$$

对例2,

$$g(x) = -(x - 10)^3, \quad x_0 = 0, \quad a_k = \frac{1}{k},$$

如上面所述, 即使 $\epsilon_k \equiv 0$, RM 算法也很快发散. 但与此不同, 对很大一类 $\{\epsilon_k\}$, 用任意 $x^* > 0$ 及任意递增发散到无穷的 $M_k > 0$, SAAWET 都收敛到 10. 举例说, 设

$$a_k = \frac{1}{k+1}, \quad M_k = 2^{k+1}, \quad x^* = 0.5, \quad x_0 = 0, \\ \epsilon_{k+1} - 0.9\epsilon_k = w_{k+1} + 0.5w_k, \quad w_k \in \mathcal{N}(0, 0.1).$$

由 SAAWET 给出的 x_k 收敛:

$$x_0 = 0, \quad x_{100} = 9.26, \quad x_{400} = 9.61, \dots$$

4 应用 SAAWET 解系统控制问题 (Applying SAAWET to solving problems from systems and control)

在引言中, 笔者已提及, 许多系统控制问题用 SAAWET 都成功地得到递推解法. 为了展示如何把 SAAWET 用于系统控制问题, 下面用它来解决在第 2 节中已参数化了的两个问题, 即 ARX 系统的辨识以及 Hammerstein 和 Wiener 系统的适应调节.

ARX 系统的辨识^[5]

在文献[5]中用 SAAWET 解决了 ARMAX 系统的辨识, 这里重点说明方法本身, 所以把模型简化为 ARX 系统, 也就是把 $C(z)$ 取代为单位阵.

从式(1)–(9)的讨论中, 看出 θ_A 满足 Yule-Walker 方程, 且式(9)给出的 O_k 可作为在 k 时刻对 $g(\theta_{A,k-1})$ 的量测. 根据式(18)写出估计 θ_A 的 SAAWET 算法:

$$\theta_{A,k} = (\theta_{A,k-1} - \frac{1}{k} \Gamma_k (\Gamma_k^T \theta_{A,k-1} - W_k^T)) \cdot \\ I_{[\|\theta_{A,k-1} - \frac{1}{k} \Gamma_k (\Gamma_k^T \theta_{A,k-1} - W_k^T)\| \leq M_{\lambda_k}]}, \quad (19)$$

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{k-1} I_{[\|\theta_{A,i-1} - \frac{1}{i} \Gamma_i (\Gamma_i^T \theta_{A,i-1} - W_i^T)\| > M_{\lambda_i}]}, \quad \lambda_0 = 0. \quad (20)$$

初值 $\Gamma_0 \in \mathbb{R}^{mp \times m^2 p}$, $W_0 \in \mathbb{R}^{m \times m^2 p}$ 及 $\theta_{A,0} \in \mathbb{R}^{mp \times m}$ 为任意.

记

$$\hat{\chi}_k \triangleq y_k + \theta_{A,k}^T \varphi_{k-1}(p) = \\ y_k + A_{1,k}y_{k-1} + \dots + A_{p,k}y_{k-p}, \quad (21)$$

这里 $A_{j,k} (j = 1, \dots, p)$ 是由 $\theta_{A,k}$ 给出的对 A_j 的估计.

利用遍历性, 对 θ_B 的递推估计由下式给出:

$$\theta_{B,k} = \theta_{B,k-1} - \frac{1}{k} (\theta_{B,k-1} - \eta_{k-1} \hat{\chi}_k^T), \quad (22)$$

初值 $\theta_{B,0} \in \mathbb{R}^{l(q+1) \times m}$ 任意. 很明显, $\theta_{B,k}$ 是 $\eta_{j-1} \hat{\chi}_j^T$ 的时间平均.

为了对 R_w 做出估计, 记

$$z_k \triangleq y_k + A_{1,k}y_{k-1} + \dots + A_{p,k}y_{k-p} - \\ B_{1,k}u_{k-1} + \dots + B_{q,k}u_{k-q}.$$

对 R_w 的估计记为 $R_{w,k}$:

$$R_{w,k} = R_{w,k-1} - \frac{1}{k} (R_{w,k-1} - z_k z_k^T). \quad (23)$$

设成立以下条件:

B1) $A(z)$ 稳定, $\{w_k\}$ 是 m -维零均值、相互独立的随机矢量序列, $E(w_k w_k^T) \triangleq R_w > 0$.

B2) $\{u_k\}$ 为零均值, $E(u_k u_k^T) = I$ iid 序列, 并且和 $\{w_k\}$ 相互独立.

B3) $A(z)$ 和 $B(z)B^T(z^{-1}) + R_w$ 没有左公因子, 且 $[A_p : B_q B_0^T]$ 为行满秩.

定理 1 设 B1)–B3) 成立. 由式(19)–(23)定义的 $\theta_{A,k}$, $\theta_{B,k}$ 及 $R_{w,k}$ 强一致:

$$\theta_{A,k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \theta_A, \quad \theta_{B,k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \theta_B, \quad R_{w,k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} R_w \text{ a.s.}$$

证明见文献[3, 5].

数字模拟例 1 用式(19)–(23)给出的算法来估计下列 ARX 系统的系数估计: 设

$$y_k + A_1 y_{k-1} + A_2 y_{k-2} = \\ B_1 u_{k-1} + B_2 u_{k-2} + w_k, \\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

设系统中 $\{u_k\}$ 及 $\{w_k\}$ 均为 iid 序列, $u_k \in \mathcal{N}(0, 1)$, $w_k \in \mathcal{N}(0, R_w)$, $R_w = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

在图3–6中: 实线代表真值, 而点线代表由式(19)–(23)给出估计. 为了比较, 对 A_1, A_2, B_1, B_2 还给出了常规最小二乘估计, 它在图中以虚线标出. 数值计算和理论分析一致.

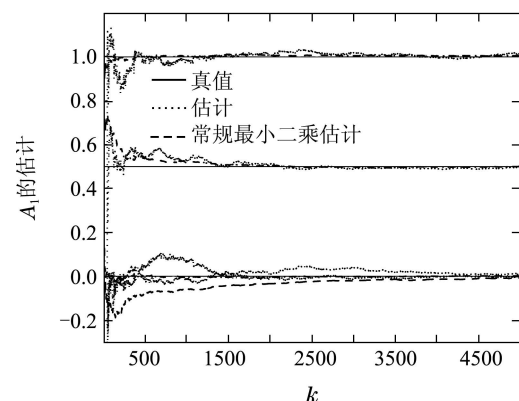
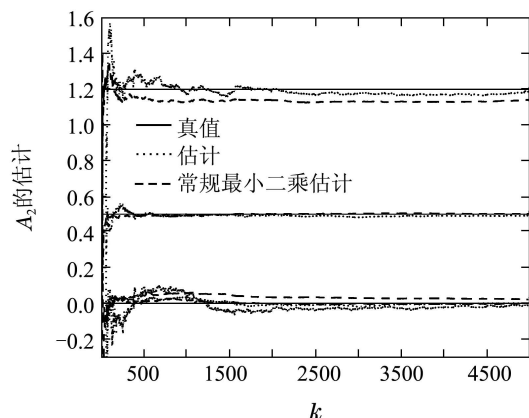
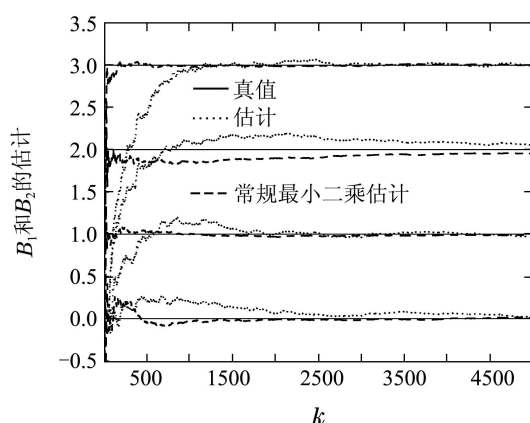
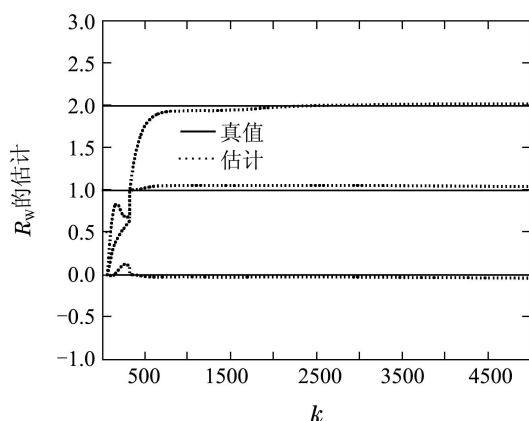


图 3 A_1 的估计

Fig. 3 Estimates of A_1

图4 A_2 的估计Fig. 4 Estimates of A_2 图5 B_1 和 B_2 的估计Fig. 5 Estimates of B_1 and B_2 图6 R_w 的估计Fig. 6 Estimates of R_w

Hammerstein和Wiener系统的适应调节^[4]

在第2节中,从式(14)–(17)知,对Hammerstein系统的最优适应调节控制 u^0 是由式(14)定义的函数 $g(u) \triangleq \frac{d}{c}f(u) - z^*$ 的根。

类似地,对Wiener系统的最优适应调节控制 u^0 是函数 $g(u) \triangleq f(\frac{d}{c}u^0) - z^*$ 的根。

系统输出的量测 z_k 可看成是 $g(u_k)$ 的带误差的量测值,这里 u_k 表示第 k 时对 u^0 的估计。这样,就可用SAAWET写出对 u^0 的递推估计:

$$u_{j+1} = [u_j + a_j(z_j - z^*)]I_{|u_j + a_j(z_j - z^*)| \leq M_{\sigma_j}}, \quad (24)$$

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{j-1} I_{|u_i + a_i(z_i - z^*)| > M_{\sigma_i}}, \quad \sigma_0 = 0, \quad (25)$$

$$a_j = \frac{1}{j}, \quad M_j = j^{\frac{1}{1+\mu}}.$$

设以下条件成立:

$$C1) \quad C(z) \text{ 稳定, } c \triangleq \sum_{i=0}^p c_i \neq 0, \quad c_0 \triangleq 1.$$

C2) 函数 $f(\cdot)$ 连续,且存在已知常数 $\mu > 0$ 使 $|f(u)| = O(|u|^\mu)$ a.s. $|u| \rightarrow \infty$.

C3) 噪声 $\{\varepsilon_k\}$ 为零均值iid序列, $E(\varepsilon_k) = 0$, $\sup_k E(\varepsilon_k^2) < \infty$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = R < \infty \text{ a.s.}$$

定理2 设C1)–C3)成立. 还设由式(14)定义的函数 $g(\cdot)$ 有唯一根 u^0 并存在常数 $c_0 > 0$ 使当 $\frac{d}{c} > 0$ 时,

$$\frac{1}{c_0} \int_{-c_0}^0 f(x) dx > f(u^0) > \frac{1}{c_0} \int_0^{c_0} f(x) dx,$$

而当 $\frac{d}{c} < 0$ 时,

$$\frac{1}{c_0} \int_{-c_0}^0 f(x) dx < f(u^0) < \frac{1}{c_0} \int_0^{c_0} f(x) dx.$$

那么由式(24)–(25)定义的 $\{u_k\}$ 是对Hammerstein系统的最优适应调节控制,即系统在 $\{u_k\}$ 作用下,由式(13)表达的跟踪误差达极小。

对Wiener系统也有类似结果。

定理3 设C1)–C3)成立. 还设函数

$$g(u) \triangleq f\left(\frac{d}{c}u^0\right) - z^*$$

的根 u^0 唯一,并存在常数 $c_0 > 0$ 使

$$\frac{1}{c_0} \int_0^{c_0} f\left(\frac{d}{c}x\right) dx < f\left(\frac{d}{c}u^0\right) < \frac{1}{c_0} \int_{-c_0}^0 f\left(\frac{d}{c}x\right) dx.$$

那么由式(24)–(25)定义的 $\{u_k\}$ 是对Wiener系统的最优适应调节控制,即系统在 $\{u_k\}$ 作用下,由式(13)表达的跟踪误差达极小。

数字模拟例2 设系统中的 $C(z)$ 及 $D(z)$ 如下:

$$C(z) = 1 + 0.75z + 0.6z^2 + 0.45z^3,$$

$$D(z) = 1 - 1.4z - 2.4z^2,$$

那么 $c = 2.8$, $d = -2.8$.

还设

$$f(u) = (u + 1)^3, \epsilon_i \in \mathcal{N}(0, 1).$$

对 Hammerstein 系统设 $z^* = -8$, 而对 Wiener 系统 $z^* = 8$.

最优控制 u^0 对 Hammerstein 和 Wiener 系统分别为 1 及 -1. 在式(24)–(25)中取 $M_j = j^{\frac{1}{4}}$.

图7–10中展示了适应调节控制趋于最优. 在图7, 9中点线表示算法给出的控制, 而实线表示最优控制, 而图8, 10表示系统的输出逐渐趋向理想值 z^* .

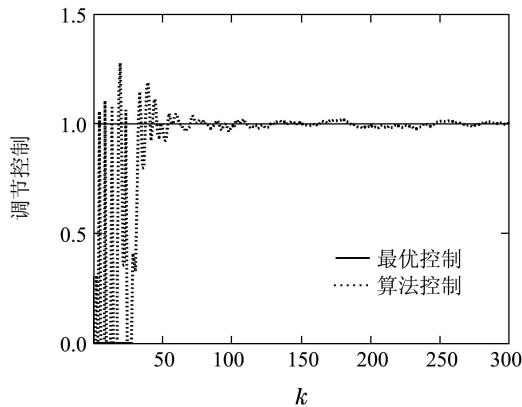


图 7 Hammerstein 系统的适应调节控制

Fig. 7 Adaptive regulation control for Hammerstein system

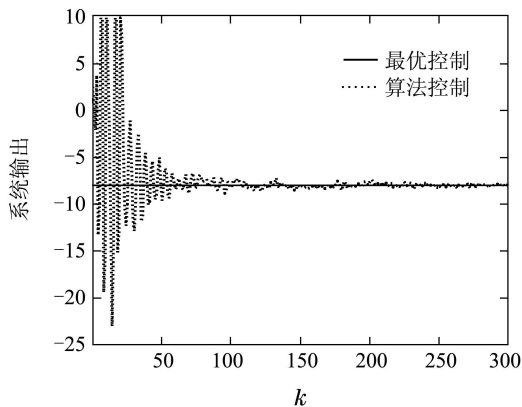


图 8 Hammerstein 系统的输出

Fig. 8 Output of Hammerstein system

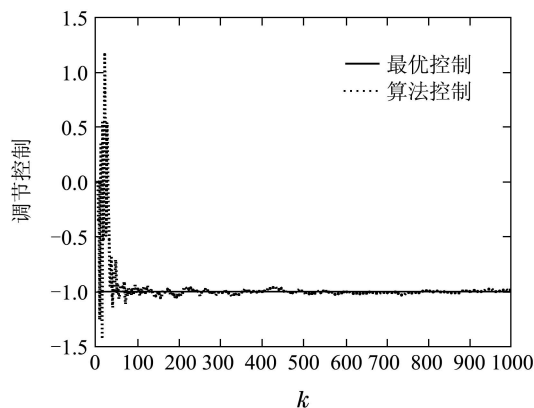


图 9 Wiener 系统的适应调节控制

Fig. 9 Adaptive regulation control for Wiener system

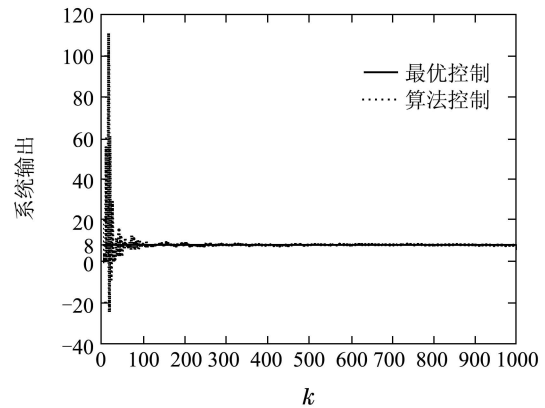


图 10 Wiener 系统的输出

Fig. 10 Output of Wiener system

5 结束语(Concluding remarks)

文中提出用 SAAWET 来解系统控制等领域的问题, 这套方法已获得很多成功. 虽然该方法提供了解问题的基本途径, 但远非给出解答. 应用起来首先要根据不同的问题, 做好参数化以及与此相关的(被求根)函数以及相应的量测量. 最关键、一般也是最困难的一步是证明估计的收敛性.

参考文献(References):

- [1] ROBBINS H, MONRO S. A stochastic approximation method [J]. *Ann Math Statist*, 1951, 22(3): 400 – 407.
- [2] CHEN H F. *Stochastic Approximation and Its Applications* [M]. Dordrecht: Kluwer, 2002.
- [3] CHEN H F, ZHAO W X. *Recursive Identification and Parameter Estimation* [M]. Boca Raton: CRC Press, 2014.
- [4] CHEN H F, ZHU Y M. Stochastic approximation procedures with randomly varying truncations [J]. *Scientia Sinica (Series A)*, 1986, 29(9): 914 – 926.
- [5] CHEN H F. New approach to identification for ARMAX systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 868 – 879.
- [6] CHEN X M, CHEN H F. Recursive identification for MIMO Hammerstein systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 895 – 902.
- [7] CHEN X, FANG H T. Recursive identification for Hammerstein systems with state-space model [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(10): 1460 – 1467.
- [8] HU X L, CHEN H F. Identification for Wiener systems with RTF subsystems [J]. *European Journal of Control*, 2006, 12(6): 581 – 594.
- [9] MU B Q, CHEN H F. Recursive identification of Wiener-Hammerstein systems [J]. *SIAM Journal of Control Optimization*, 2012, 50(5): 2621 – 2658.
- [10] MU B Q, CHEN H F. Recursive identification of MIMO Wiener systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(3): 802 – 808.
- [11] ZHAO W X, CHEN H F, ZHENG W X. Recursive identification for nonlinear ARX systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(6): 1287 – 1299.
- [12] CHEN H F. Recursive identification for multivariate errors-in-variables systems [J]. *Automatica*, 2007, 43(7): 1234 – 1242.
- [13] MU B Q, CHEN H F. Recursive identification of errors-in-variables Wiener systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2744 – 2753.

- [14] CHEN H F. Adaptive regulator for Hammerstein and Wiener systems with noisy observations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(4): 703 – 709.
- [15] CHEN H F, FANG H T. Output tracking for nonlinear stochastic systems by iterative learning control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(4): 583 – 588.
- [16] CHEN H F, CAO X R, ZHU J. Convergence of a stochastic approximation based algorithm for blind channel identification [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, 48(5): 1214 – 1225.
- [17] CHEN H F, YIN G. Asymptotic properties of sign algorithms for adaptive filtering [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(9): 1545 – 1556.
- [18] CHEN H F, FANG H T, ZHANG L L. Recursive estimation for ordered eigenvectors of symmetric matrix with observation noise [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 382(2): 822 – 842.
- [19] FANG H T, CHEN H F, WEN L. Consensus control for networked agents with noisy observations [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2012, 25(1): 1 – 12.
- [20] ZHAO W X, CHEN H F, FANG H T. Convergence of distributed randomized pagerank algorithms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(12): 3255 – 3259.
- [21] BENVENISTE A, METIVIER M, PRIOURET P. *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximation* [M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [22] KUSHNER H J, YIN G. *Stochastic Approximation Algorithms and Applications* [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [23] LJUNG L. Analysis of recursive stochastic algorithms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(4): 551 – 575.
- [24] NEVELSON M B, KHASHMINSKII R Z. *Stochastic approximation and recursive estimation* [M] // *Translation of Mathematic Monographs*. Providence, RI: American Math Society, 1976.

作者简介:

陈翰馥 (1937–), 男, 毕业于苏联列宁格勒大学, 现任中科院数学与系统科学研究院系统科学研究所研究员, 1993年当选为中科院院士, 1996年当选为IEEE Fellow, 2005年当选为第三世界科学院院士, 2006年当选为IFAC Fellow, 研究领域包括随机系统的辨识、适应控制、随机逼近和优化及其对系统控制、信号处理等领域的应用, 发表期刊论文210余篇, 专著8本, 其中四本在国外出版, 曾任中国自动化学会理事长(1993–2002)、中国数学会常务理事(1993–1999)、国际自动控制联合会(IFAC)执委(2002–2005), E-mail: hfchen@iss.ac.cn.