第 32 卷第 5 期
2015 年 5 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 32 No. 5
May 2015

DOI: 10.7641/CTA.2015.40779

鲁棒稳定性对最优二次型控制设计的约束

陈泳锟, 王　元, 苏为洲†

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640; 自主系统与网络控制教育部重点实验室, 广东 广州 510640)

摘要: 高品质反馈系统中, 对象的模型不确定性给最优控制设计带来许多困难. 本文针对车载"动中通"天线伺服系统, 研究了一种内模扩展的线性二次调节器(LQR)最优控制设计方法. 根据卡尔曼等式和小增益定理, 给出了系统的鲁棒稳定性对控制器设计参数的约束条件, 以及鲁棒稳定裕量与二次最优性能指标参数的定量关系. 最后通过MATLAB仿真和实际系统实验, 验证了控制器的有效性.

关键词: 伺服系统; 内模原理; LQR最优控制; 鲁棒稳定性; 卡尔曼等式

中图分类号: TP273　　　**文献标识码:** A

Robust stability constraints on linear quadratic optimal control

CHEN Yong-kun, WANG Yuan, SU Wei-zhou†

(School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;
Key Laboratory of Autonomous Systems and Networked Control of the Ministry of Education, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: Plant uncertainties make it difficult to design optimal linear quadratic regulator (LQR) feedback controllers. The key issue is that for LQR optimal control design problem, there is no effective way to select proper weighting parameters in the cost function to guarantee the robust stability of the systems. This work investigates the internal model extended LQR optimal control design for the servo system in a communications on the move (COTM) system. Based on the Kalman's equality and the small gain theorem, the robust stability constraints on the weighting parameters in the cost function are elaborated and the quantitative relationship between the robust stability margin and the weighting parameters in the cost function are derived. Finally, the effectiveness of the results in this work is validated by MATLAB simulations and experimental results.

Key words: servo systems; internal model; LQR optimal control; robust stability; Kalman's equality

1　引言(Introduction)

最优二次型控制广泛应用于各个领域, 如导弹和飞船的制导、天线的位置控制、船舶的自动驾驶、数控车床、硬盘驱动伺服系统等. 这类系统通常需要具有优良的伺服品质和干扰抑制性能, 同时还要具有较好的鲁棒稳定性. 然而在实际工程中, 伺服系统的伺服品质和鲁棒稳定性是很难兼顾的, 其主要原因是伺服系统普遍存在高频不确定性, 而高频不确定性不仅会阻碍系统伺服带宽的提高, 影响系统的快速性, 甚至会破坏系统的稳定性, 这一问题是最优控制设计中被长期关注的问题. 文献[1–2]介绍了伺服系统反馈控制设计的常用方法和共性问题; 文献[3]研究了反馈系统的性能极限问题; 文献[4–5]详细地分析了天线伺服系统和硬盘伺服系统, 阐述了满足跟踪、干扰抑制和鲁棒稳定性的伺服系统分析与设计方法; 文献[6]介绍了各种型号的"动中通"天线, 以及相应的伺服控制系统; 文献[7]根据机理建模建立了移动卫星天线的数学模型, 设计了一种基于自适应鲁棒控制的伺服控制系统; 文献[8]针对船载卫星天线伺服系统, 设计了一种H_∞控制器; 文献[9]针对两轴天线设计了PID伺服控制器. 已有文献中大部分伺服系统的控制器设计仍然采用简单的PI控制, 而使用线性二次调节器(linear quadratic regulator, LQR)设计控制器的文献, 对控制器设计参数的选取缺乏明确的分析, 如系统的鲁棒稳定性对控制器参数设计的约束.

本文针对车载卫星通信的"动中通(communications on the move, COTM)"伺服系统, 研究了一种先进的LQR控制器设计方法, 以提高天线伺服系统的伺服品质, 并定量描述了鲁棒稳定裕量与二次最优性能指标参数的关系, 提出了使系统鲁棒稳定的控制器参

收稿日期: 2014−08−24; 录用日期: 2015−01−07.

†通信作者. E-mail: wzhsu@scut.edu.cn.

国家自然科学基金项目(61273109, 61104219), 广东省教育厅育苗项目(LYM11010)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273109, 61104219) and Foundation for Distinguished Young Talents in Higher Education of Guangdong, China (LYM11010).

数选取方法.

本文结构安排如下: 第2部分描述车载动中通伺服系统模型并提出文章要解决的问题; 第3部分介绍了内模扩展的LQR最优控制的速度环控制器设计方法; 第4部分分析了控制器设计参数与系统开环传递函数之间的代数关系, 定量描述了鲁棒稳定裕量与二次最优性能指标参数的关系; 第5部分通过MATLAB仿真验证结论的正确性, 同时给出了在实际系统上的实验结果, 验证控制器的有效性.

2 模型描述(Model description)

车载"动中通"卫星天线具有水平方位角和俯仰角两个自由度, 每个自由度分别由一套直流电动机伺服系统驱动, 通常这两套伺服系统被看作相互独立的系统, 每个系统的控制器可独立进行设计. 方位伺服系统由速度环和位置环组成, 其中速度环主要由电机和传动装置组成, 通常速度环的控制在动中通伺服系统控制中占据着主导地位. 本文只针对车载动中通方位伺服系统的速度环进行控制器设计, 系统速度环结构如图1所示.

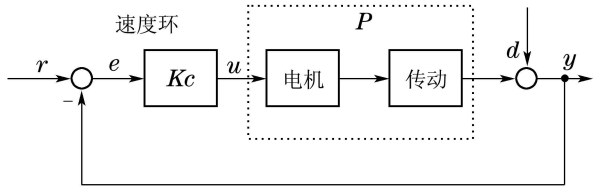

图 1 速度环结构图

Fig. 1 The structure diagram of speed loop

图1中: r表示给定速度信号, y表示速度输出, e表示系统的伺服误差, d表示扰动, Kc表示速度环的控制器, u表示控制信号, P表示包含电机和传动装置的被控对象.

本文根据对象的伪随机响应, 得到了其频率响应, 运用基于Hankel矩阵的系统辨识算法[10], 获得了伺服系统的一个5阶的标称模型$\bar{P}$, 其传递函数为

$$\bar{P}(s)=\frac{30.1238(s^2+7.812s+11960)(s^2-284.5s+41200)}{(s+130.2)(s^2+34.23s+10050)(s^2+13.06s+12680)}.$$

绘制实测模型与辨识模型的幅频特性曲线如图2所示.

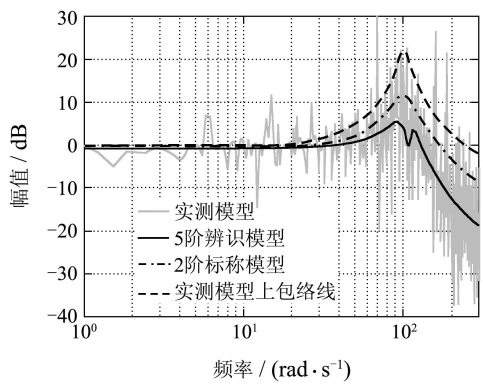

图 2 实测模型与辨识模型的幅频特性对比

Fig. 2 The frequency response of measurement model and identification model

由图2可知, 5阶辨识模型同实测模型在低频段吻合度较好, 高频部分走势相同. 但实测模型高频有较大的波动, 这是由于系统中存在很强的高频不确定性. 若利用5阶模型设计状态反馈控制器, 将得到一个高阶控制器, 这给实际工程应用带来困难. 为了得到一个简单可用的控制器, 本文将5阶标称模型$\bar{P}$降阶为2阶标称模型P:

$$P(s)=\frac{-92.53(s-97.35)}{s^2+34.23s+10050}. \tag{1}$$

2阶模型P保留了系统的谐振频率, 其幅频特性如图2中点划线所示. 这样实际系统可表示为

$$\tilde{P}(s)=P(s)+W(s)\Delta,\ \|\Delta\|_\infty\leqslant 1, \tag{2}$$

其中: $\tilde{P}(s)$表示实际系统模型, Δ表示任意无穷模不大于1的传递函数, $W(s)$表示系统的不确定性模型, 包含了模型辨识过程中的高频近似以及模型降阶带来的误差. 为了方便确定系统的不确定性模型$W(s)$, 绘制实测系统幅频响应的近似上包络线, 如图2中点线所示, 其传递函数为

$$\tilde{P}_{\rm u}(s)=\frac{-200(s-45.04)}{s^2+17.11s+10050}.$$

设此时$\Delta=1$, 则可以确定系统不确定性模型为

$$W(s)=\frac{-107.47s(s^2+48.97s+8615)}{(s^2+34.23s+10050)(s^2+17.11s+10050)}.$$

根据对象的2阶标称模型(1), 可得到对象状态空间表达式:

$$\begin{cases}\dot{x}_{\rm P}=A_{\rm P}x_{\rm P}+B_{\rm P}u,\\ y=C_{\rm P}x_{\rm P},\end{cases} \tag{3}$$

其中: $(A_{\rm P},B_{\rm P},C_{\rm P})$为系统矩阵, $x_{\rm P}=[x_1\ \ x_2]^{\rm T}$为系统的状态. 下面将利用2阶模型进行LQR最优控制器设计.

由于单纯的状态反馈控制器通常无法渐近跟踪阶跃信号, 为了实现渐近跟踪, 本文采用内模扩展的LQR控制器, 其结构如图3所示.

其中: x_3为内模扩展状态, $K=[K_{\rm P}\ \ K_3]$为状态反馈增益阵, u为控制器输出信号. 则扩展系统的状态空间表达式可写为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{\mathrm{P}} \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{P}} & 0 \\ -C_{\mathrm{P}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{P}} \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\mathrm{P}} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \\ y = [C_{\mathrm{P}}\ \ 0] \begin{bmatrix} x_{\mathrm{P}} \\ x_3 \end{bmatrix}, \\ u = [K_{\mathrm{P}}\ \ K_3] \begin{bmatrix} x_{\mathrm{P}} \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{4}$$

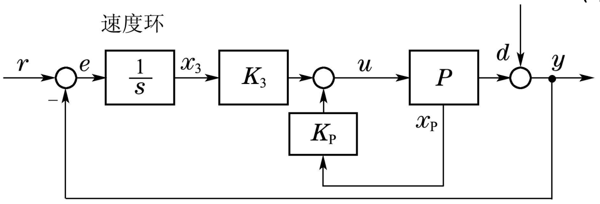

图 3　内模系统结构框图

Fig. 3　The structure diagram of internal model system

引理 1[11]　如果$(A_{\mathrm{P}}, B_{\mathrm{P}})$是可控的, 传递函数$P(s) = C_{\mathrm{P}}(sI - A_{\mathrm{P}})^{-1}B_{\mathrm{P}}$在$s = 0$处没有零点, 则通过选取合适的状态反馈$[K_{\mathrm{P}}\ K_3]$, 可以任意的配置矩阵$A_{\mathrm{P}}$所有的特征根.

由系统的传递函数式(1)可知, 系统在$s = 0$处没有零点, 故由引理1可知, 可以设计合适的状态反馈$[K_{\mathrm{P}}\ K_3]$, 任意配置系统的极点.

为简单起见, 本文把扩展状态方程(4)写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \\ u = Kx, \end{cases} \tag{5}$$

其中$x = [x_{\mathrm{P}}\ \ x_3]^{\mathrm{T}}$.

若状态反馈控制器$u = Kx$稳定该系统, 当给定输入信号为r, 记输出y, 控制信号u和状态x的稳态值分别为$y_{\mathrm{ss,r}}$, $u_{\mathrm{ss,r}}$和$x_{\mathrm{ss,r}}$. 由于上述系统是一型系统, 本文可得$y_{\mathrm{ss,r}} = r$. 进一步, 记$\tilde{y} = y - y_{\mathrm{ss,r}}$, $\tilde{u} = u - u_{\mathrm{ss,r}}$和$\tilde{x} = x - x_{\mathrm{ss,r}}$. 状态方程(5)可变换成如下形式(详细推导可参考文献[12]):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \\ \tilde{y} = C\tilde{x}, \\ \tilde{u} = K\tilde{x}. \end{cases} \tag{6}$$

针对这一跟踪问题, 取z如下:

$$z = \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\mathrm{P}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\mathrm{P}} \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

其中$\tilde{y}$和$\tilde{x}_3$分别为跟踪误差和累计跟踪误差与期望值的偏差.

进一步, 运用LQR方法设计控制器. 选取二次性能指标如下:

$$J_{\mathrm{LQR}} = \int_0^{\infty} (z^{\mathrm{T}}(t) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{bmatrix} z(t) + \rho^2 \|\tilde{u}(t)\|^2) \mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中: $\rho > 0$为控制信号的约束参数, γ为累计跟踪误差的约束参数.

众所周知, 针对二次性能指标J_{LQR}和标称模型的最优控制器设计问题可通过求解一个代数Riccati方程来完成. 但是, 若J_{LQR}中的参数ρ和γ选择不当, 所得控制器可能无法用于实际系统. 其根本原因是所得标称闭环系统的鲁棒稳定性太差, 不能克服系统不确定性带来的影响.

本文研究的核心问题是: 运用小增益定理, 找出鲁棒稳定性对设计参数γ, ρ的约束, 在此基础上给出选取这些参数适当准则.

3　内模扩展的LQR最优控制器设计方法 (LQR-internal-model optimal control)

线性二次型调节器(LQR)方法为现代控制理论的重要组成部分, 已经广泛应用于伺服系统的控制器设计之中. 本节将具体讨论内模扩展的LQR最优控制器设计步骤并给出二次性能指标J_{LQR}的参数ρ和γ与状态反馈增益阵K的关系.

根据式(7), 性能指标(8)可以写成一般形式如下:

$$J_{\mathrm{LQR}} = \int_0^{\infty} (\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t) Q \tilde{x}(t) + \tilde{u}^{\mathrm{T}}(t) R \tilde{u}(t)) \mathrm{d}t, \tag{9}$$

其中: $Q = \begin{bmatrix} C_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} C_{\mathrm{P}} & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{bmatrix}$, $R = \rho^2$.

引理 2[12]　若(A, B)可镇定, $(A, Q^{\frac{1}{2}})$可检测, 以下代数Riccati方程有镇定解$X \geqslant 0$:

$$A^{\mathrm{T}}X + XA + Q - XBR^{-1}B^{\mathrm{T}}X = 0, \tag{10}$$

并存在最优控制器: $u(t) = Kx(t)$, $t \in [0, \infty)$, 使得性能指标式(9)最小, 其中

$$K = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}X. \tag{11}$$

定理 1　对于形如式(4)所示的内模扩展系统, 最优状态反馈阵K的元素K_3满足

$$K_3^2 = \gamma^2 \rho^{-2}. \tag{12}$$

证　由引理2可知, 对于上述系统, 假设存在对称矩阵X满足Riccati方程(10), 使得性能指标式(9)最小, 此时的状态反馈增益如式(11). 把Riccati方程(10)的解X写成如下形式:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中: X_{11}为2×2维的对称矩阵, X_{22}为标量, X_{12}为2×1维的矩阵. 将式(13)和式(3)中的系统矩阵以及Q和R代入代数Riccati方程(10)可得

$$\begin{bmatrix} A_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{11}+X_{11}A_{\mathrm{P}}-C_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{12}^{\mathrm{T}}-X_{12}C_{\mathrm{P}}+C_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}C_{\mathrm{P}}-X_{11}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{11}\rho^{-2} & A_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{12}-C_{\mathrm{P}}X_{22}-X_{11}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{12}\rho^{-2} \\ X_{12}^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{P}}-X_{22}C_{\mathrm{P}}-X_{12}^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{11}\rho^{-2} & \gamma^2-X_{12}^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{12}\rho^{-2} \end{bmatrix}=0, \tag{14}$$

式(14)中各分块矩阵等于零, 得到

$$\gamma^2-X_{12}^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{12}\rho^{-2}=0, \tag{15}$$

又$K=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}X$, 则

$$K^{\mathrm{T}}K=\begin{bmatrix} X_{11}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{11}\rho^{-4} & X_{11}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{12}\rho^{-4} \\ X_{12}^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{11}\rho^{-4} & X_{12}^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}X_{12}\rho^{-4} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

即得

$$K_3^2=X_{12}^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}^{T}X_{12}\rho^{-4}, \tag{17}$$

由式(15)和式(17)得到$K_3^2=\gamma^2\rho^{-2}$. 证毕.

注 1 定理1给出了最优状态反馈阵K的元素K_3与控制器设计参数的关系, 它只与控制器设计参数有关, 而与被控对象的形式$(A_{\mathrm{P}},B_{\mathrm{P}},C_{\mathrm{P}})$无关. 笔者注意到$K_3$实际上就是系统的开环增益. 由定理1可知, 系统的开环增益随着控制器参数γ的增大而增大, 随着ρ的增大而减小. 过大的开环增益会使得系统的稳定性减弱, 因此在控制器参数选取时, ρ的选取不能太小, γ的选取不能太大, 从而得到大小合适的开环增益, 使得系统具有一定的稳定裕量.

4 鲁棒稳定性约束(Constraints of controller parameters for the robust stability)

本节讨论系统的鲁棒稳定性约束条件, 首先考虑图3所示系统, 将系统在控制信号接入处断开得到开环系统, 由式(5)可知, 系统从控制信号输入端到控制器输出端的开环传递函数为

$$L(s)=K(sI-A)^{-1}B. \tag{18}$$

依据式(8)给出的性能指标J_{LQR}, 定义系统等效的目标输出$v=\begin{bmatrix} C_{\mathrm{P}} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{\mathrm{P}} \\ x_3 \end{bmatrix}$. 系统从控制信号输入端, 到目标输出$v$的传递函数为

$$P_{\mathrm{uv}}(s)=C_{\mathrm{v}}(sI-A)^{-1}B, \tag{19}$$

其中$C_{\mathrm{v}}=\begin{bmatrix} C_{\mathrm{P}} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$, 上述两个传递函数的关系由引理3给出.

引理 3(Kalman's equality)[13] 若对象可镇定、可检测, 基于LQR准则式(9)的代数Riccati方程(10)有可镇定解$X\geqslant 0$, 传递函数(18)–(19)满足以下等式:

$$\begin{aligned}&(1+L(-s))R(1+L(s))=\\&R+P_{\mathrm{uv}}^{\mathrm{T}}(-s)P_{\mathrm{uv}}(s).\end{aligned} \tag{20}$$

依据引理3, 本文进一步分析系统的鲁棒稳定性约束. 考虑第2节中给出的系统降阶模型和不确定性表达式(2). 不考虑扰动输入, 在图3的基础上绘制系统闭环带不确定性框图如图4所示.

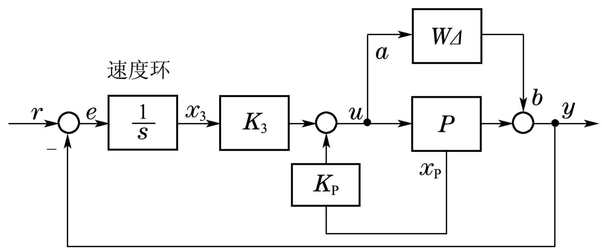

图 4 系统闭环带不确定性结构框图

Fig. 4 The structure diagram of closed-loop system with uncertainty

其中a,b为系统不确定性模型$W\varDelta$的左右端点处信号. 将系统不确定性模型$W\varDelta$左右两端断开, 考虑输入为b, 输出为a的传递函数状态空间方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu+B_{\mathrm{b}}b, \\ a=Kx, \\ u=Kx, \end{cases} \tag{21}$$

其传递函数为

$$P_{\mathrm{ba}}=K(sI-A+BK)^{-1}B_{\mathrm{b}}, \tag{22}$$

其中$B_{\mathrm{b}}=[0\ \ 0\ \ -1]^{\mathrm{T}}$, 计算得

$$P_{\mathrm{ba}}=-\frac{K_3}{s(1+L(s))}, \tag{23}$$

则系统可化为如图5形式.

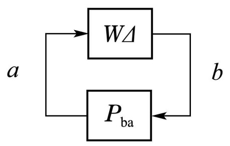

图 5 等效结构框图

Fig. 5 The equivalent structure diagram

引理 4 (小增益定理)[14]对于具有不确定性模型$\tilde{P}(s)=P(s)+W(s)\varDelta$, $\|\varDelta\|_\infty\leqslant 1$的被控对象, 控制器$K_{\mathrm{c}}$能满足鲁棒稳定性的充分必要条件是

$$\|P_{\mathrm{ba}}W\|_\infty<1. \tag{24}$$

定理 2 对于具有不确定性模型$\tilde{P}(s)=P(s)+W(s)\varDelta$, $\|\varDelta\|_\infty\leqslant 1$的系统, 为保证系统的鲁棒稳定性, 其内模扩展LQR最优状态反馈控制器参数ρ, γ需满足

$$\sup_{\omega}\frac{\gamma^2|W(\mathrm{j}\omega)|^2}{\rho^2\omega^2+(\omega^2+\gamma^2)|P(\mathrm{j}\omega)|^2}<1. \tag{25}$$

证 引理3中$P_{\mathrm{uv}}(s)$可表示为

$$P_{\mathrm{uv}}(s)=\begin{bmatrix}1\\-\dfrac{\gamma}{s}\end{bmatrix}P(s). \tag{26}$$

进而, 令$s=\mathrm{j}\omega$将$R=\rho^2$和式(26)代入式(20), 由系统模的定义可得

$$|1+L(\mathrm{j}\omega)|^2=1+\frac{(\omega^2+\gamma^2)|P(\mathrm{j}\omega)|^2}{\omega^2\rho^2}. \tag{27}$$

为保证系统的鲁棒稳定性, 由引理4中的结论, 把式(23)(27)代入式(24)可得

$$\sup_{\omega}\frac{\rho^2K_3^2|W(\mathrm{j}\omega)|^2}{\rho^2\omega^2+(\omega^2+\gamma^2)|P(\mathrm{j}\omega)|^2}<1. \tag{28}$$

运用定理1, 式(28)可化为式(25).　　证毕.

定义 1　系统鲁棒稳定裕量为

$$A_{\mathrm{w}}=\frac{1}{\sup\limits_{\omega}\dfrac{\gamma^2|W(\mathrm{j}\omega)|^2}{\rho^2\omega^2+(\omega^2+\gamma^2)|P(\mathrm{j}\omega)|^2}}. \tag{29}$$

显然A_{w}越大, 对象不确定性允许变化的范围越宽. 若不确定性的H_∞范数小于等于1则系统的鲁棒稳定条件为$\dfrac{1}{A_{\mathrm{w}}}<1$.

注 2　定理2给出了系统的鲁棒稳定性对控制器设计参数的约束条件. 在低频段处, 系统不确定性很小, $|W(\mathrm{j}\omega)|^2$值很小(趋于零)而$|P(\mathrm{j}\omega)|^2$值趋于一个常数, 系统鲁棒稳定裕量大于1; 在高频段处, 系统不确定性变大, $|W(\mathrm{j}\omega)|^2$值变大, 容易使系统鲁棒稳定裕量小于1. 由定理2可知, 在设计控制器时不能为了追求系统响应的快速性, 而一味的增大控制器参数γ, 或者减小控制器参数ρ, 应该充分考虑到系统的高频不确定性, 选取适当的控制器参数, 使得系统保有一定的鲁棒稳定裕量, 否则很容易使得系统不稳定.

5　仿真实验(Simulation experiment)

本节根据第2节中得到系统不确定性模型, 验证定理2的正确性, 并给出实际系统方波信号跟踪响应图, 验证控制器算法的先进性.

分别取控制器参数: $\gamma=[1\ \ 10\ \ 20\ \ 30\ \ 40\ \ 50\ \ 60\ \ 70\ \ 80\ \ 90]$, $\rho=[0.0306\ \ 0.1\ \ 1\ \ 2.236\ \ 4.472]$, 绘制鲁棒稳定裕量变化如图6所示.

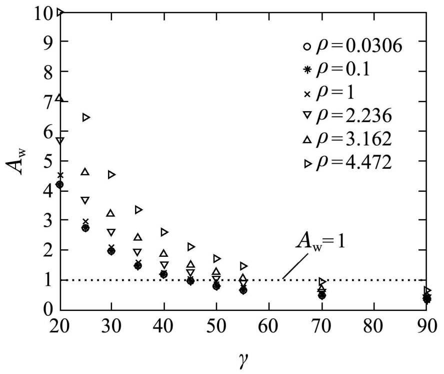

图 6　控制器参数与A_{w}的关系图

Fig. 6　The diagram of controller parameters and A_{w}

由图6可知, 随着A_{w}值的减小, 系统的鲁棒稳定性减弱, 当$A_{\mathrm{w}}<1$时, 系统不是鲁棒稳定的. 固定参数ρ不变, 则鲁棒稳定裕量A_{w}随着参数γ的增大而减小; 固定参数γ不变, 则鲁棒稳定裕量A_{w}随着参数ρ的增大而增大, 当ρ取值很小时, 鲁棒稳定裕量A_{w}变化不明显.

分别取控制器设计参数: $\rho=0.1$, $\gamma=30$; $\rho=0.0306, \gamma=45$, 绘制标称系统阶跃响应和取$\varDelta=1$时引入不确定性系统的阶跃响应如图7和8所示.

当控制器设计参数取$\rho=0.1$, $\gamma=30$时, 鲁棒稳定裕量$A_{\mathrm{w}}=4.2373>1$, 由图7可知, 不确定性的引入使系统性能变差, 但系统依然是稳定的; 当控制器设计参数取$\rho=0.0306, \gamma=45$时, 鲁棒稳定裕量$A_{\mathrm{w}}=0.9643<1$, 由图8可知, 不确定性的引入使系统不稳定了. 由此验证了定理2的正确性.

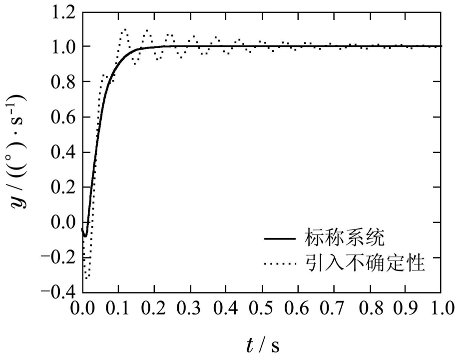

图 7　$\rho=0.1, \gamma=30$时阶跃响应对比

Fig. 7　Comparison of the step response when $\rho=0.1$, $\gamma=30$

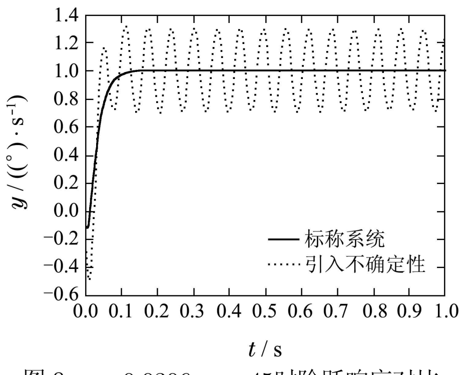

图 8　$\rho=0.0306, \gamma=45$时阶跃响应对比

Fig. 8　Comparison of the step response when $\rho=0.0306$, $\gamma=45$

固定控制器设计参数$\rho=0.1$, 分别取$\gamma=[1\ \ 10\ \ 30\ \ 40\ \ 60\ \ 90]$, 计算标称系统性能指标和对应的$A_{\mathrm{w}}$值, 并计算$\varDelta=1$时引入不确定性系统的时域性能指标绘制表1.

由表1可知, 当固定$\rho=0.1$时, 随着γ的增加, 标称系统的稳定裕量减小, 截止频率增加, 调节时间变短, 超调量为0, 同时开环增益K_3增加; 引入不确定性系统的调节时间先减小后增加, 超调量明显增加直至不稳定; 系统鲁棒稳定裕量A_{w}值减小, 系统

鲁棒稳定性能变差, 当γ增加到一定程度时($\gamma > 45$), $A_{\rm w}$值小于1, 系统不是鲁棒稳定的.

取不同控制器设计参数, 使$A_{\rm w}$值接近于1, 计算标称系统性能指标, 并计算$\Delta = 1$时引入不确定性系统的时域性能指标绘制表2.

由表2可知, 在保证系统的鲁棒稳定性的前提下, 减小ρ的取值, 并取适当的γ, 标称系统的截止频率增加, 调节时间减小, 系统的快速性增强, 当ρ的取值足够小时, 对系统性能的影响不大, 但是却大大增加了开环增益K_3, 在实际控制中会带来稳定性隐患; 引入不确定性后, 当减小ρ的取值时, 系统的超调量和调节时间都会增加, 系统稳定性变差.

综上, 由表1和表2可知, 在控制实际系统时(即存在不确定性), 不能为了追求系统响应的快速性, 而任意减小控制器参数ρ或者增大控制器参数γ的取值, 否则将会导致系统不稳定.

表 1 γ取不同值时系统性能指标

Table 1 System performances under different γ

	$\rho = 0.1$	$\gamma = 1$	$\gamma = 10$	$\gamma = 30$	$\gamma = 40$	$\gamma = 60$	$\gamma = 90$
标称系统	相角裕量/(°)	88.8	80.8	72	69.6	66.6	64.2
	幅值裕量/dB	39.2	20.7	13.8	12.4	10.7	9.3
	截止频率/(rad · $\rm s^{-1}$)	0.973	8.2	18.4	21.8	27	32.1
	调节时间/s	3.96	0.412	0.151	0.119	0.088	0.069
	最大超调量	0	0	0	0	0	0
引入不确定性系统	调节时间/s	3.96	0.412	0.565	1.98	不稳定	不稳定
	最大超调量	0	0	10ϰ	22%	不稳定	不稳定
	鲁棒稳定裕量$A_{\rm w}$	100	16.67	2	1.1778	0.6135	0.3606
	开环增益K_3	10	100	300	400	600	900

表 2 $A_{\rm w}$接近于1时系统性能指标

Table 2 The system performance when $A_{\rm w}$ close to 1

	$\rho,\ \gamma$	$4.472, 68$	$3.162, 57$	$2.236, 51$	$1, 45$	$0.1, 44$	$0.0306, 44$
标称系统	相角裕量/(°)	80.2	78.7	76.6	71.4	68.8	69
	幅值裕量/dB	10.7	10.5	10.4	10.5	11.9	12.3
	截止频率/(rad · $\rm s^{-1}$)	11.2	12.6	14.3	18.6	23	23.4
	调节时间/s	0.309	0.27	0.227	0.154	0.11	0.109
	最大超调量	0	0	0	0	0	0
引入不确定性系统	调节时间/s	0.54	0.54	0.6	0.85	5.3	9.4
	最大超调量	5ϰ	7ϰ	8ϰ	15ϰ	28ϰ	30ϰ
	鲁棒稳定裕量$A_{\rm w}$	1.0102	1.0154	1.0072	1.0205	1.0012	1.007
	开环增益K_3	15.4	18.3	22.8	45	450	1423

对于一个实际的天线控制系统, 采用基于内模扩展的LQR状态反馈控制器与经典的PI控制器进行对比实验, 得到系统的速度环方波响应如图9所示.

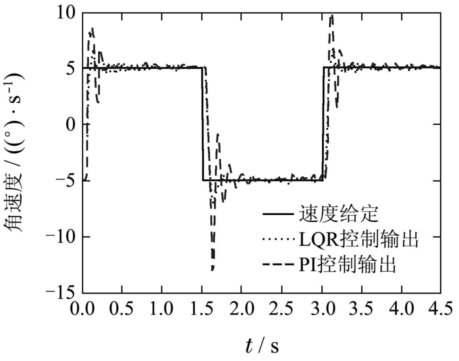

图 9 方波响应对比

Fig. 9 Comparison of the square wave response

其中: 输入均为幅值为±5的方波信号, LQR控制器参数分别取$\rho = 0.0306$, $\gamma = 37$, PI控制器参数为$P = 0.6$, $I = 0.1$. 由图9中可以明显看出, 采用基于内模原理的LQR控制器相比PI控制器而言超调减小, 振荡减弱, 伺服系统可以有效跟踪系统给定信号.

6 结论(Conclusions)

本文针对车载动中通伺服系统研究了LQR最优控制问题, 讨论了内模扩展的LQR最优状态反馈控制器设计步骤, 基于Kalman's equality引理和小增益定理, 给出了开环增益与控制器设计参数的关系, 以及系统的鲁棒稳定性对控制器设计参数的约束条件, 定量描述了鲁棒稳定裕量与二次最优性能指标

参数的关系. 最后通过仿真, 验证了定理的正确性, 并通过现场试验, 验证了控制器的有效性.

参考文献(References):

[1] QIU L, ZHOU K. Preclassical tools for postmodern control: an optimal and robust control theory for undergraduate education [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2013, 33(4): 26 – 38.

[2] 张磊, 苏为洲. 伺服系统的反馈控制设计研究综述 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(5): 545 – 559.
(ZHANG Lei, SU Weizhou. Feedback control design of servo systems: a review [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(5): 545-559.)

[3] SU W, QIU L, CHEN J. Fundamental limit of discrete-time systems in tracking multi-tone sinusoidal signals [J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 15 – 30.

[4] GAWRONSKI W. *Modeling and Control of Antennas and Telescopes* [M]. New York, USA: Springer, 2008.

[5] CHEN B M, LEE T H, PENG K M, et al. *Hard Disk Drive Servo Systems* [M]. Berlin, Germany: Springer, 2006.

[6] DEBRUIN J. Control systems for mobile satcom antennas [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2008, 28(1): 86 – 101.

[7] 李果, 胡剑飞, 余达太. 移动卫星天线的自适应鲁棒控制系统 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 307 – 311.
(LI Guo, HU Jianfei, YU Datai. Adaptive robust controller of mobile satellite antenna systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(2): 307 – 311.)

[8] MING A, YAMAOKA T, KIDA T, et al. Accuracy improvement of ship mounted tracking antenna for satellite communications [C] //*Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. Niagara Falls, Canada: IEEE, 2005, 3: 1369 – 1374.

[9] RISTROPH G, DEBRUIN J. Servo requirements for FCC VMES compliance [C] //*Military Communications Conference*. San Jose, CA: IEEE, 2010: 1983 – 1987.

[10] CASCONE E, MANCINI D, SCHIPANI P. Galileo telescope model identification [C] //*Proceedings of SPIE, Telescope Control Systems II*. San Diego, CA: SPIE, 1997, 3112: 343 – 350.

[11] CHEN C T. *Linear System Theory and Design* [M]. New York: Oxford University, 1999: 242 – 245.

[12] ZHOU K, DOYLE J, GLOVER K. *Robust and Optimal Control* [M]. New Jesery, USA: Prentice Hall, 1995: 319 – 364.

[13] HESPANHA J. *Linear Systems Theory* [M]. New Jesery, USA: Princeton University, 2009: 191 – 222.

[14] DOYLE J, FRANCIS B, TANNENBAUM A. *Feedback Control Theory* [M]. New York: Macmillan Publishers, 1990: 39 – 47.

作者简介:

陈泳锟　(1988–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为天线伺服系统的控制算法设计、最优和鲁棒控制、反馈系统的性能极限, E-mail: ykchenscut@163.com;

王　元　(1990–), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为天线伺服系统的控制算法设计、伺服系统辨识, E-mail: wangyuan0502@163.com;

苏为洲　(1962–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为最优和鲁棒控制、反馈系统的性能极限、网络反馈系统的分析与设计、伺服控制系统的设计、网络系统分布式估计与信号处理, E-mail: wzhsu@scut.edu.cn.