

柴油机碳烟颗粒物的分形生长分析与凝聚控制

刘平[†], 李敬, 侯加林

(山东农业大学 机械与电子工程学院, 山东省园艺机械与装备重点实验室, 山东 泰安 271018)

摘要: 本文针对柴油机械的主要排放颗粒物—碳烟颗粒物, 基于其分形生长物理数学模型, 模拟了单微粒与单微粒、单微粒与团簇、团簇与团簇凝聚体碰撞的形态结构, 结合碰撞频率, 利用主要环境因素干扰对柴油机碳烟颗粒物的分形生长进行凝聚控制, 使其凝聚成规则的几何体或密度较大的颗粒物, 减少表面积和复杂度, 减小粘滞阻力和对有毒颗粒物的吸附, 以便于捕捉器的捕捉或沉降, 实现了环境污染的防控. 数值仿真结果表明此凝聚控制分析是可行、有效的, 这将有助于理解和分析实际碳烟颗粒物非平衡凝聚生长的物理机制和动力学行为, 为进一步降低可吸入性柴油机颗粒物的排放提供思路.

关键词: 碳烟颗粒物; 凝聚; 分形生长; 控制; 柴油机

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

The analysis and its agglomeration control of soot particles fractal growth

LIU Ping[†], LI Jing, HOU Jia-lin

(College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong Key Laboratory of Gardening Machinery and Equipment, Shandong Agricultural University, Taian Shandong 271018, China)

Abstract: Based on the fractal growth physical model of soot particles from large diesel agriculture machinery, this paper simulates the morphological structure of collision for the single particles and single particles, single particle and clusters, clusters and clusters, firstly. Moreover, combining with the collision frequency, the fractal growth is controlled to agglomeration using the main environmental factors interference for diesel engine soot particles, in order to make them condensed into regular geometry or larger density particles, reduce the viscous drag for capturing by the capturer or settlement and to realize the control of the pollution of the environment. The results of numerical simulation show that the proposed method are feasible and effective, which will help to understand and analyze the physical mechanism and kinetics of non-equilibrium condensation growth behavior of the actual carbon smoke particles and provide the solution to further reduce emissions of the inhalable particulate matter from diesel engines.

Key words: soot particles; agglomeration; fractal growth; control; diesel engine

1 引言(Introduction)

柴油机在经济发展中有着不可忽视的作用, 但是在环境保护方面也带来了日益尖锐的问题. 柴油机排放物是空气污染的重要来源之一, 而其排放物中有多种有害物质, 如碳氢化合物(HC)、一氧化碳(CO)、氮氧化物(NO_x)及颗粒物, 柴油机的有害气体HC, CO排放量相当低, 一般只有汽油机的几分之一, NO_x的排放量也和汽油机处于同一个数量级, 相对而言, 由于柴油机排放的颗粒物为可吸入颗粒物, 对空气造成

的污染最为严重^[1-2].

柴油机排放的颗粒物通常由碳烟、烟灰、有机可溶成分和硫化物组成如图1^[3]所示. 图1是一台典型的重型柴油机在瞬态工况下排出的颗粒物主要成分, 显然碳烟是柴油机颗粒物排放的主要组成部分约占41%, 通常情况下约占颗粒物总量的50%~80%, 是最重要的有害排放物之一. 因此, 控制柴油机排放颗粒物(碳烟颗粒物)的研究势在必行.

目前, 柴油机碳烟颗粒物的研究主要集中在光学

收稿日期: 2015-11-12; 录用日期: 2017-04-11.

[†]通信作者. E-mail: liuping@sdau.edu.cn, jlhou@sdau.edu.cn; Tel.: +86 538-8242643.

本文责任编辑: 张化光.

国家自然科学基金项目(31301080), 中国博士后科学基金项目(2015M582122, 2016T90644), 国家科技计划课题(2015BAF13B02), 山东省自然科学基金项目(ZR2015FL001), 山东省重点研发计划项目(2016ZDJS02A07), 作物生物学国家重点实验室开放课题(2013KF10)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (31301080), Postdoctoral Science Foundation of China (2015M582122, 2016T90644), National Key Technology Support Program of China (2015BAF13B02), Natural Science Foundation of Shandong (ZR2015FL001), Key Research Plan of Shandong (2016ZDJS02A07) and Open Project of State Key Laboratory of Crop Biology (2013KF10).

特性、化学组分、粒度分布、源解析以及人类健康评估等方面^[4], 但关于颗粒物形态结构(形态和表面结构)方面的研究几乎空白, 尤其是颗粒物的形态结构研究. 大多数碳烟颗粒物具有复杂的形态-分形结构^[6-7], 这种形态影响颗粒物的性质特征, 而描述分形结构的参数是分维. 通过研究其形态结构可以推导颗粒物的沉积情况、颗粒物所受的粘滞阻力和对有毒分子的吸附情况, 对其施加控制, 可减小环境污染的程度和减少对人体健康的危害. 因此有必要对柴油机碳烟颗粒物的分形凝聚生长形态结构进行控制.

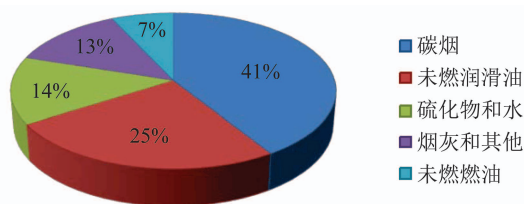


图 1 重型柴油机颗粒物排放组成

Fig. 1 The particulate emissions of the heavy-duty diesel

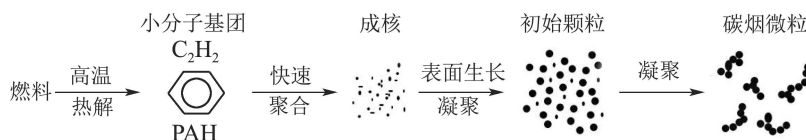


图 2 碳烟生成过程

Fig. 2 The soot generation process

2.2 碳烟结构的模拟方法(The simulation method of soot structure)

根据碳烟生长过程的特点, 本文基于文献[13]利用动态蒙特卡洛方法建立的碳烟分形生长模型. 该模型的建立由以下两个方面组成: 在有許多粒子的二维欧氏空间中设定一个初始粒子作为目标粒子, 其他粒子为候选粒子, 选其中一个候选粒子按照随机产生的轨迹与目标粒子发生碰撞, 并根据粘附概率进行粘附. 其他一个候选粒子重复上述过程, 依次类推最终形成凝聚体; 若其运动到达了空间的边界, 该微粒被目标微粒吸收并消失, 如图3所示. 粒子做的是布朗运动, 因此在粒子被放置释放后, 规定它分别以1/4的概率移动到相邻的左、右、上、下的周边正方形中, 该过程将一直进行下去, 直至粒子离开边界, 或者到达凝聚团簇. 微粒的碰撞有两种碰撞形式: 微粒与微粒碰撞(图4)、团簇与团簇的碰撞(图5).

以单个微粒的碰撞为例说明微粒的碰撞, 首先要确定两个碰撞微粒的轨迹向量, 如图6所示. 设定用两个小球来表示两个单独的微粒, 分别定义为 B_1 (种子微粒)和 B_m (随机微粒); 半径分别为 R_1 和 R_m ,

本文针对柴油机的主要排放颗粒物-碳烟颗粒物, 基于其凝聚分形生长模型, 模拟单微粒与单微粒、单微粒与团簇、团簇与团簇凝聚体碰撞的形态结构, 分析其分形生长, 并控制其分形凝聚生长方向, 使其凝聚成规则的几何体(减少有毒分子的吸附)或较大密度的颗粒物(增加颗粒物的沉降), 以便于实现减小环境污染的程度和减少对人体健康的危害.

2 碳烟分形生长过程与模拟方法(The fractal growth process of the soot and its simulation method)

2.1 碳烟生长过程(The generation process of soot)

碳烟的生成过程要经历很复杂的化学反应和物理过程, 首先经历化学反应然后结合物理过程, 即气相反应、从气态到固态的相变过程, 然后在柴油机缸内碳烟颗粒的形成经历了成核、凝结、碰撞破碎、生长和表面氧化等动力学事件的演变过程^[8-12]. 碳烟颗粒物模型所描述的具体形成过程如图2所示.

其中: B_1 的坐标是给定的, B_m 的坐标是随机的, 同时定义小球 B_1 的同心球 B_s 的半径为 R_s , 令 $R_s = R_1 + R_m$. 然后让 B_m 以近似随机行走的轨迹运动, 此时, 小球 B_1 的球心为 x_s^0 . 通过 B_m 的随机运动, 碰到固定的小球 B_1 的时候满足式(1).

$$|x_s - x_s^0| = R_s. \quad (1)$$

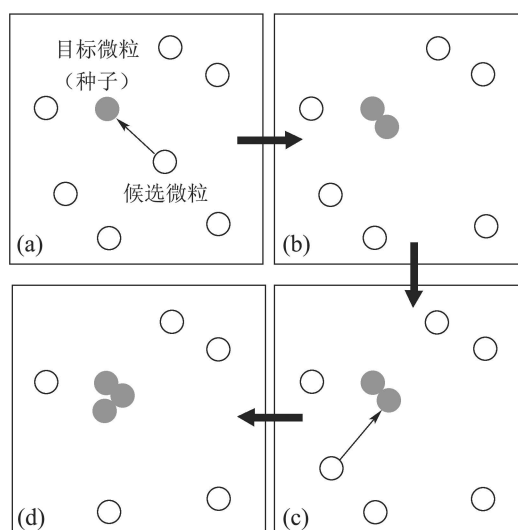


图 3 凝聚生长过程示意图

Fig. 3 The diagram of growth process

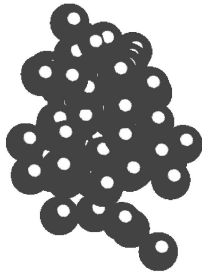


图4 微粒与微粒碰撞

Fig. 4 The collision of single particles and single particle



图5 团簇与团簇的碰撞

Fig. 5 The collision of clusters and clusters

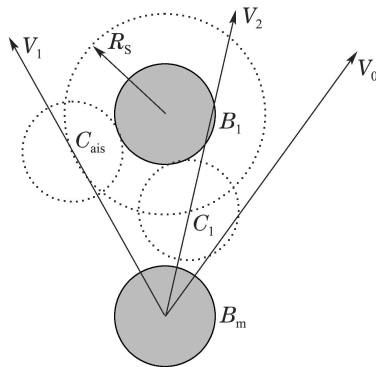


图6 单微粒碰撞示意图

Fig. 6 The diagram of single particle collisions

当随机微粒 B_m 吸附凝结到种子微粒 B_1 上时,它的随机运动轨迹向量 v 恰好与球 B_1 相交或相切,即满足式(2):

$$x_m = x_m^0 + c_n v, \quad c_n \in [0, \infty), \quad (2)$$

x_m 为小球 B_m 发生碰撞后的球心坐标, x_m^0 为小球 B_m 最初的球心坐标. 当两个小球发生碰撞时, 满足几何关系

$$|x_m - x_m^0| = |(x_m^0 - x_s^0) + c_n v| = R_s. \quad (3)$$

对式(3)两边同时平方求解得到关于以 c_n 为未知数的一元二次方程, 对此方程求解, 如果 c_n 无解, 两个小球不能碰撞; 如果 c_n 有解, 两小球相碰, 有两种情况: 一种是有唯一解时, 二者刚刚好相碰撞; 有两

个解时, 根据物理情况取最小的解 c_{\min} . 确定 c_n 之后, 随机运动的小球 B_m 的坐标也随之确定, 即为

$$x_m = \begin{cases} x_m^0 + c_{\min} v, & \text{相交,} \\ x_m^0 + c_{\min} v, & \text{相切.} \end{cases} \quad (4)$$

这个过程描述了简单的微粒与微粒的碰撞过程, 在此基础上可用来模拟团簇与团簇的碰撞和枝接的过程, 碰撞过程依然采用蒙特卡洛方法.

碳烟分形生长形成的凝聚体形态与回转半径, 碳烟半径(见图7)以及分形维数有着紧密的关系, 其中: R_g 表征碳烟凝聚生长的紧致性, R_e 表征分形生长形成碳烟凝聚体体积的大小, 而分形维数表征碳烟凝聚体表面的粗糙程度, 与颗粒物的吸附性有密切的关系. 本文碳烟凝聚体分维数 D_f 的计算采用盒子计算方法^[14], 即

$$D_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{N_n(A)}{\ln T_n} \right),$$

其中: $N_n(A)$ 是包含 A 所需要的最小盒子数, $1/T_n$ 为小盒子的边界, 当 T_n 足够大时, 盒子维数近似为

$$D_f = \text{slope}\{\ln(N_n(A)), \ln T_n\}.$$

碳烟凝聚体的分形维数计算方法见图8所示.

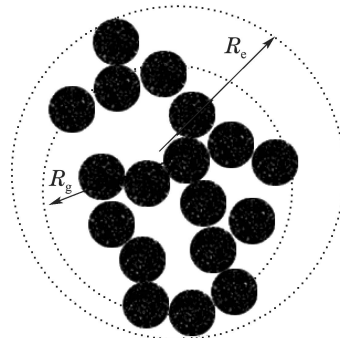


图7 回转半径 R_g 与碳烟凝聚体半径 R_e 示意图

Fig. 7 The diagram for turning radius R_g and radius R_e of soot condensed matter

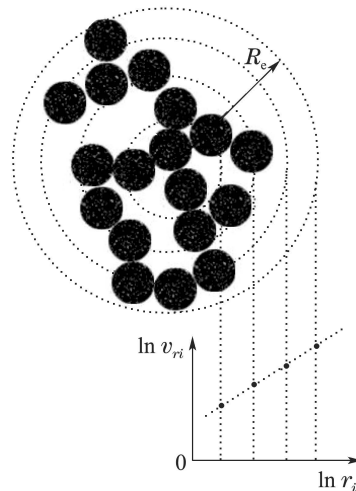


图8 碳烟凝聚体分维数盒子计算方法示意图

Fig. 8 The sandbox method for the fractal dimension of soot condensed matter

3 柴油机碳烟颗粒物的分形生长与凝聚控制(The analysis and condensation control of fractal growth for soot particles)

3.1 碳烟颗粒物分形生长的描述(The description of the fractal growth for soot particles)

柴油机的碳烟颗粒物的形成过程受一些因素影响,如温度、压力、碳烟粒子浓度以及氧化率等^[15],根据自由粒子在连续介质状态下运动的特征,可以认为碳烟颗粒物的凝聚生长(凝聚碰撞)具有边界条件的分布参数运动方程

$$\frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial t} = \delta \left(\frac{\partial \eta^2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^2(x, y, t)}{\partial y^2} \right),$$

其中: $\eta(x, y, t)$ 为凝聚温度, δ 为扩散常数.

碳烟颗粒物的凝聚生长受到多种因素的影响,为了更好的描述碳烟颗粒物的凝聚分形生长,碳烟颗粒物的凝聚生长概率满足如下的分布参数系统:

$$\nabla^2 \eta(x, y) = F(\eta(x, y), \frac{\partial \eta}{\partial t}, u(x, y)), \quad (5)$$

其中: $\eta(x, y)$ 为凝聚温度, F 表示环境干扰项,通常称为强迫项,是一个非线性函数项, $u(x, y)$ 是数字化的初始值. 根据文献[16]对于分布参数系统的处理方式,系统(5)的离散动力系统

$$\begin{aligned} \eta_{m+1,n} + \eta_{m-1,n} + \eta_{m,n+1} + \eta_{m,n-1} - 4\eta_{m,n} = \\ F[\eta_{m,n}, (\eta_{m+1,n} - \eta_{m,n})](m_{t+1} - m_t) + \\ (\eta_{m,n+1} - \eta_{m,n})(n_{t+1} - n_t), u_{m,n}], \quad (6) \end{aligned}$$

考虑式(6)的数值量测的性质,进而可逼近式(5)的碰撞凝结的精准值. 考虑到碳烟凝聚温度的有界性可变性,以及正弦函数的数学性质,因此可假设系统(5)中的非线性函数为

$$F = \alpha \sin \eta_{m,n} + u_{m,n}. \quad (7)$$

为了更一般化的处理问题,特此引入系统

$$\Omega(r) = \alpha \sin(\Omega(r-1)) + \Omega(r-1) + u_{m,n}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega(r) = \eta_{m+r,n} + \eta_{m-r,n} + \eta_{m,n+r} + \eta_{m,n-r}, \\ r = 1, 2, \dots. \quad (9) \end{aligned}$$

当 $r = 1$, 式(9)就变为系统(6). 对式(8)进行简单化的迭代,可以得到一个简单的控制系统

$$\begin{aligned} \Omega(r) = \\ ru + \alpha \sin(\Omega(r-1)) + \alpha \sin(\Omega(r-2)) + \dots + \\ \alpha \sin(\Omega(0)) + \Omega(0), \quad (10) \end{aligned}$$

其中 $r = 1, 2, \dots$.

3.2 柴油颗粒物分形生长凝聚控制分析(The condensation control analysis of fractal growth for soot particles)

根据文献[16]的控制方法,本文分析这种控制方法对柴油机碳烟颗粒物凝聚分形生长的影响. 假设 \mathcal{H} 是凝聚区域, $\bar{\mathcal{H}}$ 是凝聚边界, \mathcal{M} 是源项 $u(x, y)$ 的控制作用范围,且满足 $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$. 另外,对于任意的 $(x, y) \in \mathcal{H}$, 且有 $0 \leq \eta(x, y) \leq 1$ 成立. 由于解析函数 $u(x, y)$ 在 \mathcal{H} 内满足最大值原理,则对于任意的 $(x, y) \in \mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}$, 条件 $0 \leq \eta(x, y) < 1$ 必须成立,所以系统(8)中的 α 和 u 必须尽可能取较小的值,用不等式表示为

$0 \leq \eta_{m+r,n} + \eta_{m-r,n} + \eta_{m,n+r} + \eta_{m,n-r} < 1$, 亦即 $0 \leq \Omega(r) < 1$, 其中 $r = 1, 2, \dots$. 由于 $0 \leq \sin(\Omega(r)) < \Omega(r) < 1$ 成立,那么系统(10)满足下面的关系:

$$\begin{aligned} \Omega(r) < ru + \alpha \Omega(r-1) + \alpha \Omega(r-2) + \dots + \\ (\alpha + 1)\Omega(0). \quad (11) \end{aligned}$$

根据式(10)并结合数学归纳法,可以得到

$$\begin{aligned} \Omega(r) < [(\alpha + 1)^{r-1} + (\alpha + 1)^{r-2} + \dots + \\ (\alpha + 1) + 1]u + (\alpha + 1)^r C(0), \quad (12) \end{aligned}$$

其中 $r = 1, 2, \dots$.

改变不等式(12)的右项 $\Omega(r)$ 为 $\Psi(\alpha, u, r)$, 即为

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, u, r) = \\ [(\alpha + 1)^{r-1} + (\alpha + 1)^{r-2} + \dots + \\ (\alpha + 1) + 1]u + (\alpha + 1)^r \Omega(0). \quad (13) \end{aligned}$$

又因为 $0 < \alpha \leq 1$, $0 < u \leq 1$, 经证明有 $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} > 0$ 和 $\frac{\partial \Psi}{\partial u} > 0$ 成立, 得出 $\Omega(r)$ 关于 α 和 u 分别单调递增.

由式(9)给出的 $\Omega(r)$ 与 $\eta_{m,n}$ 的关系, 结合以上的结论可以看出, 颗粒物凝聚概率 η 会分别随着非线性项 $\alpha \sin(\eta)$ 和源项 u 的增大而增大. 对于系统(6), 当源项 u 的作用区域为圆形区域(r 为半径), u 的取值分别是常数与随机数(在区间 $(0, 1]$ 内的随机数)为例时, 所得的仿真图 9-11 与没有干扰项的仿真图 4 和图 5 的对比, 显而易见, 干扰项以及作用区域的增大对颗粒物的凝聚控制效应比没有干扰项的情况下越来越凝聚, 凝聚后颗粒物密度更大便于沉降, 凝聚也可以有固定方向, 减少凝聚颗粒物表面积复杂度(不足以沉降的颗粒物, 可减少有毒物的吸附量), 体现了控制方法的有效性.

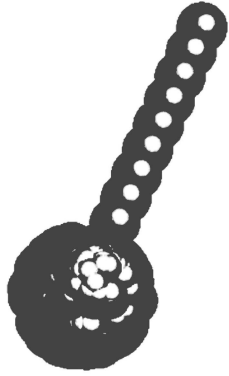


图9 单方向控制

Fig. 9 The control of single direction



图10 多方向控制

Fig. 10 The control of multiple direction

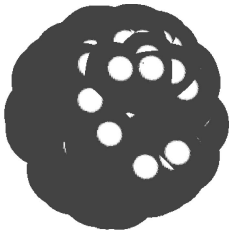


图11 中心质点凝聚控制

Fig. 11 Particles' center point coagulation control

4 碳烟颗粒物凝聚控制的意义(The meaning of condensed control of the soot particles)

颗粒物的分形结构与颗粒物的粘滞阻力和吸附性有密切的联系,文献[17]研究了颗粒物在下降过程中受到的粘滞阻力与分形结构有关,具有分形结构的颗粒将比同体积的球状粒子受到更大,分维数越大,颗粒物受到的粘滞阻力越小,进而微粒子更加快速的沉降,即沉降的速率增大.控制前图4和图5颗粒物的分维数分别为2.029和2.236,控制后图11颗粒物的分维数为2.3273,显然图11颗粒物的粘滞阻力减小,有利于颗粒物的沉降.

颗粒物的分维数直接影响其表面吸附作用,据Pfeifer提出:单层饱和吸附分子数 N_m 与吸附分子截面积 S_m 之间的关系为^[18]

$$N_m = \xi(S_m)^{(-\frac{D_f}{2})}, \quad (14)$$

其中: ξ 是比例系数, D_f 是颗粒物的分维数.若吸附分子质量为 M ,密度为 ρ ,考虑到吸附量 Q' :

$$Q' = N_m \frac{M}{\rho}. \quad (15)$$

将式(14)代入式(15),则有

$$Q' = \xi \frac{M}{\rho} (S_m)^{(-\frac{D_f}{2})}.$$

显然,大气颗粒物对有毒气颗粒物有吸附性,不仅仅与气体分子的构成和化学性质有关外,还与颗粒表面的分维数息息相关.颗粒物表面的粗糙程度也影响大气中有毒气体的吸附,分维数越大对有毒颗粒物的吸附越强,从而较大程度的影响人体健康.

控制后的图11颗粒物能吸附较多有毒颗粒物,使其控制后沉降,减少了环境污染.另外,如果颗粒物控制后仍不能沉降的可吸入颗粒物,就将其控制为图9(分维数为2.029)和图10(分维数分别为2.021, 2.031和2.038)的形状结构,以便减少颗粒物对有毒颗粒的吸附,减少对人体健康的危害.

5 结论(Conclusions)

柴油机碳烟颗粒物的凝聚分形生长分析与其控制,为颗粒物捕捉器的研发提供了一个新的思路,也为减少环境污染提供了一个新的解决方法,是一个符合现实国情的新的解决方法,是一个重要的且具有现实意义的重要问题.本文针对柴油机碳烟颗粒物凝聚分形生长模型进行了控制,首先根据模型分析结果预测碳烟颗粒物凝聚分形生长的趋势或方向,可通过改变外界干扰项的大小与作用方向/趋势得到相应的控制,降低颗粒物的粘结性以便于沉降捕捉,在降低颗粒物粘滞阻力的同时增大了沉降颗粒物的分维,从而增加了沉降颗粒物对大气中有毒气颗粒的吸附性,亦即增强了沉降颗粒物的致毒性,在捕捉沉降颗粒物的同时减少了大气中有毒气体的浓度,以便于捕捉器收集或自然沉降,减少环境污染.

如果颗粒物不能沉降,可经过控制后减少可吸入颗粒物对有毒颗粒的吸附,进而减少对人体健康的危害.本文以正弦三角函数形式的非线性以及作用区域是圆域的源项组成的外界因素(温度、电磁)对柴油碳烟微粒的凝聚分形生长趋势进行了控制.数值仿真表明此种方法是可行、有效的,这将有助于理解和分析实际碳烟颗粒物凝聚生长的物理机制和动力学行为,为降低可吸入性柴油颗粒物的排放提供思路.

参考文献(References):

- [1] JIANG Deming. *The Internal Combustion Engine Combustion and Emissions* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001.
(蒋德明. 内燃机燃烧与排放学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.)
- [2] LIU Zhaorong, CHEN Zhongming, ZHAO Guangying, et al. *Environmental Chemistry Course* [M]. Beijing: Chemical Industry Press,

2003.
(刘兆荣, 陈忠明, 赵广英, 等. 环境化学教程 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2003.)
- [3] KITTELSON D B. Engines and nanoparticles: a review [J]. *Journal of Aerosol Science*, 1998, 29(5/6): 575 – 588.
- [4] XIE Maozhao. *The Computational Combustion Theory of the Internal Combustion Engine* [M]. Dalian: Dalian Institute of Technology Press, 2005.
(解茂昭. 内燃机计算燃烧学 [M]. 大连: 大连理工出版社, 2005.)
- [5] BALTHASAR M, FRENKLACH M. Monte-carlo simulation of soot particle coagulation and aggregation: the effect of a realistic size distribution [J]. *Proceedings of the Combustion*, 2005, 30(1): 1467 – 1475.
- [6] ZHANG Li, LIU Shutang. Directed control for fractal growth with environmental disturbance [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(12): 1786 – 1790.
(张丽, 刘树堂. 环境干扰下分形生长的定方位控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(12): 1786 – 1790.)
- [7] LIU Ping, LIU Shutang. Nonlinear generalized synchronization of two different spatial Julia sets [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1159 – 1164.
(刘平, 刘树堂. 不同空间Julia集的非线性广义同步 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(9): 1159 – 1164.)
- [8] TREE D R, SVENSSON K I. Soot processes in compression ignition engines [J]. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2007, 33(3): 272 – 309.
- [9] LIU Y, TAO F, FOSTER D E, et al. Application of a multiple-step phenomenological soot model to HSDT diesel multiple injection modeling [C] // *The World Congress and Exhibition of the Society of Automotive Engineers*. Detroit, Michigan: SAE International, 2005.
- [10] KENNEDY I M. Models of soot formation and oxidation [J]. *Progress in Energy and Combustion Science*, 1997, 23(2): 95 – 132.
- [11] WEI Mingrui, ZHANG Huiya, KONG Liang, et al. Numerical simulation for the growth of diesel particulate matter and its influential factor analysis [J]. *Advances in Natural Science*, 2008, 9(18): 1028 – 1033.
(魏明锐, 张辉亚, 孔亮, 等. 柴油机微粒生长数值模拟及其影响因素分析 [J]. 自然科学进展, 2008, 9(18): 1028 – 1033.)
- [12] PITSCH H, WAN Y, PETERS N. Numerical investigation of soot formation and oxidation under diesel engine conditions [C] // *1995 Sae International Fall Fuels and Lubricants Meeting and Exhibition*. Toronto, Canada: Society of Automotive Engineers, 1995.
- [13] WITTEN T A, SANDER L M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon [J]. *Physical Review Letters*, 1981, 47(19): 1400 – 1404.
- [14] ZHANG Jizhong. *Fractal* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2011.
(张济忠. 分形 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.)
- [15] KAZAKOV A, FRENKLACH M. Dynamic method modeling of soot particle coagulation and aggregation: implementation premixed flames with the of moments and application to high-pressure laminar [J]. *Combustion and Flame*, 1998, 114(3): 484 – 501.
- [16] ZHANG Li, LIU Shutang. Control of thermal diffusion fractal growth of thin plate under environmental disturbance [J]. *Aata Physica Sinica*, 2010, 59(11): 7708 – 7712.
(张丽, 刘树堂. 薄板热扩散分形生长的环境干扰控制 [J]. 物理学报, 2010, 59(11): 7708 – 7712.)
- [17] CHARLES C K, LEE C C. On the aerodynamic behavior of fractal agglomerates [J]. *Journal of Aerosol Science*, 1997, 28(2): 513 – 514.
- [18] PFEIFER P, AVNIR D. Chemistry in noninteger dimensions between two and three, I: fractal theory of heterogeneous surfaces [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1983, 79(7): 3558 – 3565

作者简介:

刘平 (1983–), 女, 副教授, 目前研究方向为智能控制、混沌系统和分形的控制及其应用, E-mail: liuping@sdau.edu.cn;

李敬 (1989–), 女, 研究方向为农业信息化, E-mail: 1043035014@qq.com;

侯加林 (1963–), 男, 教授, 研究方向为农业机械与装备, E-mail: jlhou@sdau.edu.cn.