

# 时滞状态反馈下离散时滞系统 $H_\infty$ 控制器失效时间分析

聂 宏<sup>†</sup>, 桑 红

(辽宁石油化工大学 理学院, 辽宁 抚顺 113001; 辽宁石油化工大学 信息与控制工程学院, 辽宁 抚顺 113001)

**摘要:** 针对控制器存在短暂失效的情形, 研究一类时变时滞离散系统在时滞状态反馈控制下的 $H_\infty$ 控制器失效时间分析问题. 本文的目标是寻求控制器正常工作时间与失效时间的比率应满足的条件以确保系统指数镇定且具有加权 $l_2$ 增益. 为此, 基于切换的思想, 所考虑的系统被转化为一个仅含有两个子系统的切换系统, 其中一个子系统是控制器失效时的不稳定子系统, 另一个是控制器未失效时的稳定子系统. 通过使用多Lyapunov函数及平均驻留时间方法, 给出问题可解的充分条件及时滞状态反馈 $H_\infty$ 切换控制器的设计方案. 仿真算例表明了所得结果的有效性.

**关键词:** 控制器失效; 时滞; 多Lyapunov函数; 平均驻留时间; 加权 $l_2$ 增益; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## H-infinity controller failure time analysis for a class of discrete time-delay systems under delayed state feedback

NIE Hong<sup>†</sup>, SANG Hong

(School of Sciences, Liaoning Shihua University, Fushun Liaoning 113001, China;  
School of Information and Control Engineering, Liaoning Shihua University, Fushun Liaoning 113001, China)

**Abstract:** Based on the delayed state feedback strategy, this paper considers the H-infinity controller failure time analysis problem for a class of discrete time-varying delay systems in the presence of controller temporary failure. The main objective of this brief is to find the conditions of activation time ratio between the normal working time and the failure time of the controller, such that the considered systems are exponentially stabilizable and achieve a weighted  $l_2$ -gain. To address this situation, the discrete time-varying delay systems subjected to controller temporary failure are converted into a class of discrete time-varying delay switched systems incorporating two subsystems, one subsystem is an unstable system without stabilizing controller, and the other subsystem is a stable system with stabilizing controller. By using piecewise Lyapunov function theory and average dwell-time method, sufficient conditions for the problem to be solvable are presented and a delayed state feedback H-infinity switching controller is designed in the form of linear matrix inequalities. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed results.

**Key words:** controller failure; time-delay; piecewise Lyapunov functional; average dwell-time; weighted  $l_2$ -gain; linear matrix inequalities

### 1 引言(Introduction)

时滞现象广泛存在于生物学、生态学、经济学以及工业控制系统中<sup>[1]</sup>, 对系统的性能以及控制系统的分析和设计产生消极的影响, 往往是导致系统不稳定和疲弱表现的主要原因之一. 因此, 近年来, 时滞系统的稳定性分析和控制器设计问题得到了广泛的关注<sup>[2-6]</sup>.

另一方面, 在实际的工业过程中, 由于一些物理或人为的因素, 控制器失效是普遍存在的. 文献[7]指出产生这一现象的原因或者由于系统和控制器之间信

号不能完美地传输(如丢包现象<sup>[8]</sup>), 或者出于经济效益的考虑需要控制器不时地发生中断等等. 一直以来控制器失效问题备受关注, 尤其是执行器部分失效的开关型故障模型<sup>[9-10]</sup>. 近年来, 一类控制器存在短暂失效的故障问题也得到了重视, 这里的失效指的是控制信号短暂地完全中断(即 $u = 0$ ), 且经过一段时间后可恢复正常工作<sup>[11-13]</sup>. 基于多Lyapunov函数方法, 文献[11]研究了控制器失效下线性时不变(linear time invariant, LTI)系统的指数稳定性以及 $H_\infty$ 性能. 通过限制控制器发生失效的频率以及系统运行时间内控

收稿日期: 2016-01-21; 录用日期: 2017-04-19.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: hongnie\_001@163.com; Tel.: +86 13898300150.

本文责任编辑: 段志生.

国家自然科学基金项目(11404154), 辽宁省教育厅科学研究基金项目(L2014151)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (11404154) and Education Department Science Research Foundation of Liaoning Province (L2014151).

制器的不可用率,文献[12]把相应的结论拓展到时变时滞连续系统的 $L_2$ 增益分析中.此外,文献[13]给出了控制器失效下离散时滞系统指数稳定的充分条件,但只考虑了常时滞的情形且未对系统进行 $H_\infty$ 性能分析.

目前,关于时变时滞离散系统基于时滞状态反馈 $H_\infty$ 控制器失效时间分析的研究还鲜有报道.本文将研究这一问题.首先,基于切换的思想,利用一类时变时滞离散切换系统来描述伴有控制器短暂失效的时变时滞离散系统.然后,基于多Lyapunov函数及平均驻留时间方法,给出确保系统指数稳定且具有加权 $l_2$ 增益的充分条件,并基于线性矩阵不等式建立时滞状态反馈 $H_\infty$ 切换控制器的求解方案.本文将文献[13]的相应结论拓展到具有时变时滞的离散系统,还给出系统具有加权 $l_2$ 增益的分析,这是以往离散系统控制器失效的相关文献中没有涉及的.当系统不存在控制器失效时,加权 $l_2$ 增益将退化为标准的 $l_2$ 增益.最后以仿真算例验证了所得结果的有效性.

## 2 问题描述(Problem description)

考虑如下一类时变时滞的线性系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d(k)) + \\ \quad B_1 u(k) + D_1 \omega(k), \\ z(k) = Cx(k) + C_d x(k-d(k)) + \\ \quad B_2 u(k) + D_2 \omega(k), \\ x(k) = \varphi(k), k \in M = \{-d_M, -d_M + 1, \dots, 0\}, \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  为状态,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  为控制输入,  $\omega(k) \in \mathbb{R}^p$  为属于 $l_2[0, \infty)$ 的扰动输入,  $z(k) \in \mathbb{R}^q$  为被控输出,  $A, A_d, B_1, B_2, C, C_d, D_1, D_2$  为适当维数的常值矩阵,  $\varphi(k)$  为初始状态,  $d(k)$  为时滞且满足

$$d_m \leq d(k) \leq d_M, \quad (2)$$

其中 $d_m$ 和 $d_M$ 分别表示时滞 $d(k)$ 的下界和上界.

设计状态反馈控制器

$$u(k) = K_1 x(k) + K_2 x(k-d(k)), \quad (3)$$

其中 $K_1, K_2$ 为状态反馈增益矩阵.

考虑到控制器存在失效( $u=0$ )的情形,则在状态反馈控制器(3)作用下,系统(1)的闭环系统可视为一个含有两个子系统的切换系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\sigma(k)} x(k) + A_{d\sigma(k)} x(k-d(k)) + \\ \quad D_1 \omega(k), \\ z(k) = C_{\sigma(k)} x(k) + C_{d\sigma(k)} x(k-d(k)) + \\ \quad D_2 \omega(k), \\ x(k) = \varphi(k), k = -d_M, -d_M + 1, \dots, 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\sigma(k) : \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \{1, 2\}$  为切换信号, 表示一个关于时间的分段常值函数;  $\sigma(k) = i$  表示在 $k$ 时刻

第 $i$ 个子系统处于激活状态;

$$\begin{aligned} A_1 &= A + B_1 K_1, A_2 = A, \\ A_{d1} &= A_d + B_1 K_2, A_{d2} = A_d, \\ C_1 &= C + B_2 K_1, C_2 = C, \\ C_{d1} &= C_d + B_2 K_2, C_{d2} = C_d. \end{aligned}$$

在系统运行的整个区间段 $[k_0, k)$ 内,假设

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & k \in [k_{h-1} + \Delta_h, k_h), \\ 2, & k \in [k_h, k_h + \Delta_h), \end{cases} \quad (5)$$

$\Delta_h$ 为系统运行过程中控制器发生失效的时间,  $h = 1, 2, \dots$ . 这里取 $\Delta_0 = 0$ .

**注1** 在式(3)中,当 $K_2 = 0$ ,称为无记忆状态反馈控制器;当 $K_2 \neq 0$ ,称为时滞状态反馈控制器.由于利用了系统时滞状态的部分信息,后者相较于前者具有更好的性能<sup>[4]</sup>.

本文旨在设计一个基于时间的切换策略及控制器增益 $K_1, K_2$ ,使系统(4)是指数稳定的且满足给定的 $H_\infty$ 性能指标.为此,引入如下的定义及引理.

**定义1**<sup>[13]</sup> 如果当 $\omega(k) = 0$ 时,存在常数 $\delta \geq 1$ 和 $\lambda > 0$ 使得系统的任意解 $x(k)$ 满足

$$\|x(k)\| \leq \delta e^{-\lambda(k-k_0)} \|x(k_0)\|_c, \quad (6)$$

则称系统(4)在切换信号 $\sigma(k)$ 下是指数稳定的.其中

$$\|x(k_0)\|_c = \sup_{\varepsilon \in M} \{\|x(\varepsilon)\|, \|x(\varepsilon+1) - x(\varepsilon)\|\},$$

$e^{-\lambda}$ 称为衰减率.

**定义2**<sup>[14]</sup> 给定常数 $0 < \alpha < 1, \gamma_s > 0$ ,如果在零初始条件下,对 $\forall \omega(s) \in l_2[0, \infty)$ 有

$$\sum_{s=k_0}^{\infty} \alpha^{(s-k_0)} z^T(s) z(s) \leq \gamma_s^2 \sum_{s=k_0}^{\infty} \omega^T(s) \omega(s) \quad (7)$$

成立,则称系统(4)在切换信号 $\sigma(k)$ 下具有加权 $l_2$ 增益 $\gamma_s$ ,或具有加权 $H_\infty$ 性能 $\gamma_s$ .

**定义3**<sup>[5]</sup> 对任意切换信号 $\sigma(k)$ ,以及 $K > k > k_0, N_\sigma(k, K)$ 表示在时间段 $(k, K)$ 上的切换次数.如果存在 $N_0 \geq 0, \tau_a > 0$ 使得

$$N_\sigma(k, K) \leq N_0 + \frac{K-k}{\tau_a}. \quad (8)$$

那么,称 $\tau_a$ 为平均驻留时间, $N_0$ 为抖振界.为讨论方便起见,本文选取 $N_0 = 0$ .

**定义4** 在 $[k_0, k)$ 内,令 $T_1(k_0, k), T_2(k_0, k)$ 分别表示控制器未发生失效的总时间、发生失效的总时间, $N_i(k_0, k)$ 表示切换到第 $i$ 个子系统的次数,  $i \in \{1, 2\}$ .

**引理1**<sup>[15]</sup> 对任意对称实矩阵 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}, T \geq 0$ ,向量值函数 $\eta(k) = x(k+1) - x(k)$ ,有

$$-(d_M - d_m) \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} \eta^T(i) T \eta(i) \leq$$

$$\begin{bmatrix} x(k-d_m) \\ x(k-d_M) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -T & T \\ T & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-d_m) \\ x(k-d_M) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

### 3 主要结果(Main results)

利用多Lyapunov函数方法, 给出系统(4)指数稳定且具有加权l<sub>2</sub>增益γ<sub>s</sub>的充分条件.

**定理 1** 给定任意常数α, β, γ > 0, 如果存在矩阵P<sub>i</sub> > 0, Q<sub>i</sub> > 0, R<sub>i</sub> > 0, i ∈ {1, 2}使得

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \psi_{11} & * \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

其中:

$$\psi_{11} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & * & * & * \\ 0 & -e^{-\alpha d_M} Q_1 & * & * \\ e^{-\alpha d_M} R_1 & 0 & -d_M^{-1} e^{-\alpha d_M} R_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\psi_{21} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{d1} & 0 & D_1 \\ A_1 - I & A_{d1} & 0 & D_1 \\ C_1 & C_{d1} & 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

$$\psi_{22} = \text{diag}\{-P_1^{-1} \quad -d_M^{-1} R_1^{-1} \quad -I\},$$

$$\Phi_{11} = \begin{bmatrix} \Theta_2 & * & * & * \\ 0 & -e^{\beta d_m} Q_2 & * & * \\ e^{\beta} R_2 & 0 & -d_M^{-1} e^{\beta} R_2 & * \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{21} = \begin{bmatrix} A_2 & A_{d2} & 0 & D_1 \\ A_2 - I & A_{d2} & 0 & D_1 \\ C_2 & C_{d2} & 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{22} = \text{diag}\{-P_2^{-1} \quad -d_M^{-1} R_2^{-1} \quad -I\},$$

$$\Theta_1 = \tau Q_1 - e^{-\alpha} P_1 - d_M^{-1} e^{-\alpha d_M} R_1,$$

$$\Theta_2 = \tau Q_2 - e^{\beta} P_2 - d_M^{-1} e^{\beta} R_2,$$

$$\tau = d_M - d_m + 1,$$

那么, 对任意0 < ε < ε\* < α, 系统(4)对满足条件

$$\tau_a \geq \tau_a^* = \frac{\ln(\mu\theta)}{2(\varepsilon^* - \varepsilon)}, \quad (12)$$

$$\inf_{k>k_0} \frac{T_1(k_0, k)}{T_2(k_0, k)} \geq \frac{\beta + \varepsilon^*}{\alpha - \varepsilon^*} \quad (13)$$

的任意切换信号都是指数稳定的且具有加权l<sub>2</sub>增益

$$\gamma_s = \gamma \sqrt{\frac{e^{\varepsilon^*} (1 - e^{-\alpha})}{e^{\alpha} (1 - e^{-\varepsilon^*})}},$$

其中: θ = μe<sup>(α+β)(d<sub>M</sub>-1)</sup>, μ ≥ 1满足

$$P_i \leq \mu P_j, Q_i \leq \mu Q_j, R_i \leq \mu R_j, i, j \in \{1, 2\}, \quad (14)$$

且系统(4)的状态估计满足

$$\|x(k)\|^2 \leq \frac{1}{a} V_{\beta}(k) \leq \frac{b}{a} e^{-\varepsilon(k-k_0)} \|x(k_0)\|_c^2, \quad (15)$$

$$\begin{cases} a = \min\{\lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_2)\}, \\ b = \lambda_{\max}(P_1) + d_M \tau \lambda_{\max}(Q_1) + d_M^2 \lambda_{\max}(R_1). \end{cases} \quad (16)$$

**证** 当k ∈ [k<sub>h-1</sub> + Δ<sub>h-1</sub>, k<sub>h</sub>)时, 控制器未发生失效, 即系统(4)的第1个子系统被激活. 选取Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$\begin{cases} V_{\alpha}(k) = V_{\alpha 1} + V_{\alpha 2} + V_{\alpha 3} + V_{\alpha 4}, \\ V_{\alpha 1} = x^T(k) P_1 x(k), \\ V_{\alpha 2} = \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} e^{-\alpha(k-l-1)} x^T(l) Q_1 x(l), \\ V_{\alpha 3} = \sum_{j=-d_M+1}^{-d_m+1} \sum_{l=k+j-1}^{k-1} e^{-\alpha(k-l-1)} x^T(l) Q_1 x(l), \\ V_{\alpha 4} = \sum_{j=-d_M}^{-1} \sum_{l=k+j}^{k-1} e^{-\alpha(k-l-1)} \eta^T(l) R_1 \eta(l), \end{cases} \quad (17)$$

其中P<sub>1</sub>, Q<sub>1</sub>, R<sub>1</sub>为待设计的正定矩阵.

定义ΔV<sub>α</sub> = V<sub>α</sub>(k + 1) - e<sup>-α</sup>V<sub>α</sub>(k), 则有

$$\Delta V_{\alpha 1} = x^T(k+1) P_1 x(k+1) - e^{-\alpha} x^T(k) P_1 x(k). \quad (18)$$

由于

$$\begin{aligned} & \sum_{l=k-d(k+1)+1}^k e^{\alpha(l-k)} x^T(l) Q_1 x(l) \leq \\ & \sum_{l=k-d_M+1}^{k-d_m} e^{\alpha(l-k)} x^T(l) Q_1 x(l) + \\ & \sum_{l=k-d(k)+1}^k e^{\alpha(l-k)} x^T(l) Q_1 x(l), \end{aligned} \quad (19)$$

利用式(19), 可得

$$\begin{aligned} \Delta V_{\alpha 2} \leq & x^T(k) Q_1 x(k) + \sum_{l=k-d_M+1}^{k-d_m} e^{-\alpha(k-l)} x^T(l) Q_1 x(l) - \\ & e^{-\alpha d_M} x^T(k-d(k)) Q_1 x(k-d(k)), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta V_{\alpha 3} = (d_M - d_m) x^T(l) Q_1 x(l) - \sum_{l=k-d_M+1}^{k-d_m} e^{-\alpha(k-l)} x^T(l) Q_1 x(l), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{\alpha 4} \leq & d_M \eta^T(k) R_1 \eta(k) - \\ & e^{-\alpha d_M} \sum_{l=k-d_M}^{k-1} \eta^T(l) R_1 \eta(l). \end{aligned} \quad (22)$$

综合引理1和式(18)–(22)可得

$$\Delta V_{\alpha} + z_1^T(k) z_1(k) - \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k) \leq$$

$$\xi^T(k)\Xi_1\xi(k), \tag{23}$$

其中:

$$\xi(k)=[x^T(k), x^T(k-d(k)), x^T(k-d_M), \omega^T(k)]^T.$$

则由式(10)以及Schur补引理<sup>[16]</sup>可得

$$\Delta V_\alpha(k) + z_1^T(k)z_1(k) - \gamma^2\omega^T(k)\omega(k) \leq 0, \tag{24}$$

从而当 $\omega(k) = 0$ 时,有

$$V_\alpha(k+1) - e^{-\alpha}V_\alpha(k) \leq 0. \tag{25}$$

当 $k \in [k_h, k_h + \Delta_h)$ 时,控制器发生失效,即系统(4)的第2个子系统被激活.选取Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$\begin{cases} V_\beta(k) = V_{\beta 1} + V_{\beta 2} + V_{\beta 3} + V_{\beta 4}, \\ V_{\beta 1} = x^T(k)P_2x(k), \\ V_{\beta 2} = \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} e^{\beta(k-l-1)}x^T(l)Q_2x(l), \\ V_{\beta 3} = \sum_{j=-d_M+1}^{-1} \sum_{l=k+j}^{k-1} e^{\beta(k-l-1)}x^T(l)Q_2x(l), \\ V_{\beta 4} = \sum_{j=-d_M}^{-1} \sum_{l=k+j}^{k-1} e^{\beta(k-l-1)}\eta^T(l)R_2\eta(l). \end{cases} \tag{26}$$

定义

$$\Delta V_\beta = V_\beta(k+1) - e^\beta V_\beta(k),$$

同理可得

$$\begin{aligned} \Delta V_\beta + z_2^T(k)z_2(k) - \gamma^2\omega^T(k)\omega(k) \leq \\ \xi^T(k)\Xi_2\xi(k), \end{aligned} \tag{27}$$

故由式(11)及Schur补引理可得

$$\Delta V_\beta(k) + z_2^T(k)z_2(k) - \gamma^2\omega^T(k)\omega(k) \leq 0, \tag{28}$$

从而当 $\omega(k) = 0$ 时,有

$$V_\beta(k+1) - e^\beta V_\beta(k) \leq 0. \tag{29}$$

由式(5)(17)和式(26)知

$$V(k) = \begin{cases} V_\alpha(k), & k \in [k_{h-1} + \Delta_{h-1}, k_h), \\ V_\beta(k), & k \in [k_h, k_h + \Delta_h). \end{cases} \tag{30}$$

此外,根据式(14),可以很容易得出

$$V_\alpha \leq \mu V_\beta, V_\beta \leq \theta V_\alpha, \tag{31}$$

其中 $\theta = \mu e^{(\alpha+\beta)(d_M-1)}$ .

不失一般性,假设 $k \in [k_h + \Delta_h, k_{h+1})$ ,进而结合式(25)和式(29)–(31)有

$$\begin{aligned} V(k) &\leq e^{-\alpha T_1(k_h+\Delta_h,k)}V(k_h + \Delta_h) \leq \\ &\mu e^{-\alpha T_1(k_h+\Delta_h,k)}e^{\beta T_2(k_h,k)}V(k_h) \leq \\ &\mu\theta e^{-\alpha T_1(k_{h-1}+\Delta_{h-1},k)}e^{\beta T_2(k_h,k)} \times \\ &V(k_{h-1} + \Delta_{h-1}) \dots \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^{N_1(k_0,k)}\theta^{N_2(k_0,k)}e^{-\alpha T_1(k_0,k)}e^{\beta T_2(k_0,k)}V(k_0) \leq \\ e^{\ln(\mu\theta)\frac{N_\alpha(k_0,k)}{2}-\alpha T_1(k_0,k)+\beta T_2(k_0,k)}V(k_0). \end{aligned}$$

由于系统(4)中存在不稳定子系统,为了确保其指数稳定,对任意常数 $\varepsilon \in (0, \alpha)$ ,令

$$\inf_{k>k_0} \frac{T_1(k_0,k)}{T_2(k_0,k)} \geq \frac{\beta + \varepsilon^*}{\alpha - \varepsilon^*}, \varepsilon^* \in (\varepsilon, \alpha). \tag{32}$$

根据 $T_1(k_0,k) + T_2(k_0,k) = k - k_0$ ,故

$$-\alpha T_1(k_0,k) + \beta T_2(k_0,k) \leq -\varepsilon^*(k - k_0). \tag{33}$$

综合以上,由定义3、式(12)和式(33)可知

$$V(k) \leq e^{-\varepsilon(k-k_0)}V(k_0). \tag{34}$$

由式(16)–(17)和(26)知 $a\|x(k)\|^2 \leq V(k), V(k_0) \leq b\|x(k_0)\|_c^2$ ,结合使用式(34)可以推出

$$\|x(k)\|^2 \leq \frac{1}{a}V(k) \leq \frac{b}{a}e^{-\varepsilon(k-k_0)}\|x(k_0)\|_c^2. \tag{35}$$

因此,根据定义1可知,切换系统(4)是指数稳定的.

当 $\omega(k) \neq 0$ 时,以下对系统(4)进行加权 $H_\infty$ 性能分析.根据式(5)(24)和式(28)知

$$V(k+1) \leq \begin{cases} e^{-\alpha(k-k_{h-1}-\Delta_{h-1})}V(k) - \Gamma(k), \\ \quad k \in [k_{h-1} + \Delta_{h-1}, k_h), \\ e^{\beta(k-k_h)}V(k) - \Gamma(k), \\ \quad k \in [k_h, k_h + \Delta_h), \end{cases} \tag{36}$$

其中 $\Gamma(k) = z^T(k)z(k) - \gamma^2\omega^T(k)\omega(k)$ .则对 $\forall k \in [k_h + \Delta_h, k_{h+1})$ ,有

$$\begin{aligned} V(k) &\leq e^{-\alpha T_1(k_h+\Delta_h,k)}V(k_h + \Delta_h) - \\ &\sum_{s=k_h+\Delta_h}^{k-1} e^{-\alpha T_1(s+1,k)}\Gamma(s) \leq \\ &\mu e^{-\alpha T_1(k_h+\Delta_h,k)}e^{\beta T_2(k_h,k)}V(k_h) - \\ &\sum_{s=k_h+\Delta_h}^{k-1} e^{-\alpha T_1(s+1,k)}\Gamma(s) - \\ &\sum_{s=k_h}^{k_h+\Delta_h-1} \mu e^{-\alpha T_1(s+1,k)}e^{\beta T_2(s+1,k)}\Gamma(s) \leq \dots \leq \\ &\mu^{N_1(k_0,k)}\theta^{N_2(k_0,k)}e^{-\alpha T_1(k_0,k)}e^{\beta T_2(k_0,k)}V(k_0) - \\ &\mu^{N_1(k_0,k)}\theta^{N_2(k_0,k)}\sum_{s=k_0}^{k_1-1} e^{-\alpha T_1(s+1,k)} \times \\ &e^{\beta T_2(s+1,k)}\Gamma(s) - \dots - \\ &\mu \sum_{s=k_h}^{k_h+\Delta_h-1} e^{-\alpha T_1(s+1,k)}e^{\beta T_2(s+1,k)}\Gamma(s) - \\ &\sum_{s=k_h+\Delta_h}^{k-1} e^{-\alpha T_1(s+1,k)}e^{\beta T_2(s+1,k)}\Gamma(s). \end{aligned}$$

在零初始条件下, 由  $V(k_0) = 0$  和  $V(k) \geq 0$  可得

$$\sum_{s=k_0}^{k-1} \mu^{N_1(s,k)} \theta^{N_2(s,k)} e^{-\alpha T_1(s+1,k) + \beta T_2(s+1,k)} z^T(s) z(s) \leq \sum_{s=k_0}^{k-1} \mu^{N_1(s,k)} \theta^{N_2(s,k)} e^{-\alpha T_1(s+1,k) + \beta T_2(s+1,k)} \times \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s).$$

由于  $0 < e^{-\varepsilon^*} < 1$ , 将式(33)代入上式, 同时在上式两边乘以  $\mu^{-N_1(k_0,k)} \theta^{-N_2(k_0,k)}$  可得

$$\sum_{s=k_0}^{k-1} \mu^{-N_1(k_0,s)} \theta^{-N_2(k_0,s)} e^{-\alpha(k-s-1)} z^T(s) z(s) \leq \sum_{s=k_0}^{k-1} \mu^{-N_1(k_0,s)} \theta^{-N_2(k_0,s)} e^{-\varepsilon^*(k-s-1)} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s).$$

此外, 当  $k \in [k_h + \Delta_h, k_{h+1})$  时, 有

$$N_1(k_0, s) = N_2(k_0, s) = \frac{N_\sigma(k_0, s)}{2},$$

$$e^{\ln(\mu\theta) \frac{-N_\sigma(k_0, s)}{2}} < 1.$$

由此推出

$$\sum_{s=k_0}^{k-1} e^{\ln(\mu\theta) \frac{-N_\sigma(k_0, s)}{2}} e^{-\alpha(k-s-1)} z^T(s) z(s) \leq \sum_{s=k_0}^{k-1} e^{-\varepsilon^*(k-s-1)} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s) \Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{s=k_0}^{k-1} e^{-(\varepsilon^* - \varepsilon)(s-k_0)} e^{-\alpha(k-s-1)} z^T(s) z(s) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{s=k_0}^{k-1} e^{-\varepsilon^*(k-s-1)} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s) \Leftrightarrow \sum_{s=k_0}^{\infty} \sum_{k=s}^{\infty} e^{-(\varepsilon^* - \varepsilon)(s-k_0)} e^{-\alpha(k-s-1)} z^T(s) z(s) \leq \sum_{s=k_0}^{\infty} \sum_{k=s}^{\infty} e^{-\varepsilon^*(k-s-1)} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s) \Leftrightarrow \sum_{s=k_0}^{\infty} e^{-(\varepsilon^* - \varepsilon)(s-k_0)} z^T(s) z(s) \leq \sum_{s=k_0}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon^*} (1 - e^{-\alpha})}{e^{\alpha} (1 - e^{-\varepsilon^*})} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s)$$

由于  $0 < e^{-(\varepsilon^* - \varepsilon)} < 1$ , 因此, 根据定义2可知, 在切换信号  $\sigma(k)$  下系统(4)具有加权  $l_2$  增益  $\gamma_s$ , 且

$$\gamma_s = \gamma \sqrt{\frac{e^{\varepsilon^*} (1 - e^{-\alpha})}{e^{\alpha} (1 - e^{-\varepsilon^*})}}.$$

证毕.

**注 2** 当控制器不发生失效时, 如果不等式(10)成立, 则加权  $l_2$  增益  $\gamma_s$  退化为标准的  $l_2$  增益  $\gamma$ .

**注 3** 当  $k \in [k_h, k_h + \Delta_h)$  时, 有  $N_1(k_0, k) + 1 = N_2(k_0, k)$ , 即  $N_1(k_0, k) = \frac{N_\sigma(k_0, k) - 1}{2}$ ,  $N_2(k_0, k) = \frac{N_\sigma(k_0, k) + 1}{2}$ . 此时, 定理1的结论同样成立.

**注 4** 当  $d_m = d_M$ ,  $\omega(k) = 0$  时, 定理1的结论同样适

用于文献[13]所考虑的常时滞无扰动系统, 且本文所设计切换策略为时滞相关的, 相较于文献[13]时滞无关的切换策略具有更小的保守性. 具体分析见仿真实例部分.

由于定理1给出的条件不便于求解, 下面将定理中的矩阵不等式转化为线性矩阵不等式的形式.

**定理 2** 给定任意常数  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ , 如果存在矩阵  $\tilde{P}_i > 0, \tilde{Q}_i > 0, \tilde{R}_i > 0$  以及  $Y_i, i \in \{1, 2\}$  使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{11} & * \\ \tilde{\psi}_{21} & \tilde{\psi}_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{37}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & * \\ \tilde{\Phi}_{21} & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{38}$$

其中:

$$\tilde{\psi}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_1 & * & * & * \\ 0 & -e^{-\alpha d_M} \tilde{Q}_1 & * & * \\ e^{-\alpha d_M} I & 0 & -d_M^{-1} e^{\alpha d_M} \tilde{R}_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\psi}_{21} = \begin{bmatrix} A\tilde{R}_1 + B_1 Y_1 & A_d \tilde{R}_1 + B_1 Y_2 & 0 & D_1 \\ A\tilde{R}_1 + B_1 Y_1 - \tilde{R}_1 & A_d \tilde{R}_1 + B_1 Y_2 & 0 & D_1 \\ C\tilde{R}_1 + B_2 Y_1 & C_d \tilde{R}_1 + B_2 Y_2 & 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\psi}_{22} = \text{diag}\{-\tilde{P}_1 - d_M^{-1} \tilde{R}_1 - I\},$$

$$\tilde{\Phi}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_2 & * & * & * \\ 0 & -e^{\beta d_M} \tilde{Q}_2 & * & * \\ e^{\beta} I & 0 & -d_M^{-1} e^{\beta} \tilde{R}_2 & * \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_{21} = \begin{bmatrix} A\tilde{R}_2 & A_d \tilde{R}_2 & 0 & D_1 \\ A\tilde{R}_2 - \tilde{R}_2 & A_d \tilde{R}_2 & 0 & D_1 \\ C\tilde{R}_2 & C_d \tilde{R}_2 & 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_{22} = \text{diag}\{-\tilde{P}_2 - d_M^{-1} \tilde{R}_2 - I\},$$

$$\tilde{\Theta}_1 = \tau \tilde{Q}_1 + e^{-\alpha} (\tilde{P}_1 - 2\tilde{R}_1) - d_M^{-1} e^{-\alpha d_M} \tilde{R}_1,$$

$$\tilde{\Theta}_2 = \tau \tilde{Q}_2 + e^{\beta} (\tilde{P}_2 - 2\tilde{R}_2) - d_M^{-1} e^{\beta} \tilde{R}_2,$$

那么, 对任意  $0 < \varepsilon < \varepsilon^* < \alpha$ , 系统(4)对满足

$$\tau_a \geq \tau_a^* = \frac{\ln(\tilde{\mu}\tilde{\theta})}{2(\varepsilon^* - \varepsilon)}, \tag{39}$$

$$\inf_{k > k_0} \frac{T_1(k_0, k)}{T_2(k_0, k)} \geq \frac{\beta + \varepsilon^*}{\alpha - \varepsilon^*} \tag{40}$$

的任意切换信号都是指数稳定的并具有加权  $l_2$  增益

$$\gamma_s = \gamma \sqrt{\frac{e^{\varepsilon^*} (1 - e^{-\alpha})}{e^{\alpha} (1 - e^{-\varepsilon^*})}},$$

控制器增益矩阵  $K_1 = Y_1 \tilde{R}_1^{-1}$ ,  $K_2 = Y_2 \tilde{R}_1^{-1}$ , 其中:  $\tilde{\theta} = \tilde{\mu} e^{(\alpha + \beta)(d_M - 1)}$ ,  $\tilde{\mu} \geq 1, \forall i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$  满足

$$\tilde{P}_i \leq \tilde{\mu} \tilde{P}_j, \tilde{Q}_i \leq \tilde{\mu} \tilde{Q}_j, \tilde{R}_i \leq \tilde{\mu} \tilde{R}_j. \tag{41}$$

状态估计满足式(15), 且

$$\begin{cases} a = \min\{\lambda_{\min}(\tilde{P}_1), \lambda_{\min}(\tilde{P}_2)\}, \\ b = \lambda_{\max}(\tilde{P}_1) + d_M \tau \lambda_{\max}(\tilde{Q}_1) + d_M^2 \lambda_{\max}(\tilde{R}_1). \end{cases} \quad (42)$$

证 分别在不等式(10)和式(11)左右两边同时乘以矩阵  $\text{diag}\{R_i^{-1}, R_i^{-1}, R_i^{-1}, I, I, I, I\}$ , 并令  $\tilde{P}_i = P_i^{-1}$ ,  $\tilde{R}_i = R_i^{-1}$ ,  $\tilde{Q}_i = \tilde{R}_i Q_i \tilde{R}_i$ . 由于  $P_i > 0$ , 故有

$$(P_i^{-1} - R_i^{-1})P_i(P_i^{-1} - R_i^{-1}) \geq 0, \quad i \in \{1, 2\},$$

进而可得  $-R_i^{-1}P_iR_i^{-1} \leq P_i^{-1} - 2R_i^{-1}$ . 因此, 从式(37)和式(38)中可以推出式(10)和式(11)成立. 证毕.

**注5** 利用文献[17]中的引理1, 可以很容易地将定理2的结论推广至系统(1)中包含线性分式形式的不确定性的情形.

### 4 仿真实例(Simulation example)

考虑具有如下参数的离散时变时滞系统(1):

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 \\ 0.15 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ -0.1 & 0.03 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1.05 & 2 \\ -3.3 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.6 & -0.23 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.02 & 0.07 \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.26 \\ -0.2 & 0.16 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.13 \\ 0.2 & 0.23 \end{bmatrix}, \\ \omega(k) &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-0.8k} \sin(0.5k)}{k+1} & \frac{e^{-k} \sin(2k)}{k+1} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

根据本文定理2, 选取

$$\begin{aligned} d_m &= 1, \quad d_M = 2, \quad \alpha = 0.17, \\ \beta &= 0.23, \quad \tilde{\mu} = 1.1, \quad \gamma = 0.4025, \end{aligned}$$

利用MATLAB-LMI工具箱求解式(40)–(41), 可得

$$\begin{aligned} K_1 &= Y_1 \tilde{R}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0548 & 0.0179 \\ -0.1540 & 0.1072 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= Y_2 \tilde{R}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0321 & -0.0145 \\ 0.0219 & -0.0131 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

图1给出了  $u = 0$  时系统(1)的状态响应曲线, 显然系统是发散的. 取

$$\varepsilon^* = 0.07 \in (0, 0.17), \quad \varepsilon = 0.01 \in (0, 0.07),$$

解式(39)和式(40)可得

$$\begin{aligned} \inf_{k > k_0} \frac{T_1(k_0, k)}{T_2(k_0, k)} &\geq \frac{\beta + \varepsilon^*}{\alpha - \varepsilon^*} = 3, \\ \tau_a &\geq \tau_a^* = \frac{\ln(\tilde{\mu}\tilde{\theta})}{2(\varepsilon^* - \varepsilon)} = 4.9218, \end{aligned}$$

$$\gamma_s = \gamma \sqrt{\frac{e^{\varepsilon^*}(1 - e^{-\alpha})}{e^{\alpha}(1 - e^{-\varepsilon^*})}} = 0.5822.$$

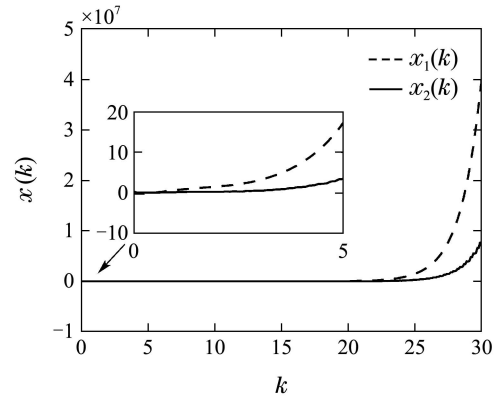


图1  $u = 0$  时系统(1)的状态轨迹

Fig. 1 State trajectories of system (1) with  $u = 0$

图2给出了满足式(39)和式(40)的切换信号示意图. 图3–4分别给出了切换系统(4)在时滞和无记忆状态反馈控制器下的状态轨迹. 从图3与图4的比较可以看出, 系统在本文所设计的时滞状态反馈控制器可使系统更快地趋于稳定. 图5表明切换系统(4)满足加权  $H_\infty$  性能.

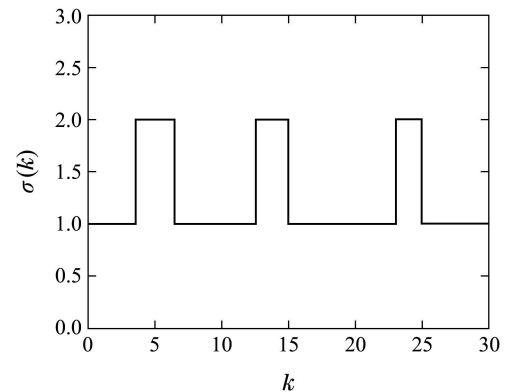


图2 切换信号

Fig. 2 Switching signal

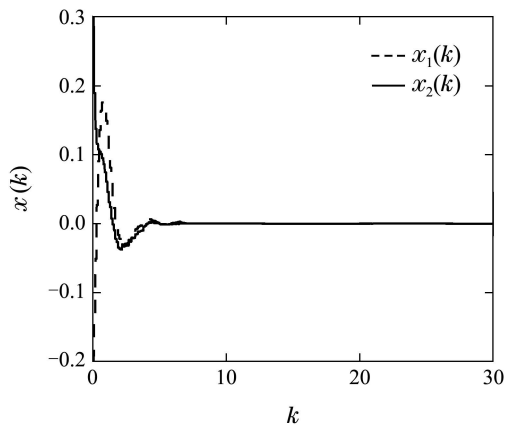


图3 时滞状态反馈控制器下系统(4)的状态轨迹  
Fig. 3 State trajectories of system (4) under delayed state-feedback controller

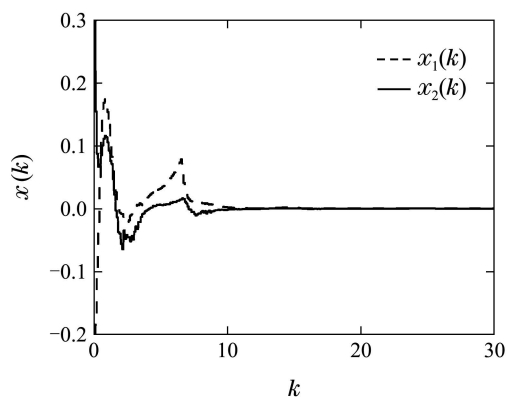


图 4 无记忆状态反馈控制器下系统(4)的状态轨迹  
Fig. 4 State trajectories of system (4) under memoryless state-feedback controller

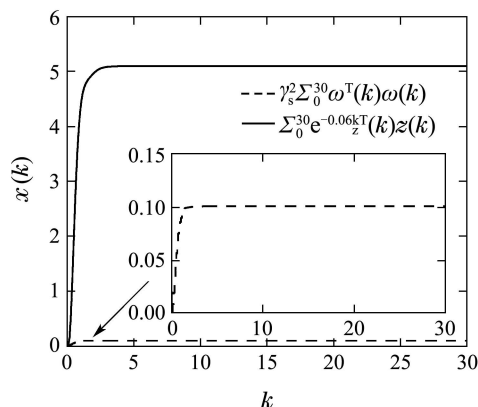


图 5 加权H<sub>∞</sub>性能抑制水平γ<sub>s</sub> = 0.5822  
Fig. 5 The weighted H-infinity performance γ<sub>s</sub> = 0.5822

当 $1 \leq d(k) \leq 2$ , 而 $\tilde{\mu}$ 取不同值时, 分别采用时滞状态反馈和无记忆状态反馈控制策略, 表1给出了使用定理2获得的平均驻留时间 $\tau_a^*$ 的值、 $\gamma$ 和 $\gamma_s$ 的最小值的比照. 从表1可以看出 $\tau_a^*$ 的值随 $\tilde{\mu}$ 的增大而增大, 而 $\gamma$ 和 $\gamma_s$ 的最小值则随之减少. 并且采用时滞状态反馈控制求得的 $\gamma_{\min}$ 和 $\gamma_{s \min}$ 的值更小, 即时滞状态反馈控制相较于无记忆状态反馈控制器具有更好的加权H<sub>∞</sub>性能.

表 1 不同 $\tilde{\mu}$ 下 $\tau_a^*$ 的值和 $\gamma, \gamma_s$ 的最小值  
Table 1 The admissible  $\tau_a^*$  and the minimum  $\gamma$  and  $\gamma_s$  for different  $\tilde{\mu}$

$\tilde{\mu}$	$\tau_a^*$	时滞状态反馈		无记忆状态反馈	
		$\gamma_{\min}$	$\gamma_s \min$	$\gamma_{\min}$	$\gamma_s \min$
1.1	4.9218	0.4025	0.5822	0.4268	0.6174
1.2	6.3720	0.3980	0.5757	0.4194	0.6066
1.3	7.7061	0.3955	0.5721	0.4146	0.5998
1.4	8.9412	0.3937	0.5695	0.4120	0.5960
1.5	10.5967	0.3921	0.5672	0.4103	0.5935

当 $d_m = d_M = d, \omega(k) = 0$ 时, 分别使用本文和文献[13]中的定理2, 表2给出了在 $\tilde{\mu}$ 和 $d(k)$ 的不同值下

获得的平均驻留时间 $\tau_a^*$ 值的比较. 从表2中可以看出, 当 $\tilde{\mu}$ 固定,  $d(k) = d$ 发生变化时, 使用本文方法得到的 $\tau_a^*$ 的值会随着 $d$ 的增大而增大, 而根据文献[13]中的定理2求得的 $\tau_a^*$ 的值为常值, 即本文所设计的基于时间的切换信号是时滞相关的, 相较于文献[13]的结果具有更小的保守性. 当采用文献[13]中的数值例子时, 上述结论仍然成立.

表 2  $\tilde{\mu}$ 和 $d(k)$ 不同值下 $\tau_a^*$ 值的比较  
Table 2 The admissible  $\tau_a^*$  for different  $\tilde{\mu}$  and  $d(k)$

$\tilde{\mu}$	$d(k)$	本文定理2	文献[13]定理2
		$\tau_a^*$	$\tau_a^*$
1.1	1	1.5885	1.5885
	2	4.9218	1.5885
	3	8.2552	1.5885
	4	11.5885	1.5885
	5	14.9218	1.5885
1.5	1	6.7578	6.7578
	2	10.5967	6.7578
	3	13.4244	6.7578
	4	16.7578	6.7578
	5	20.0911	6.7578

### 5 结论(Conclusions)

本文研究了控制器短暂失效下的一类时变时滞离散系统时滞状态反馈H<sub>∞</sub>控制器的设计问题. 本文用一类离散切换系统来刻画所考虑的系统, 基于平均驻留时间以及多Lyapunov函数方法, 给出控制器正常工作时间与失效时间的比值应满足的条件, 使得离散切换系统在所设计的切换策略下是指数镇定的且具有加权l<sub>2</sub>增益. 同时还给出了时滞状态反馈控制器的设计方案及状态衰减度的估计.

### 参考文献(References):

- [1] GU K Q, KAQRITONOV V L, CHEN J. *Stability of Time-delay Systems* [M]. Boston, Birkh dotauser: 2003.
- [2] GONZÁLEZ A. Robust stabilization of linear discrete-time systems with time-varying input delay [J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2919 – 2922.
- [3] YAN Huaicheng, SU Zhenzhen, ZHANG Hao, et al. Quantized H<sub>∞</sub> control for networked control [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(4): 469 – 474.  
(严怀成, 苏阵阵, 张皓, 等. 具有时变时滞和多包丢失的网络控制系统量化H<sub>∞</sub>控制 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(4): 469 – 474.)
- [4] ZHANG L, SHI P, BASIN M. Robust stability of uncertain switched linear discrete time-delay systems [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2008, 2(7): 606 – 614.
- [5] ZHANG W A, YU L. Stability analysis for discrete-time switched time-delay systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(10): 2265 – 2271.
- [6] NIE Hong, ZHAO Jun. Hybrid state feedback H<sub>∞</sub> robust control for a class of time-delay systems with nonlinear uncertainties [J]. *Control*

- Theory & Applications*, 2005, 22(4): 567 – 572.  
(聂宏, 赵军. 一类非线性不确定时滞系统的混杂状态反馈 $H_\infty$ 鲁棒控制 [J]. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 567 – 572.)
- [7] ZHAI G, TAKAI S, YASUDA K. Controller failure time analysis for linear time-invariant systems [J]. *Chemical Communications*, 2000, 36(11): 1050 – 1052.
- [8] MA D, LIU J C. Robust exponential stability for network-based switched control systems [J]. *International Journal of Control Automation & Systems*, 2010, 8(1): 67 – 72.
- [9] XIANG Z, CHEN Q. Robust reliable control for uncertain switched nonlinear systems with time delay under asynchronous switching [J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2010, 216(3): 800 – 811.
- [10] YIN Zuoyou, ZHANG Huaguang. Robust  $H_\infty$  tolerant control for nonlinear systems with uncertainties and time delays based on fuzzy models [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(6): 683 – 686.  
(尹作友, 张化光. 基于模糊模型的非线性不确定时滞系统的 $H_\infty$ 鲁棒容错控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(6): 683 – 686.)
- [11] ZHAI G S, CHEN X K, TAKAI S, et al. Stability and  $H_\infty$  disturbance attenuation analysis for LTI control systems with controller failures [J]. *Asian Journal of Control*, 2004, 6(1): 104 – 111.
- [12] SUN X M, LIU G P, WANG W, et al.  $L_2$ -gain of systems with input delays and controller temporary failure: zero-order hold model [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 19(3): 699 – 706.
- [13] SUN X M, ZHAO J, WANG W. State feedback control for discrete delay systems with controller failures based on average dwell-time method [J]. *IET Control Theory and Application*, 2008, 2(2): 126 – 132.
- [14] XIANG W M, XIAO J. Discussion on “stability,  $l_2$ -gain and asynchronous control of discrete-time switched systems with average dwell time” [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(12): 3259 – 3261.
- [15] ZHANG Y J, XU S Y, ZENG Z P. Novel robust stability criteria of discrete-time stochastic recurrent neural networks with time delay [J]. *Neurocomputing*, 2009, 72(Suppl 13/14/15): 3343 – 3351.
- [16] BOYD S P, EL-GHAOU L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [17] ZHOU S S, FENG G, LAM J, et al. Robust  $H_\infty$  control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions [J]. *Information Sciences*, 2005, 174(3/4): 197 – 217.

#### 作者简介:

聂宏 (1965–), 女, 博士, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为切换系统、非线性系统的混杂控制、模糊系统的混杂自适应控制等, E-mail: hongnie\_001@163.com;

桑红 (1990–), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为切换系统、复杂系统的切换控制等, E-mail: sanghong\_2099@163.com.