

基于秩一摄动理论配置Lyapunov指数的新算法

于永进, 陈旭[†], 程学珍

(山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590)

摘要: 本文提出一种为混沌控制与反控制配置Lyapunov指数的新算法. 该算法利用秩一摄动理论精确摄动离散受控系统矩阵的特征值来配置Lyapunov指数, 使其完全吻合混沌判据. 该算法既能更准确地配置正的Lyapunov指数, 又能配置传统算法无法获得的负Lyapunov指数. 仿真结果显示了新算法的有效性.

关键词: Lyapunov指数; 秩一摄动; 混沌控制; 混沌反控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

A new method of placing Lyapunov exponents via rank one perturbation

YU Yong-jin, CHEN Xu[†], CHENG Xue-zhen

(College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology,
Qingdao Shandong 266590, China)

Abstract: Lyapunov exponents are important metrics to determine chaos in discrete systems. A new algorithm configuring Lyapunov exponents is proposed for chaos control and chaos anti-control. By introducing specific types of feedback and modulus operations, the algorithm uses eigenvalues of the system matrix via rank one perturbations theory to configure Lyapunov exponents. The proposed algorithm is inline with the Lyapunov exponent criterion for chaos. The proposed algorithm is able to accurately configure the positive Lyapunov exponents of chaos control, and the negative Lyapunov exponents that cannot be obtained in traditional algorithms. The simulation results illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Lyapunov exponent; rank one perturbation; chaos control; chaos anti-control

1 引言(Introduction)

混沌控制是指可以通过控制的方法来削弱甚至消除系统中有害的混沌行为. 但混沌并非总是有害的, 混沌特别是离散混沌具有广阔的应用前景. 混沌反控制通常是指通过控制的方法使得原本不是混沌的系统变为混沌, 或增强原系统的混沌行为. 一旦能够产生各种离散混沌, 就能够促进离散混沌在多方面的实际应用, 比如流体混合、心脏病治疗、机械系统中的共振预防、地震震级预测、控制化工反应以及保密通信^[1].

Lyapunov指数是判定离散系统混沌重要特征指标: 如果离散系统的轨道全局有界并且Lyapunov指数全部有限, 其中至少一个为正, 系统就是混沌的; 如果有两个以上为正, 系统就是超混沌的; Lyapunov指数越大, 混沌就越强, 关键是如何配置所需的正Lyapunov指数^[2-3]. 当需要制造混沌时, 只要一个正的Lyapunov指数; 而超混沌只需要两个正的Lyapunov指

数. 在配置Lyapunov指数时, 一方面希望数值配置得相对准确, 另一方面希望符号有足够的灵活性.

现有算法主要存在3个问题: 不够灵活; Lyapunov指数的数值配置得太大; 条件过于苛刻. 较早的有代表性的Chen-Lai算法^[4-5]和Wang-Chen算法^[6-7]都是通过引入某种反馈, 配置受控系统的全部Lyapunov指数为大于某个给定的正数. 因此, Chen-Lai算法和Wang-Chen算法是超混沌化算法, 只能用于产生或者增强超混沌, 并不完全吻合相应Lyapunov指数的混沌判据. Chen-Lai算法适用于一般的系统, 然而或许正是算法的一般性导致了用于具体情况时不够灵活. 文献[8]介绍了一种可以任意配置 n 维离散时间系统的 $n-1$ 个Lyapunov指数的方法, 由于该方法的控制器包含系统的导数, 因而要求系统是二次可微的. 文献[9-10]研究了离散混沌及电路实现的实际问题, 但其Lyapunov指数的理论与Chen-Lai算法是一致的. 笔者也有一些结果: 例如可以配置若干个Lyapunov指

收稿日期: 2016-02-19; 录用日期: 2017-04-17.

本文责任编辑: 胡跃明.

[†]通信作者. E-mail: bestchenxu@126.com; Tel.: +86 532-80691790.

国家自然科学基金项目(61503224, 61273197)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61503224, 61273197).

数^[11], 虽然完全吻合判据, 正Lyapunov指数的数目也比较灵活, 然而Lyapunov指数的数值不能令人满意. 在一定条件下, 甚至可以精确配置全部Lyapunov指数^[12], 但是要对系统现在时刻的状态取模, 难以物理实现, 只能在计算机上生成混沌.

本文旨在寻求配置Lyapunov指数的新算法, 并且希望以后能用于数字电路实现. 第一, 要满足离散混沌对Lyapunov指数的内在要求, 能准确地配置一个正Lyapunov指数. 第二, 能配置传统算法无法获得的负Lyapunov指数. 本文的研究表明, 新算法确实可以灵活地用于多种实际问题, 不仅可用于产生混沌, 还可以增强甚至抑制混沌.

2 配置一个Lyapunov指数(Configure a Lyapunov exponent)

考虑离散时间系统

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (1)$$

式中列向量 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态. 混沌的反控制问题为: 设计控制器 u_k 使得受控系统是混沌的, 即受控系统的轨道全局有界, 且至少有一个Lyapunov指数大于给定正的常数. 控制器如下:

$$u_k = Bx_k, \quad (2)$$

其中 $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为待定矩阵. 对整个系统取模运算, 则受控系统为

$$x_{k+1} = Ax_k + Bx_k(\text{mod}1). \quad (3)$$

受控系统(3)的Jacobi矩阵为

$$J_j(z) = A + B = J. \quad (4)$$

记

$$T_k = T_k(x_0, \dots, x_j) = J_k(x_k)J_{k-1}(x_{k-1}), \dots, J_1(x_1)J_0(x_0) = J^k, \quad (5)$$

并记 $\mu_i[T_j^T T_j]$ 为第 j 个乘积矩阵 $T_j^T T_j$ 的第 i 个特征值, 亦即矩阵 T_j 的第 i 个奇异值的平方. 根据Lyapunov指数的定义, 系统(3)的第 i 个Lyapunov指数为

$$\text{LE}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln |\mu_i[T_k^T T_k]|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

即 T_k 奇异值序列的一种极限.

现在的问题就是, 如何设计反馈增益矩阵 B , 使得受控系统的Lyapunov指数全部有限, 其中一个为正, 即

$$\begin{cases} \text{LE}_i(x_0) < \infty, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ \text{LE}_i(x_0) > c, \quad \exists i \in \{1, \dots, n\}, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $c > 0$ 为预先给定常数.

系统矩阵 A 的全部特征值按绝对值大小排列为 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, 且令 $Ax = \lambda_1 x$, 其中 $x \neq$

0是相应于特征值 λ_1 的特征向量. 取

$$B = zx^T, \quad (8)$$

其中: $z \in \mathbb{R}^n$ 满足 $x^T z = e^c + \varepsilon - \lambda_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ 为预先给定常数. 式中只有 z 是未知量, 解此方程即得 z . 虽然 z 的解不是唯一的, 但是任意一个 z 的解都能满足 $\text{LE}_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \sigma_1[J^k] \geq \ln(e^c + \varepsilon) > c$. 本文中 z 是利用MATLAB编程得到的. 按式(8)选取 B , 则系统的Lyapunov指数满足式(7)(后面将证明这一点). 并且 $\|B\| \leq M < \infty$, 其中 M 为一常数, $\|\cdot\|$ 为谱范数, 即矩阵最大奇异值. 因此控制增益矩阵 B 一致有界. 为了证明可以配置一个正的Lyapunov指数, 下面引入线性代数的几个结果.

引理1(Brauer定理) 令 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 为 n 维列向量; $A \in M_n$ 为 n 阶矩阵, 其全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 而 x 是 A 相应于特征值 λ_1 的特征向量. 则 $A + xy^*$ 的全部特征值为 $\lambda_1 + y^*x, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $*$ 表示取共轭转置^[13].

引理1表明, 可以精确地改变矩阵的某个特征值为任意值.

引理2 令 $A \in M_n$ 为 n 阶矩阵, 其特征值为 λ_i ($1 \leq i \leq n$). 则 A^k 的特征值为 λ_i^k ($1 \leq i \leq n$).

引理2表明矩阵幂的特征值与特征值的幂的关系, 其证明是容易的. 事实上该引理是线性算子谱映射定理的特例.

引理3 令 $A \in M_n$ 为 n 阶矩阵, 其特征值 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, 其奇异值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$. 则 $|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_j| \leq \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_j, \forall 1 \leq j \leq n$ ^[14].

在引理3中取 $k = 1$, 则 $|\lambda_1| < \sigma_1$.

定理1 通过引入变量的反馈, 并且严格指定某个变量反馈的形式(8), 则 n 维离散时间系统(3)有一个Lyapunov指数满足

$$\text{LE}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln |\mu_i[T_k^T T_k]| > c, \quad k = 1, 2, \dots$$

证 对于受控系统(3), 根据式(8)选择反馈矩阵. 根据Lyapunov指数的定义,

$$\begin{aligned} \text{LE}_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln |\mu_i[T_k^T T_k]| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln |\mu_i[(J^k)^T J^k]| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln \sigma_i^2[J^k] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \sigma_i[J^k], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

根据引理1, 反馈矩阵 B 一定使得 $\lambda_1[J] = e^c + \varepsilon$. 根据引理2, 可得 $\lambda_1[J^k] = (e^c + \varepsilon)^k$. 根据引理3, $\sigma_1[J^k] \geq$

$|\lambda_1[J^k]| = (e^c + \varepsilon)^k$, 所以

$$LE_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \sigma_1[J^k] \geq \ln(e^c + \varepsilon) > c.$$

3 系统轨道的全局有界性和Lyapunov指数的有限性 (Global boundedness of the system orbit and the finiteness of Lyapunov exponent)

因为式(3)使用了模运算, 所以系统轨道的全局有界性是显然的. 考虑到算法的实际应用, 还必须证明Lyapunov指数的有限性. 为此, 引入线性代数的一个结果.

引理4 假设 $A \in M_{m,p}$, $B \in M_{p,n}$, $q \equiv \min\{n, p, m\}$. 矩阵 A, B 以及 AB 的奇异值按大小排列为

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{m,p\}}(A) \geq 0,$$

$$\sigma_1(B) \geq \sigma_2(B) \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{p,n\}}(B) \geq 0,$$

$$\sigma_1(AB) \geq \sigma_2(AB) \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{m,n\}}(AB) \geq 0,$$

则 $\prod_{i=1}^k \sigma_i(AB) \leq \prod_{i=1}^k \sigma_i(A) \sigma_i(B)$, $k = 1, \dots, q^{[14]}$.

在引理4中取 $k = 1$, $A = B = J$, J 是受控系统的雅可比矩阵, 就得到 $\sigma_1(JJ) \leq \sigma_1(J)\sigma_1(J)$. 反复运用上式可得 $\sigma_1(J^k) \leq \sigma_1^k(J)$. 所以

$$LE_i \leq LE_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \sigma_1[J^k] \leq$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \sigma_1^k[J] = \ln \sigma_1[J] < \infty.$$

定理2 通过引入变量的反馈, 并且严格指定某个变量反馈的形式为式(8), 则 $LE_i(x_0) < \infty$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

4 算例 (An example)

猫映射 (Cat map) 导出的离散系统可以写为

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix} \pmod{1}. \quad (9)$$

下面的例子中, 当 A 取不同矩阵时式(9)会展现出很不同的行为. 下面取

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1) 考虑系统(9), 假定需要配置一个正的Lyapunov指数, 使其数值大于2, $c = 2$, 即系统混沌化. A 的特征值为

$$\lambda_1 = 0.3819 \text{ 和 } \lambda_2 = 2.6180,$$

相应的特征向量为

$$[-0.8507 \ 0.5257]^T \text{ 和 } [0.5257 \ 0.8507]^T,$$

谱范数为2.618, Lyapunov指数为0.962和-0.962. 由于系统已经有一个正的Lyapunov指数, 所以这里实际

上是增强混沌的问题.

如果使用Chen-Lai算法, 受控系统矩阵应为

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2.618 + e^2 & 1 \\ 1 & 2 + 2.618 + e^2 \end{bmatrix}.$$

实际获得的Lyapunov指数是2.5359和2.3408, 明显超过了预先给定的数值. 由于有两个正的Lyapunov指数, 因此得到了一个超混沌系统.

按照新算法, 取 $\varepsilon = 0.0001$, 即

$$[0.5257 \ 0.8507]z = e^2 + \varepsilon - 2.618 = 4.7711,$$

所以可以取 $z = [-1.0000 \ 6.2268]^T$, 则算得

$$B = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ 6.2228 \end{bmatrix} [0.5257 \ 0.8507] = \begin{bmatrix} -0.5257 & -0.8506 \\ 3.2736 & 5.2968 \end{bmatrix}.$$

实际获得的Lyapunov指数是2.1359和-1.0983. 很明显, Lyapunov指数满足混沌判据, 并且出现了Chen-Lai算法不可能获得的负的Lyapunov指数. Chen-Lai算法仿真结果如图1-3所示(初值取 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$), 新算法仿真结果如图4-6所示(初值取 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$).

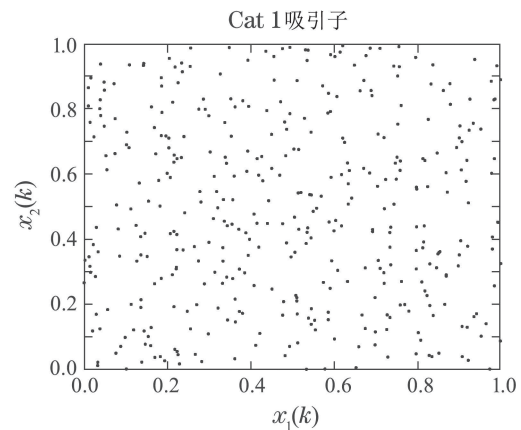


图1 二维混沌吸引子相图

Fig. 1 Plane projection of 2-dimensional chaotic attractor

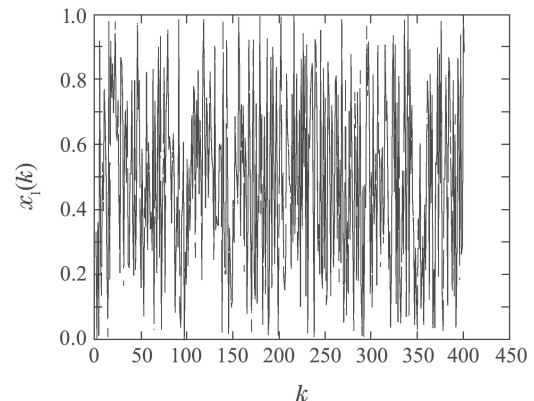


图2 混沌轨道 $x_1(k)$ 时域图

Fig. 2 Time domain diagram of chaotic orbit $x_1(k)$

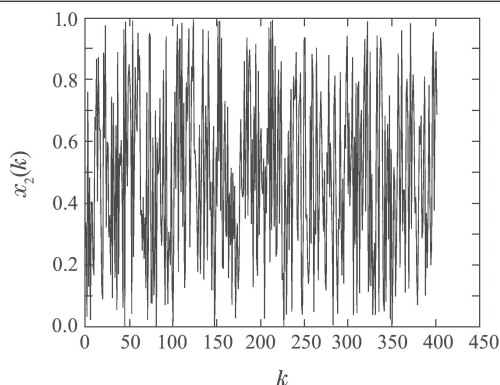
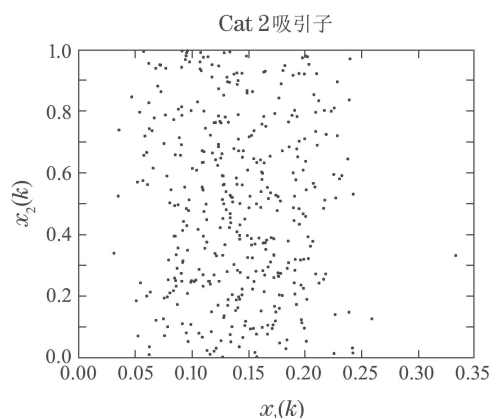
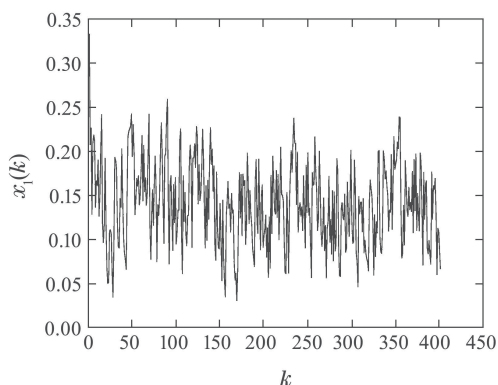
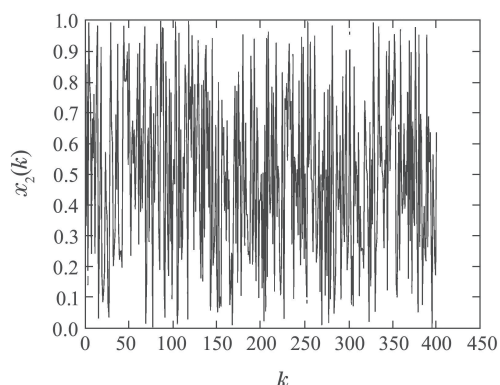
图3 混沌轨道 $x_2(k)$ 时域图Fig. 3 Time domain diagram of chaotic orbit $x_2(k)$ 

图4 二维混沌吸引子相图

Fig. 4 Plane projection of 2-dimensional chaotic attractor

图5 混沌轨道 $x_1(k)$ 时域图Fig. 5 Time domain diagram of chaotic orbit $x_1(k)$ 图6 混沌轨道 $x_2(k)$ 时域图Fig. 6 Time domain diagram of chaotic orbit $x_2(k)$

2) 仍然考虑系统(9), 现在假定需要获得数值大于1.1的Lyapunov指数. 当 $c = 1.1$ 时, 如果使用Chen-Lai算法, 受控系统矩阵应为

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2.618 + e^{1.1} & 1 \\ 1 & 2 + 2.618 + e^{1.1} \end{bmatrix},$$

所以实际获得的Lyapunov指数是2.1090和1.7924, 明显超过了预先给定的数值, 由于有两个正的Lyapunov指数, 得到的仍然是一个超混沌系统.

按照新算法, 取 $\varepsilon = 0.0001$, 即

$$[0.5257 \ 0.8507]z = e^{1.1} + \varepsilon - 2.618 = 0.3862,$$

所以可以取 $z = [-1.0000 \ 1.0720]^T$, 则

$$B = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ 1.0720 \end{bmatrix} [0.5257 \ 0.8507] = \begin{bmatrix} -0.5257 & -0.8506 \\ 0.5636 & 0.9120 \end{bmatrix}.$$

现在受控系统矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0.4743 & 0.1494 \\ 1.5636 & 2.9120 \end{bmatrix}$, 实际获得的Lyapunov指数是1.2013和-1.0637.

Chen-Lai算法仿真结果如图7-9所示(初值取 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$), 新算法仿真如图10-12所示(初值取 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$).

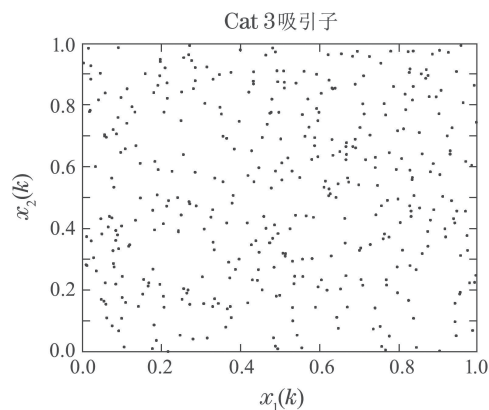
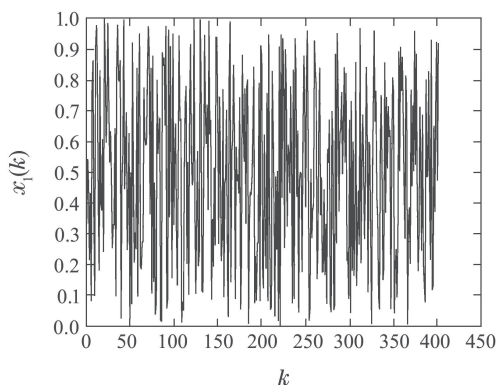


图7 二维混沌吸引子相图

Fig. 7 Plane projection of 2-dimensional chaotic attractor

图8 混沌轨道 $x_1(k)$ 时域图Fig. 8 Time domain diagram of chaotic orbit $x_1(k)$

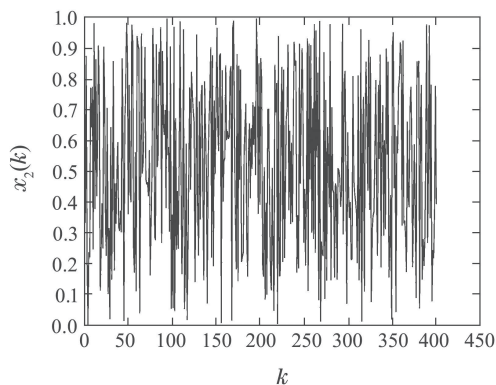
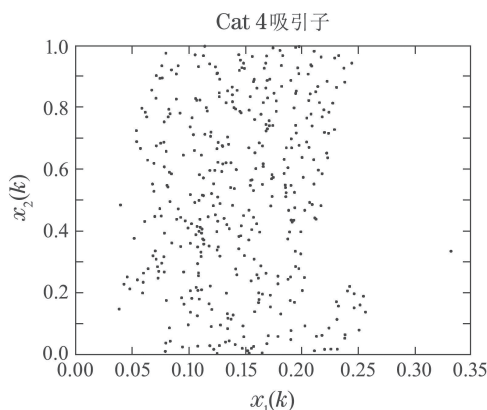
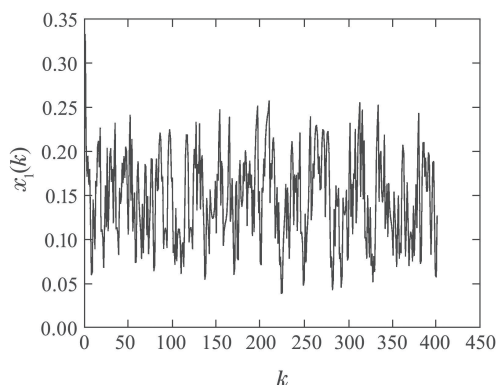
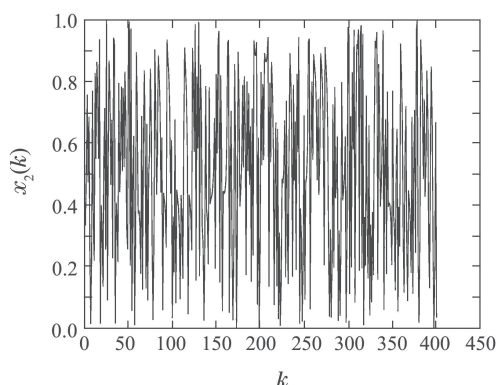
图9 混沌轨道 $x_2(k)$ 时域图Fig. 9 Time domain diagram of chaotic orbit $x_2(k)$ 

图10 二维混沌吸引子相图

Fig. 10 Plane projection of 2-dimensional chaotic attractor

图11 混沌轨道 $x_1(k)$ 时域图Fig. 11 Time domain diagram of chaotic orbit $x_1(k)$ 图12 混沌轨道 $x_2(k)$ 时域图Fig. 12 Time domain diagram of chaotic orbit $x_2(k)$

上例表明,配置的Lyapunov指数越小,新算法的优势就越大.需要强调的是,Chen-Lai算法所得的Lyapunov指数分别是2.1090和1.7924,而新算法是1.2013和-1.0637,两种算法最大Lyapunov指数的差别看起来并不很大,但新算法的受控系统矩阵和反馈矩阵比Chen-Lai算法小很多.

3) 混沌控制是指当混沌运动有害时,利用控制算法削弱甚至消除系统的混沌行为.假定希望获得负的Lyapunov指数,Chen-Lai算法无法获得负的Lyapunov指数,而新算法能获得比较好的负Lyapunov指数.当期望获得较小的正Lyapunov指数时,新算法完全吻合判据,配置效果良好.两种算法配置一个李指数(Lyapunov指数)的效果如表1所示.总之,在增强混沌、抑制等多个方面,新算法都有一定的优势.

表1 两种算法配置一个李指数(Lyapunov指数)效果的比较

Table 1 Comparison of two different algorithms to configure a Lyapunov exponent

期望配置的李指数	Chen-Lai算法		新算法	
-2	1.1427	1.6811	-2.3315	-0.6302
-0.5	1.2827	1.7652	-0.4898	-0.9725
0.1	1.4122	1.8741	0.1261	-0.9885
0.6	1.5732	1.9452	0.6684	-1.0307

5 结论(Conclusions)

本文提出一种配置离散系统Lyapunov指数的新算法.通过引入指定形式的反馈和取模运算,利用秩一摄动理论可以精确摄动受控系统的雅可比矩阵特征值为任意值,然后利用矩阵奇异值与特征值的不等式关系,可以灵活地配置Lyapunov指数的符号和数值.新算法可以获得系统正的最大Lyapunov指数,可以有目的地产生或强化混沌,用于解决混沌反控制的问题.新算法完全吻合混沌的Lyapunov指数判据.通过仿真算例可以看出,新算法配置正的Lyapunov指数更准确,且期望获得正的Lyapunov指数越小,新算法优势越大.由于新算法能够将系统的一个Lyapunov指数配置为负的,可以抑制或消除混沌,用于解决混沌控制的问题.

参考文献(References):

- [1] RAIESDANA S, GOPLAYEGANI S. Study on chaos anti-control for hippocampal models of epilepsy [J]. *Neurocomputing*, 2013, 111(6): 54-69.
- [2] SHEN C W, YU S M, LU J H, et al. Designing hyperchaotic systems with any desired number of positive Lyapunov exponents via a simple model [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, I: RE*, 2014, 61(8): 2380-2389.
- [3] CHEN Guanrong. Controlling chaos in nonlinear dynamical systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(1): 1-6.

- (陈关荣. 控制非线性动力系统的混沌现象 [J]. 控制理论与应用, 1997, 14(1): 1 – 6.)
- [4] CHEN G, LAI D. Anticontrol of chaos via feedback [C] // *Proceedings of the 1997 IEEE Conference on Decision and control*. San Diego, CA: IEEE, 1997, (10/12): 367 – 372.
- [5] CHEN G, LAI D. Feedback anticontrol of discrete chaos [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1998, 8(7): 158 – 1590.
- [6] WANG X F, CHEN G. Chaotifying a stable LTI system by tiny feedback control [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2000, 47(3): 410 – 415.
- [7] WANG Xiaofan, CHEN Guanrong. Yet another algorithm for chaotifying control of discrete chaos [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(3): 336 – 340.
(汪小帆, 陈关荣. 离散系统的混沌化控制的又一算法 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(3): 336 – 340.)
- [8] CHEN Guanrong, WANG Xiaofan. *Chaotification of Dynamical Systems—Theory, Method and Applications* [M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2006.
(陈关荣, 汪小帆. 动力系统的混沌化——理论、算法与应用 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2006.)
- [9] WANG Fang, ZHANG Xinzhen, SHEN Chaowen, et al. Anti control and circuit implementation of discrete time system under finite area [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(19): 190505 – 1 – 9.
(王芳, 张新政, 申朝文, 等. 有限区域下离散时间系统的反控制与电路实现 [J]. 物理学报, 2012, 61(19): 190505 – 1 – 9.)
- [10] SHEN C W, YU S M, LU J H, et al. A systematic methodology for constructing hyperchaotic systems with multiple positive Lyapunov exponents and circuit implementation [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, I*, 2014, 61(3): 854 – 864.
- [11] CHEN Xu, JIN Jianxiu, QIU Shuisheng. Chaos of discrete dynamical systems-placing several Lyapunov exponents [J]. *Control Theory & Applications*, 2010 27(10): 1287 – 1292.
(陈旭, 晋建秀, 丘水生. 离散动力系统混沌化—配置若干个Lyapunov指数 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(10): 1287 – 1292.)
- [12] CHEN Xu, QIU Shuisheng. Placing all exact lyapunov exponents of discrete dynamical systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(11): 7630 – 7634
(陈旭, 丘水生. 精确配置离散动力系统的所有Lyapunov指数 [J]. 物理学报, 2010, 59(11): 7630 – 7634.)
- [13] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Second Edition. Cambridge: University Press, 2012.
- [14] HORN R A, JOHNSON C R. *Topics in Matrix Analysis* [M]. Cambridge: University Press, 1994.

作者简介:

于永进 (1980–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为混沌与非线性系统, E-mail: yajto@163.com;

陈旭 (1979–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为混沌与非线性系统, E-mail: bestchenxu@126.com;

程学珍 (1964–), 女, 博士, 教授, 目前研究方向为控制理论与控制工程, E-mail: zhenxc6411@163.com.