

# 线性离散随机系统输入和状态的多步估计方法及应用

吉浩日<sup>1,2</sup>, 席裕庚<sup>1</sup>, 李德伟<sup>1†</sup>, 薛 蕾<sup>1</sup>

(1. 上海交通大学 自动化系, 上海 200240; 2. 金日成综合大学 电子自动化系, 朝鲜 平壤 526-890)

**摘要:** 具有未知输入的系统的状态估计问题已经在过去几十年里引起了相当的关注。本文对于线性离散随机系统提出了一种基于多步信息的输入和状态同步估计方法。首先, 采用多步信息的最小方差方法来获得未知输入。由于引入了包含多个时间步骤的扩张状态和测量向量而计算多步信息, 使估计结果与一步估计相比减少了对噪声的敏感性。其次, 利用输入估计值和卡尔曼滤波估计过去和当前的状态。该方法在未知输入维数等于状态维数时仍然有良好的估计效果。数值仿真验证了提出的估计方法的有效性。最后, 该方法应用于厌氧消化过程反应罐中的溶解甲烷和二氧化碳的浓度估计以验证方法的实用性。

**关键词:** 卡尔曼滤波; 状态估计; 未知输入估计; 厌氧消化过程

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## A multi-step input and state estimation for the linear discrete-time stochastic system and its application to the anaerobic digestion process

KIL Ho-Il<sup>1,2</sup>, XI Yu-geng<sup>1</sup>, LI De-wei<sup>1†</sup>, XUE Lei<sup>1</sup>

(1. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. Department of Automation, Kim Il Sung University, Pyongyang 526-890, DPR of Korea)

**Abstract:** The problem of state estimation for systems with unknown inputs has received considerable attention during the past decades. This paper proposes a simultaneous estimation method for inputs and states of linear discrete-time stochastic systems based on multi-step innovation. Firstly, the unknown input is obtained from the multi-step innovation with weighted least square estimation. The extended states and measurement vector which consist of multi-step variables are introduced and used to calculate the multi-step innovation. This novel approach can reduce the impact of the noise on estimation performance. Secondly, the past and current states are estimated from the input estimate and the Kalman filter. This method still performs well when the dimension of the unknown input vector is equal to that of the state vector. The effectiveness of the proposed method is demonstrated through the numerical example. Finally, the method is applied to an anaerobic digestion process to estimate the concentration of the dissolved methane and the carbon dioxide in the anaerobic digestion reactor.

**Key words:** Kalman filtering; state estimation; unknown input estimation; anaerobic digestion process

## 1 引言(Introduction)

由于它在诸多应用中的重要性, 具有未知输入的线性系统的状态估计问题已经在过去几十年里引起了相当的关注。在实际应用中, 模型误差或者不可测的系统输入及扰动可以被视为未知输入。具有未知输入的系统的滤波器设计问题可分为两类。第一: 设计状态滤波器使尽量减小未知输入的影响或者使确保至少一定的估计性能。这种滤波器叫 $H_2$ 或 $H_\infty$ 滤波器并在实践中广泛应用<sup>[1-3]</sup>。第二: 设计滤波器能够同步估计状态和输入。本文主要研究了状态和输入的同步估计问题。

在对未知输入具有先验知识的情况下, 将未知输入向量扩充到状态向量并对其扩张状态采用卡尔曼滤波是一类常用的对于未知输入的估计方法。但采用该方法容易导致扩张状态卡尔曼滤波计算量过大。为了减少这种计算成本, 文献[4-9]采用了了解耦状态和输入的多层次卡尔曼滤波方法。

另一方面, 在没有可获得的未知输入的先验知识时, 状态和输入估计问题也引起了一定的关注, 如文献[10-21]。其中, Kitanidis在文献[10]中提出了一种线性估计的递归方法。该方法针对存在未知或非高斯的系统输入的前提下推导了一个代数约束, 然后通过

收稿日期: 2016-04-04; 录用日期: 2016-10-17.

<sup>†</sup>通信作者。E-mail: dwli@sjtu.edu.cn.

本文责任编辑: 吴立刚。

国家自然科学基金项目(61374110, 61333009, 61521063, 61590924)资助。

Supported by Natural Science Foundation of China (61374110, 61333009, 61521063, 61590924).

最小化状态误差协方差矩阵的迹来进行状态的线性估计. Hsieh在文献[12]中通过使用双层卡尔曼滤波技术重新推导了Kitanidis滤波并且提出了一种不受未知输入影响的鲁棒性双层卡尔曼滤波方案. Steven Gillijns等在文献[15]中阐述了通过使用最小协方差无偏滤波方法对线性离散系统的状态和输入进行同步估计的问题. 该方法首先, 由一步信息和最小平方估计得到输入估计值, 然后状态估计问题被转化为对带有相关噪声的系统的标准卡尔曼滤波问题. 值得注意的是, 这种方法产生与文献[10]相同的状态更新和文献[12]相同的输入估计. 然而, 在该项研究中输入估计只通过使用当前输出, 这导致结果对噪声敏感, 且如果输出向量与未知输入向量的维数相同, 则卡尔曼滤波不能提供状态更新功能.

本文提出了对于从未知输入到输出无直接关联且已知未知输入的动态演化模型的线性离散时间系统的状态和输入估计问题, 提出了一种改进的基于多步信息的输入估计方法和递归状态滤波方法. 首先, 本文采用了加权最小方差估计, 从多步信息获得未知输入. 由于引入了包含多个时间步骤的扩张状态和测量向量而计算多步信息, 使估计结果与一步估计相比减少了对噪声的敏感性. 其次, 利用输入估计值和卡尔曼滤波估计过去和当前的状态. 和文献[15]中的最小协方差无偏滤波器不同的是, 本文的方法即使在输出向量和未知输入向量的维数相同的情况下仍然可以获得唯一的最优增量矩阵. 最后, 本文讨论了提出的方法在厌氧消化过程的软测量问题的应用, 所需要而不可测的可溶性组分浓度可以从发酵罐的气相变量估计出来.

本文的章节安排如下: 第2节给出了问题的描述. 主要的估计方法推导在第3节给出. 第4节给出了仿真结果, 显示出了提出的方法在跟踪未知输入时的优越性能. 最后在第5节中讨论了提出的方法在厌氧消化过程的应用案例.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下带有未知输入的线性离散时间随机时变系统:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k d_k + w_k, \quad (1)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (2)$$

其中:  $x_k \in \mathbb{R}^n$  为状态向量,  $d_k \in \mathbb{R}^m$  为未知输入向量,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  为量测向量; 过程噪声  $w_k \in \mathbb{R}^n$  和量测噪声  $v_k \in \mathbb{R}^m$  为互不相关的零均值白噪声信号, 且其非奇异协方差矩阵分别为  $Q_k \in \mathbb{E}[w_k w_k^\top]$  和  $R_k \in \mathbb{E}[v_k v_k^\top]$ ; 矩阵  $A_k, B_k, C_k$  为已知的相应维数矩阵, 而且  $(A_k, C_k)$  为可观测的; 且初始状态与白噪声过程  $w_k$  和  $v_k$  无关, 初始状态  $x_0$  为一个高斯随机变量且  $\mathbb{E}[x_0] = \hat{x}_0$ ,  $\mathbb{E}[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^\top] = P_0$ .

假设未知输入  $d_k$  的变化与系统采样时间相比非常慢. 因此, 可以近似建立以下的关系:

$$d_{k-i} = d_{k,N}^m + w_{k,N}^d, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad k \geq N, \quad (3)$$

其中:  $w_{k,N}^d$  为零均值, 带有协方差  $\mathbb{E}[w_{k,N}^d (w_{k,N}^d)^\top] = Q_{k,N}^d \delta_{kl}$  且与白噪声  $w_k$  和  $v_k$  不相关的白噪声序列;  $d_{k,N}^m$  为在  $N$  个采样时间内的未知输入的平均值. 本文研究的目的是当给出量测向量的序列

$$Y_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$$

时, 最优估计状态  $x_k$  和未知输入  $d_{k-1,N}^m$ .

## 3 滤波器设计(Filter design)

如果未知输入可表示为式(3), 则可以想出一个思路: 从几个观测量来估计输入. 下面给出了基于此思路的一个滤波器设计方法.

首先, 定义扩张状态向量和扩张量测向量分别为

$$X_k = \begin{Bmatrix} x_{k-N+1} \\ x_{k-N+2} \\ \vdots \\ x_k \end{Bmatrix}, \quad Y_k = \begin{Bmatrix} y_{k-N+1} \\ y_{k-N+2} \\ \vdots \\ y_k \end{Bmatrix}, \quad k \geq N.$$

同时定义矩阵  $\Phi_k, \Gamma_k, H_k, G_k$  为

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_{k-N+1,k-N} \\ \Phi_{k-N+2,k-N} \\ \vdots \\ \Phi_{k,k-N} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_k = \begin{bmatrix} \Gamma_{k-N+1,k-N} \\ \Gamma_{k-N+2,k-N} \\ \vdots \\ \Gamma_{k,k-N} \end{bmatrix},$$

$$H_k = \begin{bmatrix} C_{k-N+1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_k \end{bmatrix},$$

$$G_k = \begin{bmatrix} I_n & & & \\ \Phi_{k-N+2,k-N+1} & I_n & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \Phi_{k,k-N+1} & \Phi_{k,k-N+2} & \cdots & I_n \end{bmatrix},$$

其中:

$$\Phi_{k-i,k-N} = A_{k-i-1} \cdots A_{k-N}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\Gamma_{k-i,k-N} = \sum_{j=k-N}^{k-i} \Phi_{k-i,j+1} B_j,$$

因此, 可以建立以下的扩张状态方程:

$$X_k = \Phi_{k-1} x_{k-N} + \Gamma_{k-1} d_{k-1,N}^m + \Gamma_{k-1} w_{k-1,N}^d + G_{k-1} W_{k-1}, \quad (4)$$

$$Y_k = H_k X_k + V_k, \quad (5)$$

其中:

$$W_k = \begin{bmatrix} w_{k-N+1} \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}, V_k = \begin{bmatrix} v_{k-N+1} \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}.$$

现在, 考虑一个基于多步信息的无偏最小方差滤波器 (multi-step unbiased minimum variance, MSUMV). 假设在  $k-1$  时刻  $x_{k-N}$  的无偏估计为  $\hat{x}_{k-N|k-1}$ , 当时间间隔在  $k-N$  到  $k-1$  上没有输入的作用时的扩张状态向量为  $\hat{X}_{k|k-1}$ , 则由式(4)可得

$$\hat{X}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-N|k-1}. \quad (6)$$

因为未知输入的存在, 状态估计  $\hat{X}_{k|k-1}$  是有偏差的. 因此, 由多步的输出信息可以估计得未知输入的一个无偏估计

$$\hat{d}_{k-1,N}^m = M_k \tilde{Y}_k, \quad (7)$$

其中

$$\tilde{Y}_k \triangleq Y_k - H_k \hat{X}_{k|k-1} \quad (8)$$

为多步信息 (multi step innovation) 且  $M_k$  为需要被确定的输入估计增益矩阵. 因此, 可以获得如下的无偏状态估计  $\hat{X}_{k|k}^*$ :

$$\hat{X}_{k|k}^* = \hat{X}_{k|k-1} + \Gamma_{k-1} \hat{d}_{k-1,N}^m. \quad (9)$$

进而, 由系统的可观测性假设, 使用卡尔曼滤波器可以得到  $x_{k-N+1|k}$  和  $x_{k|k}$  的无偏最小方差估计

$$\hat{x}_{k-N+i|k} = \hat{x}_{k-N+i|k}^* + K_{k-N+i,k} (y_{k-N+i} - C_{k-N+i} \hat{x}_{k-N+i|k}^*), \quad i = 1, N, \quad (10)$$

其中  $K_{k-N+i,k}$  ( $i = 1, N$ ) 需要被确定.

由以上推导可以看出, 如果步长为 1 时, 如式(6)–(10) 描述的 MSUMV 滤波器与文献 [15] 中的 UMV 滤波器一致. 下面将介绍计算增益矩阵  $M_k$  和  $K_{k-N+i,k}$  的方法.

### 3.1 输入估计增益矩阵 $M_k$ 的计算 (Calculation of the input estimation gain matrix $M_k$ )

首先, 从式(4)–(6) 和式(8),  $\tilde{Y}_k$  可以表示为

$$\tilde{Y}_k = H_k \Gamma_{k-1} d_{k-1,N}^m + \Lambda_k, \quad (11)$$

其中  $\Lambda_k$  由下式给出:

$$\Lambda_k = H_k (\Phi_{k-1} \tilde{x}_{k-N|k-1} + \Gamma_{k-1} w_{k-1,N}^d + G_{k-1} W_{k-1}) + V_k,$$

且  $\tilde{x}_{k-N|k} \triangleq x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}$ .

将  $\Lambda_k$  的方差表示为  $\tilde{R}_k$ , 则

$$\begin{aligned} \tilde{R}_k &= E[\Lambda_k \Lambda_k^T] = \\ &= H_k (\Phi_{k-1} P_{k-N|k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1,N}^d \Gamma_{k-1}^T + \\ &\quad G_{k-1} \Theta_{k-1} G_{k-1}^T) H_k^T + \Omega_k, \end{aligned} \quad (12)$$

其中:  $P_{k-N|k} \triangleq E[\tilde{x}_{k-N|k} \tilde{x}_{k-N|k}^T]$ ,  $\Theta_k \triangleq E[W_k W_k^T]$ ,

$\Omega_k \triangleq E(V_k V_k^T)$ . 基此, 未知输入的 UMV 估计由如下定理给出.

**定理 1** 对扩张系统(4)–(5)和输入(3), 若  $\hat{x}_{k-N|k-1}$  为无偏, 并  $\text{rank } H_k \Gamma_{k-1} = m$ , 则增益矩阵

$$M_k = [(H_k \Gamma_{k-1})^T \tilde{R}_k^{-1} H_k \Gamma_{k-1}]^{-1} (H_k \Gamma_{k-1})^T \quad (13)$$

使式(7)为  $d_{k-1,N}^m$  的 UMV 估计.

**证** 由  $R_k > 0$  可知  $\Omega_k > 0$ , 而从式(12)得知  $\tilde{R}_k > 0$ . 则  $d_{k-1,N}^m$  的 UMV 估计结果可以通过高斯–马尔可夫定理 [19] 获得. 先用任意一个满足  $\tilde{R}_k = LL^T$  的可逆矩阵  $L$  和式(11) 得到误差方差为单位矩阵的如下方程:

$$\begin{aligned} L^{-1} \tilde{Y}_k &= L^{-1} H_k \Gamma_{k-1} d_{k-1,N}^m + L^{-1} \Lambda_k = \\ &L^{-1} H_k \Gamma_{k-1} d_{k-1,N}^m + \bar{\Lambda}_k, \quad \langle \bar{\Lambda}_k, \bar{\Lambda}_k \rangle = I. \end{aligned} \quad (14)$$

其次, 使用高斯–马尔可夫定理可计算未知输入  $d_{k-1,N}^m$  的最小无偏估计:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{k-1,N}^m &= [(L^{-1} H_k \Gamma_{k-1})^T L^{-1} H_k \Gamma_{k-1}]^{-1} \cdot \\ &(L^{-1} H_k \Gamma_{k-1})^T \tilde{Y}_k = \\ &[(H_k \Gamma_{k-1})^T \tilde{R}_k^{-1} H_k \Gamma_{k-1}]^{-1} (H_k \Gamma_{k-1})^T \tilde{Y}_k, \end{aligned} \quad (15)$$

即未知输入的 UMV 估计增益矩阵  $M_k$  为

$$M_k = [(H_k \Gamma_{k-1})^T \tilde{R}_k^{-1} H_k \Gamma_{k-1}]^{-1} (H_k \Gamma_{k-1})^T.$$

证毕.

定理 1 的条件  $\text{rank } H_k \Gamma_{k-1} = m$  与文献 [15] 的条件  $\text{rank } C_k B_{k-1} = m$  相比, 宽松得多. 下面给出了一个例子.

**例 1** 给定一个离散线性时不变系统为

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d_k + w_k,$$

$$y_k = [1 \ 1] x_k.$$

因为  $\text{rank } CB = 1$ , 不能使用文献 [15] 的方法. 但是, 当  $N = 3$  时,  $\text{rank } H_k \Gamma_{k-1} = [CB \ CAB \ CA^2B] = 2$ . 因此能使用定理 1 得到输入的估计值.

可以看出当  $N = 1$  时, 式(13) 中的输入估计增益矩阵的表达式与文献 [15] 的 MVU 滤波器相同.

### 3.2 卡尔曼增益矩阵 $K_{k-N+i,k}$ 的计算 (Calculation of the Kalman gain matrixes $K_{k-N+i,k}$ )

为了计算得到使状态  $x_{k-N+1}$  和  $x_k$  估计方差最小的卡尔曼增益矩阵  $K_{k-N+1,k}$  和  $K_{k,k}$ , 首先定义  $\tilde{d}_{k-1,N}^m \triangleq d_{k-1,N}^m - \hat{d}_{k-1,N}^m$ . 从式(7) 和式(11) 可以得出

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{k-1,N}^m &= d_{k-1,N}^m - M_k \tilde{Y}_k = \\ &(I_m - M_k H_k \Gamma_{k-1}) d_{k-1,N}^m - M_k \Lambda_k = -M_k \Lambda_k. \end{aligned} \quad (16)$$

从式(4)和式(9)可得

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k-N+i|k}^* &= \Phi_{k-N+i,k-N} \tilde{x}_{k-N|k-1} + \\ &\quad \Gamma_{k-N+i,k-N} \tilde{d}_{k-1,N}^m + \\ &\quad w_{k-N+i-1}, \quad i = 1, N,\end{aligned}\quad (17)$$

其中  $\tilde{x}_{k-N+i|k}^* \triangleq x_{k-N+i} - \hat{x}_{k-N+i|k}$ . 因此, 从式(11) (16)–(17)可得

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k-N+i|k}^* &= \\ A_{k-N+i,k}^* \tilde{x}_{k-N|k-1} + w_{k-N+i-1,k}^*, \quad i &= 1, N.\end{aligned}\quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned}A_{k-N+i,k}^* &= \\ \Phi_{k-N+i,k-N} - \Gamma_{k-N+i,k-N} M_k H_k \Phi_{k-1}, \quad i &= 1, N, \\ w_{k-N+i-1,k}^* &= \\ w_{k-N+i-1} - \Gamma_{k-N+i,k-N} w_{k-1,N}^d - \\ \Gamma_{k-N+i,k-N} M_k H_k G_{k-1} W_{k-1} - \\ \Gamma_{k-N+i,k-N} M_k V_k, \quad i &= 1, N.\end{aligned}$$

从式(17)可以看出如果  $\hat{d}_{k-1,N}^m$  为  $d_{k-1,N}^m$  的无偏估计, 则  $\hat{x}_{k-N+i|k}^* (i=1, N)$  均为  $x_{k-N+i} (i=1, N)$  的无偏估计.

现在定义  $P_{k-N+i|k}^* \triangleq E[\tilde{x}_{k-N+i|k}^* \tilde{x}_{k-N+i|k}^{*T}]$ , 从式 (18) 可得

$$\begin{aligned}P_{k-N+i|k}^* &= A_{k-N+i,k}^* P_{k-N|k-1} A_{k-N+i,k}^{*T} + \\ Q_{k-N+i-1,k}^*, \quad i &= 1, N,\end{aligned}\quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned}Q_{k-N+i,k}^* &\triangleq \\ E[w_{k-N+i,k}^* w_{k-N+i,k}^{*T}] &= \\ Q_{k-N+i-1} + \Gamma_{k-N+i,k-N} Q_{k-1,N}^d (\Gamma_{k-N+i,k-N})^T + \\ \Gamma_{k-N+i,k-N} M_k H_k G_{k-1} \Theta_{k-1} \cdot \\ (\Gamma_{k-N+i,k-N} M_k H_k G_{k-1})^T + \\ \Gamma_{k-N+i,k-N} M_k \Omega_k (\Gamma_{k-N+i,k-N} M_k)^T - \\ \Gamma_{k-N+i,k-N} M_k H_k G_{k-1} \Theta_{k-N+i-1,k-1}^T - \\ \Theta_{k-N+i-1,k-1} \cdot (\Gamma_{k-N+i,k-N} M_k H_k G_{k-1})^T,\end{aligned}$$

且

$$\Theta_{k-N+i-1,k-1} \triangleq E[w_{k-N+i-1} W_{k-1}^T].$$

下面, 给出了最优卡尔曼滤波增益矩阵使得状态估计误差方差最小.

**定理2** 对扩张系统(4)–(5)和输入(3), 若矩阵  $\tilde{R}_{k-N+i,k}^*$  为非奇异, 则增益矩阵

$$K_{k-N+i,k} = Z_{k-N+i,k}^* \tilde{R}_{k-N+i,k}^{*-1}, \quad i = 1, N \quad (20)$$

使式(10)为  $x_{k-N+i|k}, i=1, N$  的UMV估计, 其中:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{k-N+i,k}^* &= \\ H_{k-N+i|k} P_{k-N+i|k}^* H_{k-N+i|k}^T + R_{k-N+i|k} + \\ H_{k-N+i|k} S_{k-N+i,k}^* + S_{k-N+i,k}^{*T} H_{k-N+i|k}^T, \\ Z_{k-N+i,k}^* &= P_{k-N+i,k}^* H_{k-N+i|k}^T + S_{k-N+i,k}^*, \\ S_{k-N+i,k}^* &= -\Gamma_{k-N+i,k-N} M_k \Omega_{k,k-N+i}, \\ \Omega_{k,k-N+i} &\triangleq E[V_k v_{k-N+i}].\end{aligned}$$

证 首先, 由式(10)可得如下的状态估计误差:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k-N+i|k} &= (I_n - K_{k-N+i,k} H_{k-N+i|k}) \tilde{x}_{k-N+i|k}^* - \\ K_{k-N+i,k} v_{k-N+i}, \quad i = 1, N.\end{aligned}\quad (21)$$

由  $x_{k-N+i|k}^*, i = 1, N$  为无偏估计, 从式(21)可知不管  $K_{k-N+i,k}, \hat{x}_{k-N+i|k} (i = 1, N)$  均为  $x_{k-N+i}, i = 1, N$  的无偏估计. 进而, 从式(21)可以得到协方差矩阵

$$\begin{aligned}P_{k-N+i|k} &= K_{k-N+i,k} \tilde{R}_{k-N+i,k}^* K_{k-N+i,k}^T - \\ Z_{k-N+i,k}^* K_{k-N+i,k}^T - \\ K_{k-N+i,k} Z_{k-N+i,k}^{*T} + P_{k-N+i,k}^*, \\ i &= 1, N,\end{aligned}\quad (22)$$

进而, 因  $\tilde{R}_{k-N+i,k}^*$  为非奇异. 从式(22)通过最小化矩阵  $P_{k-N+i,k}$  的迹来易得

$$K_{k-N+i,k} = Z_{k-N+i,k}^* \tilde{R}_{k-N+i,k}^{*-1}, \quad i = 1, N.$$

证毕.

将式(12)用式(20)来替换, 误差的协方差矩阵更新为

$$\begin{aligned}P_{k-N+1,k} &= P_{k-N+1,k}^* - K_{k-N+1,k} Z_{k-N+1,k}^{*T}, \\ i &= 1, N.\end{aligned}\quad (23)$$

值得注意的是, 不同于文献 [15] 中 Gillijns 和 De Moor 等的滤波器, 式(20)给出了一个唯一的最优增益矩阵, 这是因为当  $N > 1$  时, 矩阵  $\tilde{R}_{k-N+i,k}^*$  一般为非奇异的. 因此, 未知输入和状态可以由以下迭代算法进行估计.

### 算法1

**步骤1** 由式(6)和式(8)使用无偏估计  $\hat{x}_{k-N,k-1}$ ,  $k \geq N$  和测量值  $Y_k$  计算多步信息向量  $\tilde{Y}_k$ .

**步骤2** 由式(13)计算输入估计增益矩阵, 并通过式(7)估计未知输入  $d_{k-1,N}^m$ .

**步骤3** 由未知输入估计值  $\hat{d}_{k-1,N}^m$ , 式(9)(19)计算无偏状态估计  $\hat{X}_{k|k}^*$  和误差协方差矩阵  $P_{k-N+i|k}^*$ .

**步骤4** 由式(20)计算卡尔曼增益矩阵  $K_{k-N+i,k} (i = 1, N)$ .

**步骤5** 由式(10)估计  $\hat{x}_{k-N+1,k}$  和  $\hat{x}_{k,k}$ , 通过式(23)更新误差协方差矩阵  $P_{k-N+1,k}$ .

**步骤6** 返回步骤1.

#### 4 数值仿真(Numerical example)

为了展示本文所提出的MSUMV方法的优越性,采用如下的仿真进行验证. 令系统(1)–(2)的系数为

$$A_k = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.08 \\ 0.6 & 0.01 & 0.04 \\ 0.1 & 0.7 & 0.05 \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_k = [1 \ 1 \ 0],$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, R_k = 0.01.$$

初始状态为  $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ , 初始状态估计假设为0,

$$\text{协方差矩阵为 } P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{未知输入为 } d_k = 1 + \sin(0.025k).$$

将估计区间的大小设置成  $N = 5$ , 估计区间内的输入协方差假设为  $Q_{k,N}^d = 0.0156$ . 笔者选取了UMV滤波<sup>[15]</sup>和增广卡尔曼滤波(AKF)来进行比对, 仿真时间设置为300个时间步长, 并进行了10次蒙特卡罗仿真实验. 图1–4显示了未知输入和状态的实际值和估计值.

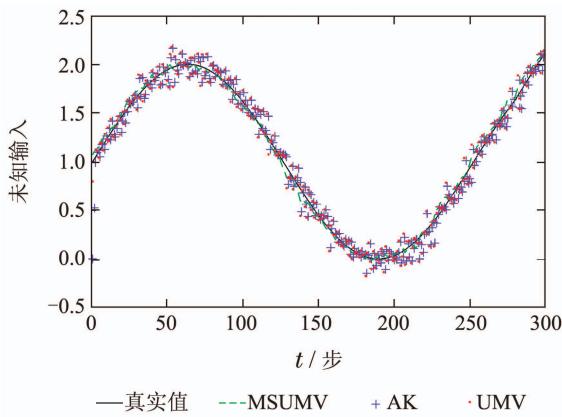


图1 未知输入的实际值和估计值

Fig. 1 Actual and estimated value of the unknown input

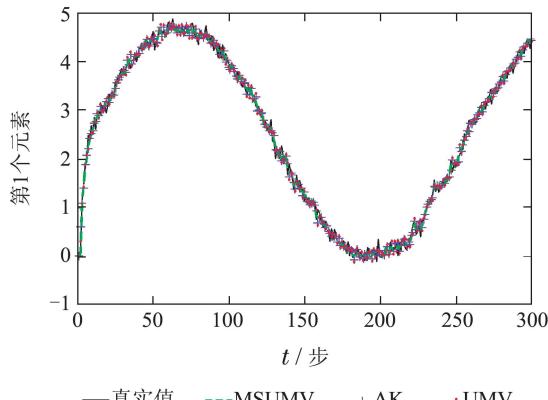


图2 状态变量中第1个元素的实际值和估计值

Fig. 2 Actual and estimated value of the first element of state

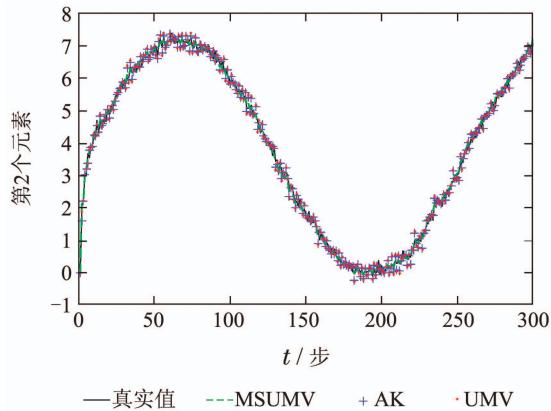


图3 状态变量中第2个元素的实际值和估计值

Fig. 3 Actual and estimated value of the second element of state

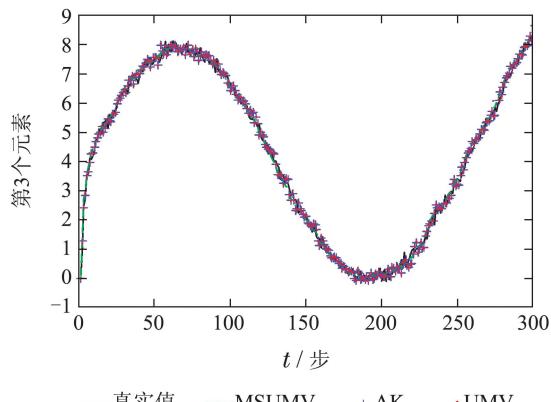


图4 状态变量中第3个元素实际值和估计值

Fig. 4 Actual and estimated value of the third element of state

从图1–4可以看出本文提出的MSUMV方法对系统的所有的状态和输入给出了最好的估计效果. UMV方法因考虑了一步估计而产生了比较大的波动. 然而AKF方法虽然波动比较小, 但是偏差比较大. 表1为估计状态和输入的均方根误差, 从中可以确认, 本文所提出的方法估计效果最好.

表1 MSUMV, UMV<sup>[15]</sup>, AKF滤波器的性能比较

Table 1 Comparison of the MSUMV, UMV<sup>[15]</sup>, AKF filters

参数	MSUMV	UMV <sup>[15]</sup>	AKF
$d$	0.0464	0.0975	0.0970
$x_1$	0.0912	0.1303	0.0962
$x_2$	0.1036	0.1707	0.1120
$x_3$	0.1450	0.1741	0.1498

#### 5 厌氧消化过程软测量应用(Application to the soft sensing in an anaerobic digestion process)

厌氧消化过程由于其可以在无氧的环境下将有机废物转化成沼气的能力, 在污水处理和生物能源生产

上取得了广泛的应用<sup>[22-24]</sup>. 在厌氧反应中, 无机碳和甲烷的溶解浓度是衡量反应过程中很重要的状态变量. 比如反应器内部的碳酸氢盐的浓度与反应过程的稳定性有很大的关系. 但是, 由于技术或成本因素, 通常不对它们进行在线测量, 而是通过离线的化学实验分析获得. 这对过程的在线监督和控制造成了很大的障碍. 另一方面, 对反应器顶部空间的气相变量进行在线测量是可行的. 所以笔者考虑从在线测量的气相变量数据, 估算出无机碳和甲烷溶解浓度的软测量问题. 在厌氧反应的反应釜中, 气相元素的动态演化方程可以用以下第一厌氧消化模型<sup>[22]</sup>(以下缩写成ADM1)来描述:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{\text{gas}} &= f(\xi_{\text{gas}}, \xi_{\text{soluble}}, q_{\text{gas}}, T), \\ q_{\text{gas}} &= h(\xi_{\text{gas}}, T),\end{aligned}$$

这里:

$$\xi_{\text{gas}} = \begin{bmatrix} S_{\text{gas}, \text{ch4}} \\ S_{\text{gas}, \text{co2}} \end{bmatrix}, \quad \xi_{\text{soluble}} = \begin{bmatrix} S_{\text{ch4}} \\ S_{\text{co2}} \end{bmatrix}$$

是气相和液相元素相对应的浓度向量,  $q_{\text{gas}}$  是气体流量,  $T$  是反应器内的温度, 下标ch4和co2分别表示甲烷和二氧化碳,  $f(\cdot)$  和  $h(\cdot)$  是反映气相转化和气体流动的非线性方程. 考虑到  $q_{\text{gas}}$ ,  $S_{\text{gas}, \text{co2}}$  和  $T$  可以在线测量, 对上面的方程进行线性和离散化, 可以得到式(1)和式(2)的线性离散方程, 其状态、输出、输入向量分别为

$$\begin{aligned}x &= \begin{pmatrix} S_{\text{gas}, \text{ch4}} \\ S_{\text{gas}, \text{co2}} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} q_{\text{gas}} \\ S_{\text{gas}, \text{co2}} \end{pmatrix}, \\ u &= \begin{pmatrix} S_{\text{ch4}} \\ S_{\text{co2}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由于溶解物的浓度变化相对本文的测量周期而言, 速度十分缓慢, 于是可以利用本文提出的方法来估计甲烷和二氧化碳的溶解浓度. 在估算出溶解的二氧化碳的浓度后, 可以利用下面的公式来计算反应釜内总溶解的无机碳和碳酸氢盐的浓度:

$$\begin{aligned}S_{\text{IC}} &= \frac{S_{\text{H}^+} + K_{\text{a}, \text{co2}}}{S_{\text{H}^+}} S_{\text{co2}}, \\ S_{\text{HCO}_3} &= S_{\text{IC}} - S_{\text{co2}},\end{aligned}$$

这里:  $S_{\text{H}^+}$  是氢离子的浓度,  $S_{\text{HCO}_3}$  是碳酸氢盐的浓度,  $K_{\text{a}, \text{co2}}$  是二氧化碳的酸碱平衡常数. 利用可测的pH值可计算  $S_{\text{H}^+}$  如下:

$$S_{\text{H}^+} = 10^{-\text{pH}}.$$

为了验证本方法在厌氧消化过程中的应用效果, 利用文献[23]的ADM1基准模型和参数仿真得到了反应釜内部液相及气相组分的变化数据. 图5显示了其变化曲线和估计结果.

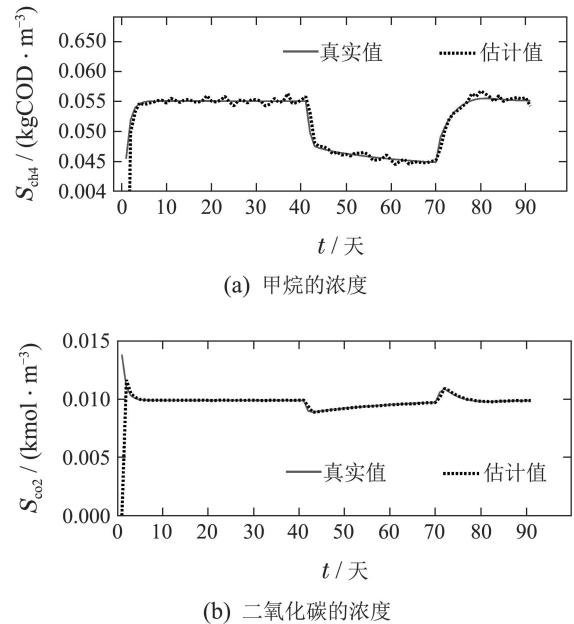


图5 厌氧消化反应釜中溶解的甲烷和二氧化碳的估算结果

Fig. 5 The estimation result of the dissolved methane and the carbon dioxide in the anaerobic digestion reactor

结果显示, 对溶解的甲烷和二氧化碳的估计浓度可以很好地跟踪上实际的浓度. 故本文所提出的方法可以用来估计厌氧消化反应釜中的未知状态.

## 6 总结(Conclusions)

本文提出了一种新的对线性离散时间系统的输入和状态同步估计方法. 根据系统的信息结构, 构建了一个扩张状态方程. 未知的输入由多步的输出信息和最小二乘方法来获得, 克服了先有的估计方法的结构性缺点和对噪声的敏感性. 本文中, 通过数值算例和实际过程验证了该方法是一种有效的估计方法.

## 参考文献(References):

- [1] GRIMBLE M J, EI SAYED A. Solution of the  $H_\infty$  optimal linear filtering problem for discrete-time systems [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1990, 38(7): 1092 – 1104.
- [2] ZHANG W, CHEN B S, TSENG C S. Robust  $H_\infty$  filtering for non-linear stochastic systems [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(2): 589 – 598.
- [3] WANG Xinmei, WEI Wu, LIU Wei, et al. Estimation of image Jacobian matrix with time-delay compensation based on robust Kalman filtering [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(8): 1052 – 1057.  
(王新梅, 魏武, 刘伟, 等. 鲁棒卡尔曼滤波下的图像雅可比矩阵带时延补偿的估计 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(8): 1052 – 1057.)
- [4] FRIEDLAND B. Treatment of bias in recursive filtering [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14(4): 359 – 367.
- [5] TUAN P C, FONG L W, HUANG W T. Application of kalman filtering with input estimation technique to on-line cylindrical inverse heat conduction problems [J]. *JSME International Journal Series B*, 1997, 40(1): 126 – 133.

- [6] HSIEH C S, CHEN F C. Optimal solution of the two-stage kalman estimator [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 194 – 199.
- [7] BAEK S J, HUNT B R, KALNAY E, et al. Local ensemble kalman filtering in the presence of model bias [J]. *Tellus A*, 2006, 58(3): 293 – 306.
- [8] SMAGIN S. Filtering in linear discrete systems with unknown perturbations [J]. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2009, 45(6): 513 – 519.
- [9] LIN D C. Adaptive weighting input estimation of a nonlinear system [J]. *Inverse Problems in Science and Engineering; Formerly Inverse Problems in Engineering*, 2010, 18(7): 891 – 905.
- [10] KITANIDIS P K. Unbiased minimum-variance linear state estimation [J]. *Automatica*, 1987, 23(6): 775 – 778.
- [11] DAROUACH M, ZASADZINSKI M. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs [J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 717 – 719.
- [12] HSIEH C S. Robust two-stage kalman filters for systems with unknown inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2374 – 2378.
- [13] FLOQUET T, BARBOT J P. State and unknown input estimation for linear discrete-time systems [J]. *Automatica*, 2006, 42(11): 1883 – 1889.
- [14] HSIEH C S. Optimal minimum-variance filtering for systems with unknown inputs [C] //The 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, China: IEEE, 2006, 1: 1870 – 1874.
- [15] GILLIJS S, DE MOOR B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems [J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 111 – 116.
- [16] GILLIJS S, DE MOOR B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough [J]. *Automatica*, 2007, 43(5): 934 – 937.
- [17] HSIEH CS. Extension of unbiased minimum-variance input and state estimation for systems with unknown inputs [J]. *Automatica*, 2009, 45(9): 2149 – 2153.
- [18] HSIEH C S. On the global optimality of unbiased minimum-variance state estimation for systems with unknown inputs [J]. *Automatica*, 2010, 46(4): 708 – 715.
- [19] HSIEH C S. Optimal filtering for systems with unknown inputs via the descriptor Kalman filtering method [J]. *Automatica*, 2011, 47(10): 2313 – 2318.
- [20] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. *Linear Estimation* [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2000, 95 – 117.
- [21] ZHU F. State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers [J]. *Journal of Process Control*, 2012, 22(1): 296 – 302.
- [22] BATSTONE D, KELLER J, ANGELIDAKI I, et al. Anaerobic digestion model No.1 (ADM1) [J]. *Water Science and Technology*, 2002, 45(10): 65 – 73.
- [23] ROSEN C, JEPPESSON U. Aspects on ADM1 implementation within the BSM2 framework [R] //IWABSM TG Technical Report, LUTEDX/TEIE-7224). Lund, Sweden: Lund University, 2008.
- [24] STEYER J P, BERNARD O, BATSTONE D J, et al. Lessons learnt from 15 years of ICA in anaerobic digesters [J]. *Water Science and Technology*, 2006, 53(4/5): 25 – 33.

### 作者简介:

吉浩日 (1977–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为随机估计与预测控制, E-mail: khl2012@sjtu.edu.cn;

席裕庚 (1946–), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为大系统理论与预测控制, E-mail: ygxi@sjtu.edu.cn;

李德伟 (1971–), 男, 博士, 主要研究方向为预测控制、鲁棒控制, E-mail: dwli@sjtu.edu.cn;

薛 蕊 (1991–), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为预测控制、模型识别, E-mail: 407430765@qq.com.