DOI: 10.7641/CTA.2017.60559

基于区间矩阵的四旋翼无人机鲁棒跟踪控制

孙妙平†, 刘静静, 年晓红, 王海波

(中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410004)

摘要: 针对飞行环境不断变化的四旋翼无人机轨迹跟踪问题, 提出了基于区间矩阵的鲁棒跟踪控制策略. 首先, 将四旋翼无人机非线性动态模型解耦为外环位置控制系统和内环角度控制系统. 接着, 考虑到飞行环境变化引起的升力系数、中高速飞行下不可忽略的阻力系数等参数的不确定性, 引入区间矩阵对内外环系统的系统参数进行描述, 并对内外环控制系统设计鲁棒H_∞反馈控制策略来抑制有界外部扰动. 然后, 根据李雅普诺夫稳定性定理得到了使外环系统指数渐近稳定和内环系统鲁棒渐近稳定且均满足H_∞性能指标的LMI充分条件, 同时, 给出了控制器增益的求解方法. 最后, 仿真及实验结果结果验证了所提方法的鲁棒性、优越性和有效性.

关键词: 四旋翼无人机; 轨迹跟踪; 不确定性; 区间矩阵; 鲁棒控制

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Robust tracking control of a quad-rotor unmanned aerial vehicle via interval matrix

SUN Miao-ping†, LIU Jing-jing, NIAN Xiao-hong, WANG Hai-bo

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410004, China)

Abstract: The robust tracking control strategies for a quad-rotor unmanned aerial vehicle (UAV) with changing flight environment are put forward based on the interval matrix. Firstly, the nonlinear dynamic model of the quad-rotor UAV is decoupled into the inner loop attitude control system and the outer loop position control system. Next, taking into account the change of the lift coefficient and non-negligible drag coefficient in medium and high speed which is caused by the changing flight environment, the interval matrix is introduced to describe the system parameters of the inter and outer loop system and the robust H-infinity feedback control methods are designed to reject the bounded disturbance in the closed inner-outer loop system. Then, according to Lyapunov stability theory, the LMI-based sufficient conditions of exponential asymptotic stability for outer-loop control system and robust asymptotic stability for inter-loop control system are derived. At the same time, the H-infinity performance indexes are both satisfied. Meanwhile, the gain matrices of controller are presented. Finally, the effectiveness, advantages and robustness of the proposed method are verified by simulation and experimental results.

Key words: quad-rotor UAV; trajectory tracking; uncertainties; interval matrix; robust control

1 引言(Introduction)

四旋翼无人机是一种小型无人机, 它具有垂直起降、自主悬停、自主控制等优点, 被广泛应用在民用和军事领域, 如航拍、救灾、运输和军事侦察等[1–2]. 然而系统本身的强耦合、参数不确定和易受外部扰动影响的特性, 使得四旋翼无人机轨迹跟踪控制困难. 因此, 四旋翼无人机备受国内外研究学者的广泛关注. 目前为止, 国内外学者提出了各种各样的控制方法, 如: PID控制[3–4]、有界反馈控制[5]、滑模和反步法[6]等. 最近, 一些针对模型不确定和外部扰动的鲁棒控制器[7–8]被提出, 然而这些控制方法并没有明确的描述阻力系数、升力系数和转动惯量这些不确定参数.

四旋翼无人机整个飞行过程中, 升力系数和阻力系数会随着飞行环境发生大范围的变化, 且无人机的转动惯量无法精确测量[9], 这些都使得四旋翼无人机模型含有非定常的不确定参数. 因此, 设计的控制器必须要有足够强的鲁棒性以消除这些参数的影响. 文献[3, 5]中采用简化的四旋翼无人机模型, 忽略空气阻力的影响, 取得了较好的控制效果. 文献[10]指出这种简化的模型仅适用于非常低的飞行速度, 当飞行速度变大, 即使是中等速度, 空气阻力的影响会很大, 不可以忽略. 文献[11–12]将不确定的阻力系数、升力系数

收稿日期: 2016−07−28; 录用日期: 2016−11−14.
† 通信作者. E-mail: miaopingsun@mail.csu.edu.cn; Tel: +86 13319503449.
本文责任编委: 方勇纯.
国家自然科学基金项目(61403425, 61473314, 61321003)资助.
Supported by National Natural Science Foundation of China (61403425, 61473314, 61321003).

和转动惯量当成常数处理, 并得到了较好的控制效果. 然而无人机飞行环境发生变化时, 阻力系数和升力系数会发生大范围波动, 不能再近似为定值. 文献[13]对位置模型中不确定的空气阻力系数对采用I&I方法进行估计, 文献[14]采用一个基于I&I方法的自适应控制器去估计四旋翼无人机模型中不确定的阻力系数和升力系数, 文献[15] 利用神经网络的非线性逼近能力去处理四旋翼无人机模型中的不确定的非线性项如空气阻力、叶片拍打影响. 上述文献[13–15]均未考虑到模型中转动惯量的不确定性. 文献[16] 的角度控制中在假设转动惯量有界的情况下, 采用自适应律进行估计转动惯量, 文献[17] 设计了转动惯量在标称值$\pm 10\%$情况下的非线性H_∞控制器, 文献[18–19]采用鲁棒补偿器抑制模型中的平移不确定性和旋转不确定性的影响, 却并未考虑到空气阻力的影响. 实际上, 环境中空气密度、温度对参数的影响是有限的, 阻力系数、升力系数只能在一定的范围内变化, 转动惯量也只是在标称值上下小幅度波动, 这种有界不确定参数可以看成区间变量, 区间变量描述不确定参数的结构简单, 只需参数变化的上下界. 文献[20]采用区间矩阵描述含有界不确定参数的卷绕系统, 并取得了很好的控制效果. 目前, 采用区间矩阵描述参数不确定的四旋翼无人机系统鲜有报道.

基于以上调查, 本文将四旋翼无人机模型中的不确定参数看成区间变量, 采用区间矩阵描述无人机控制系统, 提出了基于区间矩阵的状态反馈鲁棒控制方法实现其轨迹跟踪. 首先借鉴文献[13]的思想, 在四旋翼无人机非线性动态模型的基础上, 通过虚拟控制量, 将四旋翼无人机系统分成非线性内外环结构, 得到系统误差模型的状态空间形式. 接着, 考虑到飞行环境变化引起的升力系数、阻力系数的不确定性和转动惯量的不确定性, 引入区间矩阵描述内外环系统. 然后, 对内外环控制系统设计鲁棒H_∞反馈控制器抑制有界外部扰动. 最后, 根据李雅普诺夫稳定性定理得到了使位置系统指数渐近稳定和角度系统鲁棒渐近稳定且均满足H_∞性能指标的LMI充分条件. 仿真及实验结果证明了所提出的控制方法的鲁棒性和有效性.

2 四旋翼无人机模型与预备知识(Model of quad-rotor UAV and preliminary knowledge)

四旋翼无人机的示意图如图1所示, 图中$f_i(i=1,\cdots,4)$为4个旋翼各自产生的升力; 惯性坐标E系(E, $X_\mathrm{E}, Y_\mathrm{E}, Z_\mathrm{E}$)原点固定在地面上, Z_E轴指向天空; B系(B, $X_\mathrm{B}, Y_\mathrm{B}, Z_\mathrm{B}$) 为机体坐标系, 原点为无人机质心; 四旋翼无人机有6个自由度:

$$\xi(t)=[x(t),y(t),z(t)]^\mathrm{T}$$

和欧拉角$\eta(t)=[\phi(t),\theta(t),\psi(t)]^\mathrm{T}$分别表示(E系)位置坐标和方向.

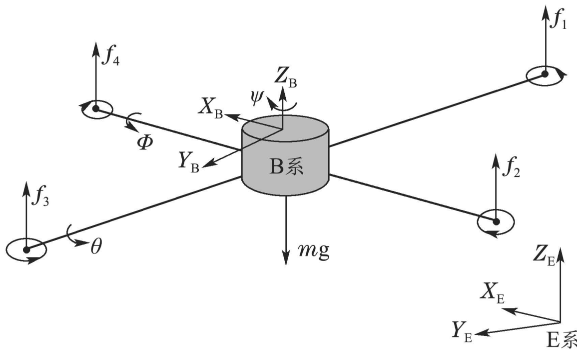


图 1 四旋翼无人机示意图

Fig. 1 A schematic diagram of the quad-rotor UAV

假设四旋翼无人机为刚体且机体结构对称, 忽略叶片拍打和陀螺效应, 可得四旋翼无人机动力学模型

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-K_1\dot{x}+(\cos\phi\sin\theta\cos\psi+\\ \qquad \sin\phi\sin\psi)u_t+d_1(t),\\ m\ddot{y}=-K_2\dot{y}+(\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\\ \qquad \sin\phi\cos\psi)u_t+d_2(t),\\ m\ddot{z}=-K_3\dot{z}-mg+(\cos\phi\cos\theta)u_t+d_3(t),\\ J_1\ddot{\phi}=-K_4l\dot{\phi}+l\tau_1+d_4(t),\\ J_2\ddot{\theta}=-K_5l\dot{\theta}+l\tau_2+d_5(t),\\ J_3\ddot{\psi}=-K_6\dot{\psi}+c\tau_3+d_6(t), \end{cases} \tag{1}$$

式中: $m\in\mathbb{R}^+$为四旋翼无人机质量, $J_i\in\mathbb{R}^+(i=1,2,3)$为转动惯量, $K_i\in\mathbb{R}^+(i=1,\cdots,6)$为阻力系数, $g\in\mathbb{R}^+$为重力系数, $c\in\mathbb{R}^+$为力和力矩比例系数, $l\in\mathbb{R}^+$为无人机机体中心到旋翼轴心的距离, $d_i(t)\in\mathbb{R}(i=1,\cdots,6)$为未知的外部扰动, u_t为总升力, τ_1,τ_2,τ_3分别为滚转力、俯仰力、偏航力, 与旋翼4个升力的关系如下:

$$\begin{cases} u_t=f_1+f_2+f_3+f_4,\\ \tau_1=-f_1-f_2+f_3+f_4,\\ \tau_2=-f_1+f_2+f_3-f_4,\\ \tau_3=-f_1+f_2-f_3+f_4, \end{cases} \tag{2}$$

式中:

$$f_i=K_1w_i^2,\ i=1,\cdots,4, \tag{3}$$

K_1为旋翼升力系数, 与空气的密度、叶片形状、旋翼半径、升力系数K_s等有关[23].

为了简化四旋翼无人机动力学模型的表达式, 将式(1)重新组织如下:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}=-K_\xi\dot{\xi}-mge+u_t{}_\mathrm{B}^\mathrm{E}R(\eta)e+d_\xi(t),\\ J\ddot{\eta}=-K_\eta\dot{\eta}+\tau+d_\eta(t), \end{cases} \tag{4}$$

式中: $K_\xi=\mathrm{diag}\{K_1,K_2,K_3\}$, $e=[0,0,1]^\mathrm{T}$, $d_\xi(t)=[d_1(t),d_2(t),d_3(t)]^\mathrm{T}$, $J=\mathrm{diag}\{J_1/l,J_2/l,J_3/c\}$, $K_\eta=\mathrm{diag}\{K_4,K_5,K_6/c\}$, $\tau=[\tau_1,\tau_2,\tau_3]^\mathrm{T}$, $d_\eta(t)=[d_4(t)/l,d_5(t)/l,d_6(t)/c]^\mathrm{T}$, ${}_\mathrm{B}^\mathrm{E}R(\eta)\in SO(3)$为机体坐标系(B系)和惯性坐标系(E系)之间的旋转矩阵.

下面给出本文需要用的假设、区间矩阵的定义以

及稳定性证明需要用到的引理.

假设 1 外部扰动$\|d_\xi(t)\|\leqslant\zeta_1$, $\|d_\eta(t)\|\leqslant\zeta_2$, 这里$\zeta_1,\zeta_2$为未知正常数.

定义 1[22] 如果

$$A\in[A^{\mathrm{m}},A^{\mathrm{M}}]=\{[a_{ij}]:a_{ij}^{\mathrm{m}}\leqslant a_{ij}\leqslant a_{ij}^{\mathrm{M}},\ 1\leqslant i,j\leqslant n\},$$

则称A为区间矩阵. 其中:

$$A^{\mathrm{m}}=[a_{ij}^{\mathrm{m}}]_{n\times n},\ A^{\mathrm{M}}=[a_{ij}^{\mathrm{M}}]_{n\times n}$$

对于所有$1\leqslant i,j\leqslant n$, 满足$a_{ij}^{\mathrm{m}}\leqslant a_{ij}^{\mathrm{M}}$.

引理 1[24] 区间矩阵$A\in[A^{\mathrm{m}},A^{\mathrm{M}}]$, 则$A$可以描述为

$$A=A_0+E_{\mathrm{a}}\varSigma_{\mathrm{a}}F_{\mathrm{a}},\ \varSigma_{\mathrm{a}}\in\varSigma_{\mathrm{a}}^*,$$

其中:

$$\begin{aligned}
&A_0=\frac{1}{2}(A^{\mathrm{M}}+A^{\mathrm{m}}),\\
&E_{\mathrm{a}}=\\
&[\sqrt{\varsigma_{11}}e_1,\cdots,\sqrt{\varsigma_{1n}}e_1,\cdots,\sqrt{\varsigma_{n1}}e_n,\cdots,\sqrt{\varsigma_{nn}}e_n]_{n\times n^2},\\
&F_{\mathrm{a}}=\\
&[\sqrt{\varsigma_{11}}e_1,\cdots,\sqrt{\varsigma_{1n}}e_n,\cdots,\sqrt{\varsigma_{n1}}e_1,\cdots,\sqrt{\varsigma_{n}}e_n]_{n^2\times n}^{\mathrm{T}},\\
&\varSigma_{\mathrm{a}}^*=\\
&\{\mathrm{diag}\{\delta_{11},\cdots,\delta_{1n},\cdots,\delta_{n1},\cdots,\delta_{nn}\}\in\mathbb{R}^{n^2\times n^2},\\
&|\delta_{ij}|\leqslant 1,\ i,j=1,\cdots,n\},\\
&\varsigma_{ij}=(a_{ij}^{\mathrm{M}}-a_{ij}^{\mathrm{m}})/2,\ i,\ j=1,\cdots,n,
\end{aligned}$$

$e_i(i=1,\cdots,n)$为$n\times n$维单位矩阵的第i个列向量. 显然对$\forall\varSigma_{\mathrm{a}}\in\varSigma_{\mathrm{a}}^*$, 有$\varSigma_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\varSigma_{\mathrm{a}}\leqslant 1$.

引理 2[25] 设X和Y为合适维数的实矩阵, 对于任意给定的正常数α, 有下列不等式成立:

$$X^{\mathrm{T}}Y+Y^{\mathrm{T}}X\leqslant\alpha^{-1}X^{\mathrm{T}}X+\alpha Y^{\mathrm{T}}Y.$$

引理 3[26] 对任意给定的分块对称矩阵

$$G=\begin{bmatrix}X & Y\\ Y^{\mathrm{T}} & Z\end{bmatrix},$$

其中X和Z为对称矩阵, 则下述情况等价:

1) $G<0$;

2) $X<0,\ Z-Y^{\mathrm{T}}X^{-1}Y<0$;

3) $Z<0,\ X-YZ^{-1}Y^{\mathrm{T}}<0$.

3 鲁棒控制器设计(Robust controller design)

这一部分主要内容是建立系统误差动态模型和设计内外环鲁棒控制器. 基于文献[13]中的方法, 将四旋翼无人机系统解耦为内环角度系统和外环位置系统, 引入区间变量描述系统中不确定参数, 得到系统误差动态模型. 对于未知有界外部扰动, 采用鲁棒H_∞控制进行抑制. 外环位置系统通过鲁棒控制器实现位置跟踪, 产生虚拟控制量$[V_{\mathrm{x}},V_{\mathrm{y}},V_{\mathrm{z}}]$, 通过解耦非线性虚拟控制量产生位置控制输入$u_{\mathrm{t}}$和内环控制需要的期望角度$\phi_{\mathrm{d}},\theta_{\mathrm{d}}$; 内环角度系统采用鲁棒$\mathrm{H}_\infty$反馈控制实现角度的跟踪, 产生角度控制输入$\tau_1,\tau_2,\tau_3$. 控制框图如图2所示.

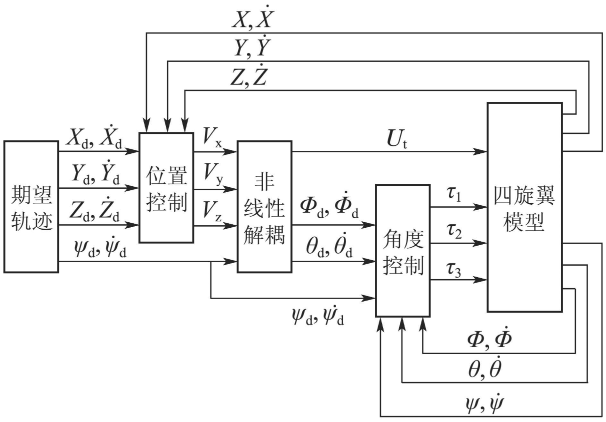


图 2 控制框图

Fig. 2 The block diagram of control system

3.1 误差动态模型(Model of dynamic error)

为了获得四旋翼无人机系统的动态误差模型, 采用向量$\xi_{\mathrm{d}}(t)=[x_{\mathrm{d}}(t),y_{\mathrm{d}}(t),z_{\mathrm{d}}(t)]^{\mathrm{T}}$和$\eta_{\mathrm{d}}(t)=[\phi_{\mathrm{d}}(t),\theta_{\mathrm{d}}(t),\psi_{\mathrm{d}}(t)]^{\mathrm{T}}$表示期望的位置和角度, 定义跟踪误差向量:

$$\begin{aligned}X_{\mathrm{p}}&=[\xi-\xi_{\mathrm{d}},\ \dot\xi-\dot\xi_{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}},\\ X_{\mathrm{a}}&=[\eta-\eta_{\mathrm{d}},\ \dot\eta-\dot\eta_{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{5}$$

动力学模型(4)可以看成一个通过旋转矩阵${}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{E}}R(\eta)$耦合的串级系统: 内环角度系统和外环位置系统. 设计虚拟控制输入向量$V=[V_{\mathrm{x}},V_{\mathrm{y}},V_{\mathrm{z}}]^{\mathrm{T}}$, 使该系统解耦为两个可独立控制的内外环子系统. 对式(5)中的所有变量求一阶时间导数, 并将式(4)代入整理可得

$$\begin{aligned}
&\dot X_{\mathrm{p}}=[\dot\xi-\dot\xi_{\mathrm{d}},\ddot\xi-\ddot\xi_{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}}=\\
&\begin{bmatrix}O_{3\times3} & I_{3\times3}\\ O_{3\times3} & O_{3\times3}\end{bmatrix}X_{\mathrm{p}}+\begin{bmatrix}O_{3\times3}\\ I_{3\times3}\end{bmatrix}(\ddot\xi-\ddot\xi_{\mathrm{d}})=\\
&\begin{bmatrix}O_{3\times3} & I_{3\times3}\\ O_{3\times3} & -\dfrac{K_\xi}{m}\end{bmatrix}X_{\mathrm{p}}+\begin{bmatrix}O_{3\times3}\\ I_{3\times3}\end{bmatrix}(V-\ddot\xi_{\mathrm{d}}-\\
&\frac{K_\xi}{m}\dot\xi_{\mathrm{d}}+\frac{d_\xi(t)}{m})+\begin{bmatrix}O_{3\times3}\\ I_{3\times3}\end{bmatrix}\underbrace{(\frac{u_t}{m}Re-ge-V)}_{f_\Delta},
\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\dot X_{\mathrm{a}}=[\dot\eta-\dot\eta_{\mathrm{d}},\ddot\eta-\ddot\eta_{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}}=\\
&\begin{bmatrix}O_{3\times3} & I_{3\times3}\\ O_{3\times3} & O_{3\times3}\end{bmatrix}X_{\mathrm{a}}+\begin{bmatrix}O_{3\times3}\\ I_{3\times3}\end{bmatrix}(\ddot\eta-\ddot\eta_{\mathrm{d}})=\\
&\begin{bmatrix}O_{3\times3} & I_{3\times3}\\ O_{3\times3} & -J^{-1}K_\eta\end{bmatrix}X_{\mathrm{a}}+\\
&\begin{bmatrix}O_{3\times3}\\ I_{3\times3}\end{bmatrix}[J^{-1}(\tau-K_\eta\dot\eta_{\mathrm{d}}+d_\eta(t))-\ddot\eta_{\mathrm{d}}].
\end{aligned}\tag{7}$$

式(6)中虚拟控制输入向量V的表达式如下:

$$\begin{cases} V_{\mathrm{x}} = \dfrac{u_{\mathrm{t}}}{m}(\cos\phi_{\mathrm{d}}\sin\theta_{\mathrm{d}}\cos\psi_{\mathrm{d}} + \sin\phi_{\mathrm{d}}\sin\psi_{\mathrm{d}}), \\ V_{\mathrm{y}} = \dfrac{u_{\mathrm{t}}}{m}(\cos\phi_{\mathrm{d}}\sin\theta_{\mathrm{d}}\sin\psi_{\mathrm{d}} - \sin\phi_{\mathrm{d}}\cos\psi_{\mathrm{d}}), \\ V_{\mathrm{z}} = \dfrac{u_{\mathrm{t}}}{m}(\cos\phi_{\mathrm{d}}\cos\theta_{\mathrm{d}}) - \mathrm{g}. \end{cases} \tag{8}$$

虚拟控制输入由外环位置控制器产生, 通过这一虚拟控制输入解算出旋翼总升力、期望滚转角和期望俯仰角, 如下式:

$$\begin{cases} u_t = m\sqrt{V_{\mathrm{x}}^2 + V_{\mathrm{y}}^2 + (V_{\mathrm{z}} + \mathrm{g})^2}, \\ \phi_{\mathrm{d}} = \sin^{-1}[\dfrac{m}{u_t}(V_{\mathrm{x}}\sin\psi_{\mathrm{d}} - V_{\mathrm{y}}\cos\psi_{\mathrm{d}})], \\ \theta_{\mathrm{d}} = \tan^{-1}[\dfrac{1}{V_{\mathrm{z}} + \mathrm{g}}(V_{\mathrm{x}}\cos\psi_{\mathrm{d}} + V_{\mathrm{y}}\sin\psi_{\mathrm{d}})]. \end{cases} \tag{9}$$

在不考虑非线性耦合项f_Δ的情况下, 通过设计V, τ使得式(6)和式(7) 渐近稳定, 则整个四旋翼无人机系统渐近稳定[13], 故四旋翼无人机系统可解耦成位置和姿态两个可独立控制的子系统.

根据式(6)和式(7)及耦合项$f_\Delta = 0$, 四旋翼无人机系统误差动态模型写成

$$\dot{X}_{\mathrm{p}} = A_1 X_{\mathrm{p}} + B_1 V + B_1 f_{\mathrm{p}} + B_{11} W_1, \tag{10}$$

$$\dot{X}_{\mathrm{a}} = A_2 X_{\mathrm{a}} + B_2 \tau + B_2 f_{\mathrm{a}} + B_{22} W_2, \tag{11}$$

式中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} O_{3\times3} & I_{3\times3} \\ O_{3\times3} & -\dfrac{K_\xi}{m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times6},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} O_{3\times3} & I_{3\times3} \\ O_{3\times3} & -J^{-1}K_\eta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times6},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} O_{3\times3} \\ I_{3\times3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times3},\ B_2 = \begin{bmatrix} O_{3\times3} \\ J^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times3},$$

$$B_{11} = B_{22} = \begin{bmatrix} O_{3\times3} & O_{3\times3} \\ O_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times6},$$

$$f_{\mathrm{p}} = -\ddot{\xi}_{\mathrm{d}} - \frac{K_\xi}{m}\dot{\xi}_{\mathrm{d}} \in \mathbb{R}^3,\ W_1 = [O_3;\ \frac{d_\xi(t)}{m}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6,$$

$$f_{\mathrm{a}} = -K_\eta\dot{\eta}_{\mathrm{d}} - J\ddot{\eta}_{\mathrm{d}} \in \mathbb{R}^3,\ O_3 = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3,$$

$$W_2 = [O_3;\ J^{-1}d_\eta(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6.$$

3.2 鲁棒反馈控制器设计 (Robust feedback controller design)

在四旋翼无人机飞行过程中, 由于环境的变化系统中含有不确定参数$K_i(i = 1, \cdots, 6), K_{\mathrm{s}}, K_{\mathrm{l}}, c$和$J_i$ $(i = 1, 2, 3)$, 为了获得好的轨迹跟踪效果, 设计的控制器需要足够强的鲁棒性以消除这些不确定参数的影响. 下面给出鲁棒反馈控制器的设计过程.

对于某一给定的四旋翼无人机, 由于受实际飞行条件的限制, 参数$K_i(i=1, \cdots, 6), K_{\mathrm{s}}, K_{\mathrm{l}}, c$和$J_i(i=1, 2, 3)$在一定的范围内变化, 这些参数都可以看成区间变量.

$$\begin{cases} K_i^{\mathrm{m}} \leqslant K_i \leqslant K_i^{\mathrm{M}},\ i = 1, \cdots, 6, \\ K_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m}} \leqslant K_{\mathrm{s}} \leqslant K_{\mathrm{s}}^{\mathrm{M}},\ K_{\mathrm{l}}^{\mathrm{m}} \leqslant K_{\mathrm{l}} \leqslant K_{\mathrm{l}}^{\mathrm{M}}, \\ J_i^{\mathrm{m}} \leqslant J_i \leqslant J_i^{\mathrm{M}},\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{12}$$

根据区间变量的代数性质和四则运算[21], 可得四旋翼无人机飞行过程中, K_ξ, K_η, c的上下界. 由式(10)和式(11)可以看出四旋翼无人机系统矩阵A_1和A_2、输入矩阵B_2中的一些元素为上述区间变量的函数, 同样可以推算出这些区间矩阵的变化区间:

$$A_1^{\mathrm{m}} \leqslant A_1 \leqslant A_1^{\mathrm{M}},$$
$$A_2^{\mathrm{m}} \leqslant A_2 \leqslant A_2^{\mathrm{M}},$$
$$B_2^{\mathrm{m}} \leqslant B_2 \leqslant B_2^{\mathrm{M}}.$$

根据引理1, 区间矩阵A_1, A_2, B_2可以描述为

$$A_1 = A_{10} + E_{\mathrm{p}}\varSigma_{\mathrm{p}}F_{\mathrm{p}},\ \varSigma_{\mathrm{p}} \in \varSigma_{\mathrm{p}}^*,$$
$$A_2 = A_{20} + E_{\mathrm{a1}}\varSigma_{\mathrm{a1}}F_{\mathrm{a1}},\ \varSigma_{\mathrm{a1}} \in \varSigma_{\mathrm{a1}}^*,$$
$$B_2 = B_{20} + E_{\mathrm{a2}}\varSigma_{\mathrm{a2}}F_{\mathrm{a2}},\ \varSigma_{\mathrm{a2}} \in \varSigma_{\mathrm{a2}}^*,$$

则位置误差模型(10)和角度误差模型(11)可以写成

$$\dot{X}_{\mathrm{p}} = (A_{10} + E_{\mathrm{p}}\varSigma_{\mathrm{p}}F_{\mathrm{p}})X_{\mathrm{p}} + B_1(V + f_{\mathrm{p}}) + B_{11}W_1, \tag{13}$$

$$\dot{X}_{\mathrm{a}} = (A_{20} + E_{\mathrm{a1}}\varSigma_{\mathrm{a1}}F_{\mathrm{a1}})X_{\mathrm{a}} + (B_{20} + E_{\mathrm{a2}}\varSigma_{\mathrm{a2}}F_{\mathrm{a2}})(\tau + f_{\mathrm{a}}) + B_{22}W_2. \tag{14}$$

对位置误差模型和角度误差模型设计如下的鲁棒状态反馈控制器:

$$V = K_1 X_{\mathrm{p}} - f_{\mathrm{p}},\ K_1 \in \mathbb{R}^{6\times3}, \tag{15}$$

$$\tau = K_2 X_{\mathrm{a}} - f_{\mathrm{a}},\ K_2 \in \mathbb{R}^{6\times3}, \tag{16}$$

其中K_1, K_2是控制增益矩阵.

位置误差模型(13)在控制器(15)作用下的位置闭环系统为

$$\dot{X}_{\mathrm{p}} = (A_{10} + E_{\mathrm{p}}\varSigma_{\mathrm{p}}F_{\mathrm{p}} + B_1K_1)X_{\mathrm{p}} + B_{11}W_1. \tag{17}$$

定义$Y_{\mathrm{p}} = [\xi - \xi_{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}}$为位置闭环系统的控制输出, 则

$$Y_{\mathrm{p}} = C_1 X_{\mathrm{p}}, \tag{18}$$

其中

$$C_1 = [I_{3\times3},\ O_{3\times3}] \in \mathbb{R}^{3\times6},$$

可以得到如下定理:

定理 1　满足条件(12)的位置误差模型(10), 对

于给定正常数ε,γ_1, 如果存在实对称正定矩阵Q_1、正常数α_1和矩阵M_1使得下面的LMI成立:

$$\begin{bmatrix} R_1 & (F_{\rm p}Q_1)^{\rm T} & Q_1 & (B_{11}Q_1)^{\rm T} & (C_1Q_1)^{\rm T} \\ * & -\alpha_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma_1 I \end{bmatrix} < 0, \tag{19}$$

那么, 位置闭环系统式(17)和式(18)针对平衡状态$X_{\rm p}=0$指数渐近稳定且满足$\rm H_\infty$性能指标γ_1, 有$K_1=M_1Q_1^{-1}$, 其中$R_1=A_{10}Q_1+Q_1A_{10}^{\rm T}+B_1M_1+M_1B_1^{\rm T}+\alpha_1E_{\rm p}E_{\rm p}^{\rm T}$.

证 假设$W_1\equiv 0$, 选取李雅普诺夫函数

$$V(X_{\rm p})=X_{\rm p}^{\rm T}P_1X_{\rm p}. \tag{20}$$

上式对时间求一阶导数，并将式(17)代入可得

$$\begin{aligned}\dot V(X_{\rm p})=X_{\rm p}^{\rm T}[&A_{10}^{\rm T}P_1+P_1A_{10}+(B_1K_1)^{\rm T}P_1+\\ &P_1(B_1K_1)+(E_{\rm p}\varSigma_{\rm p}F_{\rm p})^{\rm T}P_1+\\ &P_1(E_{\rm p}\varSigma_{\rm p}F_{\rm p})]X_{\rm P}.\end{aligned} \tag{21}$$

根据引理2和$\varSigma_{\rm p}^{\rm T}\varSigma_{\rm p}\leqslant I$有

$$\begin{aligned}&P_1(E_{\rm p}\varSigma_{\rm p}F_{\rm p})+(E_{\rm p}\varSigma_{\rm p}F_{\rm p})^{\rm T}P_1=\\ &(\Sigma_{\rm p}F_{\rm p})^{\rm T}(P_1E_{\rm p})^{\rm T}+P_1E_{\rm p}\varSigma_{\rm p}F_{\rm p}\leqslant\\ &\alpha_1^{-1}F_{\rm p}^{\rm T}F_{\rm p}+\alpha_1P_1E_{\rm p}E_{\rm p}^{\rm T}P_1,\end{aligned} \tag{22}$$

其中α_1为正常数. 将式(22)代入式(21), 推导得

$$\dot V(X_{\rm p})\leqslant X_{\rm p}^{\rm T}\varPi_{11}X_{\rm p}, \tag{23}$$

式中$\varPi_{11}=A_{10}^{\rm T}P_1+P_1A_{10}+(B_1K_1)^{\rm T}P_1+P_1B_1K_1+\alpha_1^{-1}F_{\rm p}^{\rm T}F_{\rm p}+\alpha_1P_1E_{\rm p}E_{\rm p}^{\rm T}P_1$.

给定正常数ε_1, 如果$\varPi_1<-\varepsilon_1 I$成立, 则有$\dot V(X_{\rm p})<-\varepsilon_1\|X_{\rm p}\|^2$, 则位置误差模型(13)在控制器(15)作用下指数稳定.

在位置闭环系统指数稳定且$W_1\not\equiv 0$的情况下. 对于给定正常数γ_1, 考虑$\rm H_\infty$性能指标

$$J_{\rm p}=\int_0^{+\infty}[Y_{\rm p}^{\rm T}Y_{\rm p}-\gamma_1^2W_1^{\rm T}W_1]{\rm d}(t). \tag{24}$$

因为位置闭环系统指数稳定, 则有$V(X_{\rm p}(+\infty))=0$, 且系统初始条件为零, 所以

$$\begin{aligned}J_{\rm p}=&\int_0^{+\infty}[Y_{\rm p}^{\rm T}Y_{\rm p}-\gamma_1^2W_1^{\rm T}W_1+\frac{\rm d}{{\rm d}t}V(X_{\rm p})]{\rm d}(t)\leqslant\\ &\int_0^{+\infty}\begin{bmatrix}X_{\rm p}\\ W_1\end{bmatrix}^{\rm T}\varPi_{12}\begin{bmatrix}X_{\rm p}\\ W_1\end{bmatrix}{\rm d}(t),\end{aligned} \tag{25}$$

式中$\varPi_{12}=\begin{bmatrix}C_1^{\rm T}\\ 0\end{bmatrix}[C_1\quad 0]+\begin{bmatrix}\varPi_{11} & (P_1B_{11})^{\rm T}\\ * & -\gamma_1^2 I\end{bmatrix}$.

如果$\varPi_{12}<0$, 那么$J_{\rm p}<0$, 则位置闭环系统(17)和式(18)满足$\rm H_\infty$性能指标γ_1. 定义$Q_1=P_1^{-1}$, 用Q_1同时左乘右乘$\varPi_{12}$. 由引理3可知, $Q_1\varPi_{12}Q_1<0$等价于下式:

$$\varPi_{13}=\begin{bmatrix}Q_1\varPi_{11}Q_1 & (B_{11}Q_1)^{\rm T} & (C_1Q_1)^{\rm T}\\ * & -\gamma_1^2Q_1^2 & 0\\ * & 0 & -Q_1^2\end{bmatrix}<0. \tag{26}$$

定义矩阵

$$\varPi_{14}=\begin{bmatrix}Q_1\varepsilon_1Q_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

$$\varPi_{15}=\varPi_{13}+\varPi_{14}=\begin{bmatrix}Q_1\varPi_{11}Q_1+Q_1\varepsilon_1Q_1 & (B_{11}Q_1)^{\rm T} & (C_1Q_1)^{\rm T}\\ * & -\gamma_1^2Q_1^2 & 0\\ * & 0 & -Q_1^2\end{bmatrix}.$$

如果$\varPi_{15}<0$, 则$\varPi_{13}<0$且$\varPi_{11}+\varepsilon_1 I<0$, 则位置闭环系统(17)指数稳定且满足$\rm H_\infty$性能指标$\gamma_1$.

为了获得$\varPi_{15}<0$的等效LMI形式, 定义$\varepsilon=1/\varepsilon_1$. 将其与矩阵${\rm diag}\{I,\gamma_1^{-1/2}Q_1^{-1},\gamma_1^{1/2}Q_1^{-1}\}$进行Hadamard乘积, 可得等价形式

$$\begin{bmatrix}Q_1\varPi_{11}Q_1+Q_1\dfrac{1}{\varepsilon}Q_1 & (B_{11}Q_1)^{\rm T} & Q_1C_1^{\rm T}C_1Q_1\\ * & -\gamma_1 & 0\\ * & 0 & -\gamma_1\end{bmatrix}<0. \tag{27}$$

根据引理3知式(27)等价于式(19). 对于给定正常数γ_1,ε, 若α_1为正常数, $Q_1>0$, 则位置闭环系统式(17)和式(18)在平衡状态$X_{\rm p}=0$指数稳定且具有一定的干扰抑制性能. 控制器(15)增益矩阵为$K_1=M_1Q_1^{-1}$. 证毕.

则角度误差模型(14)在控制器(16)作用下的角度闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot X_{\rm a}=&(A_{20}+E_{\rm a1}\varSigma_{\rm a1}F_{\rm a1}+(B_{20}+\\ &E_{\rm a2}\varSigma_{\rm a2}F_{\rm a2})K_1)X_{\rm a}+B_{22}W_2.\end{aligned} \tag{28}$$

定义$Y_{\rm a}=[\eta-\eta_{\rm d}]^{\rm T}$为角度闭环系统的控制输出, 则

$$Y_{\rm a}=C_2X_{\rm a}, \tag{29}$$

其中$C_2=[I_{3\times3},O_{3\times3}]\in\mathbb{R}^{3\times6}$. 可以得到如下定理.

定理 2 满足条件(12)的角度误差模型(11), 对于给定正常数γ_2, 如果存在实对称正定矩阵Q_2、正常数α_2,β和矩阵M_2使得下面的LMI成立:

$$\begin{bmatrix} R_2 & (F_{\rm a1}Q_2)^{\rm T} & (F_{\rm a2}M_2)^{\rm T} & (B_{22}Q_2)^{\rm T} & (C_2Q_2)^{\rm T} \\ * & -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma_2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma_2 I \end{bmatrix}<0, \tag{30}$$

那么, 角度闭环系统式(28)和式(29)针对平衡状态$X_{\rm a}=0$渐近稳定, 且满足$\rm H_\infty$性能指标γ_2, 有$K_2=M_2Q_2^{-1}$, 其中

$$R_2=A_{20}Q_2+Q_2A_{20}^{\rm T}+B_{20}M_2+M_2B_{20}^{\rm T}+\alpha_2E_{\rm a1}E_{\rm a1}^{\rm T}+\beta E_{\rm a2}E_{\rm a2}^{\rm T}.$$

证　假设$W\equiv 0$, 选取李雅普诺夫函数

$$V(X_{\rm a})=X_{\rm a}^{\rm T}P_2X_{\rm a}. \tag{31}$$

上式对时间求一阶导数, 并将式(28)代入可得

$$\begin{aligned}\dot V(X_{\rm a})=&X_{\rm a}^{\rm T}[A_{20}^{\rm T}P_2+P_2A_{20}+(B_{20}K_2)^{\rm T}P_2+\\&P_2(B_{20}K_2)+(E_{\rm a1}\Sigma_{\rm a1}F_{\rm a1})^{\rm T}P_2+\\&P_2(E_{\rm a1}\Sigma_{\rm a1}F_{\rm a1})+(E_{\rm a2}\Sigma_{\rm a2}F_{\rm a2}K_2)^{\rm T}P_2+\\&P_2(E_{\rm a2}\Sigma_{\rm a2}F_{\rm a2}K_2)]X_{\rm a}.\end{aligned} \tag{32}$$

根据引理2、$\Sigma_{\rm a1}^{\rm T}\Sigma_{\rm a1}\leqslant I$和$\Sigma_{\rm a2}^{\rm T}\Sigma_{\rm a2}\leqslant I$有

$$\begin{aligned}&P_2(E_{\rm a1}\Sigma_{\rm a1}F_{\rm a1})+(E_{\rm a1}\Sigma_{\rm a1}F_{\rm a1})^{\rm T}P_2=\\&(\Sigma_{\rm a1}F_{\rm a1})^{\rm T}E_{\rm a1}^{\rm T}P_2+P_2E_{\rm a1}\Sigma_{\rm a1}F_{\rm a1}\leqslant\\&\alpha_2^{-1}F_{\rm a1}^{\rm T}F_{\rm a1}+\alpha_2P_2E_{\rm a1}E_{\rm a1}^{\rm T}P_2,\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}&P_2(E_{\rm a2}\Sigma_{\rm a2}F_{\rm a2}K_2)+(E_{\rm a2}\Sigma_{\rm a2}F_{\rm a2}K_2)^{\rm T}P_2=\\&(\Sigma_{\rm a2}F_{\rm a2}K_2)^{\rm T}E_{\rm a2}^{\rm T}P_2+P_2E_{\rm a2}\Sigma_{\rm a2}F_{\rm a2}K_2\leqslant\\&\beta^{-1}K_2^{\rm T}F_{\rm a2}^{\rm T}F_{\rm a2}K_2+\beta P_2E_{\rm a2}E_{\rm a2}^{\rm T}P_2,\end{aligned} \tag{34}$$

其中α_2,β为正常数. 将式(33)–(34)代入式(32), 推导得

$$\dot V(X_{\rm a})\leqslant X_{\rm a}^{\rm T}\varPi_{21}X_{\rm a}, \tag{35}$$

式中

$$\begin{aligned}\Pi_{21}=&A_{20}^{\rm T}P_2+P_2A_{20}+(B_{20}K_2)^{\rm T}P_2+\\&P_2B_{20}K_2+\alpha_2^{-1}F_{\rm a1}^{\rm T}F_{\rm a1}+\alpha_2P_2E_{\rm a1}E_{\rm a1}^{\rm T}P_2+\\&\beta^{-1}(F_{\rm a2}K_2)^{\rm T}F_{\rm a2}K_2+\beta P_2E_{\rm a2}E_{\rm a2}^{\rm T}P_2.\end{aligned}$$

如果$\varPi_{21}<0$成立, 有$\dot V(X_{\rm a})<0$, 则角度闭环系统(28)内部稳定.

在角度闭环系统内部稳定且$W_2\neq 0$的情况下. 对于给定正常数γ_2, 考虑$\rm H_\infty$性能指标

$$J_{\rm T}=\int_0^{+\infty}[Y_{\rm a}^{\rm T}Y_{\rm a}-\gamma_2^2W_2^{\rm T}W_2]{\rm d}(t). \tag{36}$$

因为角度闭环系统内部稳定, 则有$V(X_{\rm a}(+\infty))=0$, 且系统初始条件为零, 所以

$$\begin{aligned}J_{\rm T}=&\int_0^{+\infty}[Y_{\rm a}^{\rm T}Y_{\rm a}-\gamma_2^2W_2^{\rm T}W_2+\frac{\rm d}{{\rm d}t}V(X_{\rm a})]{\rm d}(t)\leqslant\\&\int_0^{+\infty}\begin{bmatrix}X_{\rm a}\\W_2\end{bmatrix}^{\rm T}\varPi_{22}\begin{bmatrix}X_{\rm a}\\W_2\end{bmatrix}{\rm d}(t),\end{aligned} \tag{37}$$

式中$\varPi_{22}=\begin{bmatrix}C_2^{\rm T}\\0\end{bmatrix}[C_2\quad 0]+\begin{bmatrix}\varPi_{21}&P_2B_{22}\\ *&-\gamma_2^2I\end{bmatrix}$.

如果$\varPi_{22}<0$, 那么$J_{\rm T}<0$, 则角度闭环系统式(28)和式(29)满足$\rm H_\infty$性能指标γ_2. $\varPi_{23}<0$是双线性不等式, 定义$Q_2=P_2^{-1}$, 用Q_2对其左右两边分别左乘右乘Q_2, 设$M_2=K_2Q_2$, 可得

$$\begin{aligned}&Q_2\varPi_3Q_2=\\&\begin{bmatrix}Q_2C_2^{\rm T}C_2Q_2&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Q_2\varPi_2Q_2&B_{22}Q_2\\ *&-\gamma^2Q_2^2\end{bmatrix}<0.\end{aligned} \tag{38}$$

由引理3可知, 式(38)等价于下式:

$$\begin{bmatrix}R_2&(F_{\rm a1}Q_2)^{\rm T}&(F_{\rm a2}M_2)^{\rm T}&(B_{22}Q_2)^{\rm T}&(C_2Q_2)^{\rm T}\\ *&-\alpha_2I&0&0&0\\ *&*&-\beta I&0&0\\ *&*&*&-\gamma_2^2Q_2^2&0\\ *&*&*&*&-I\end{bmatrix}<0, \tag{39}$$

式中

$$\begin{aligned}R_2=&A_{20}Q_2+Q_2A_{20}^{\rm T}+B_{20}M_2+\\&M_2B_{20}^{\rm T}+\alpha_2E_{\rm a1}E_{\rm a1}^{\rm T}+\beta E_{\rm a2}E_{\rm a2}^{\rm T}.\end{aligned}$$

将上式与矩阵${\rm diag}\{I,I,I,\gamma_2^{-1/2}Q_2^{-1},\gamma_2^{1/2}\}$进行Hadamard乘积, 等价于式(30). 对于给定正常数γ_2, 若α_2,β为正常数, $Q_2>0$, 则角度闭环系统式(28)和式(29)渐近稳定且满足$\rm H_\infty$性能指标γ_2. 控制器(16)增益矩阵为$K_2=M_2Q_2^{-1}$.　　证毕.

4　仿真及实验(Simulation and experiment)

实验室搭建的四旋翼无人机如图3所示, 其模型参数标称值为$m=2.5\,{\rm kg}$, $l=0.245\,{\rm m}$, $J_1=J_2=0.047\,{\rm kg\cdot m^2}$, $J_3=0.102\,{\rm kg\cdot m^2}$, ${\rm g}=9.8\,{\rm m/s^2}$.

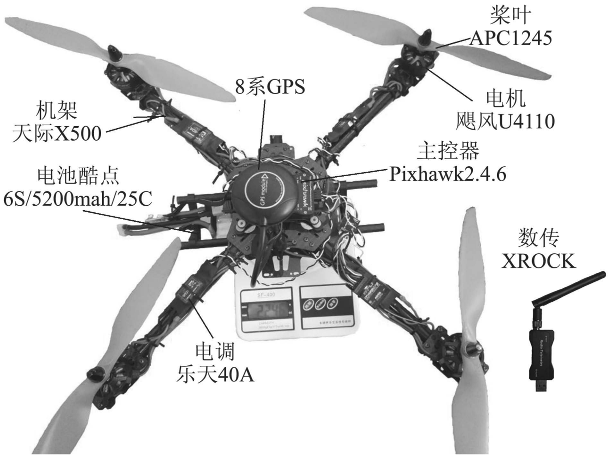


图 3　四旋翼无人机硬件图

Fig. 3　Hardware configuration of the quad-rotor UAV

查阅文献[9,28]知, 对于某一特定四旋翼无人机, 其飞行过程中, 空气动力学参数变换范围为

$$\begin{cases}0.01\,{\rm Ns/m}\leqslant K_i\leqslant 0.12\,{\rm Ns/m},\ i=1,\cdots,6,\\0.0083\leqslant c\leqslant 0.24.\end{cases} \tag{40}$$

本文设计控制器时, 考虑了转动惯量在标称值±10%的范围内波动, 以及上述空气动力学参数的变化. 则系统误差模型式(10)–(11)中包含不确定参数的矩阵A_1,A_2,B_2上下界为

$$A_1^{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0535 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0535 \end{bmatrix},$$

$$A_1^{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0045 \end{bmatrix},$$

$$A_2^{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6950 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6950 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3072 \end{bmatrix},$$

$$A_2^{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0474 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0474 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0891 \end{bmatrix},$$

$$B_2^{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.7389 & 0 & 0 \\ 0 & 4.7389 & 0 \\ 0 & 0 & 4.7389 \end{bmatrix},$$

$$B_2^{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5.7920 & 0 & 0 \\ 0 & 5.7920 & 0 \\ 0 & 0 & 5.7920 \end{bmatrix}.$$

采用MATLAB 的LMI工具箱求解定理1和定理2中的LMI式(19)和式(30), 取$\varepsilon = 0.5$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, 得 到$\alpha_1 = 29.0557$, $\alpha_2 = 0.3409$, $\beta = 59.8406$、本文所设计的位置控制增益矩阵和角度控制增益矩阵

$$K_1 = \begin{bmatrix} -35.30 & 0 & 0 & -3.68 & 0 & 0 \\ 0 & -35.30 & 0 & 0 & -3.68 & 0 \\ 0 & 0 & -35.30 & 0 & 0 & -3.68 \end{bmatrix}, \tag{41}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -6.56 & 0 & 0 & -3.44 & 0 & 0 \\ 0 & -6.56 & 0 & 0 & -3.44 & 0 \\ 0 & 0 & -714.9 & 0 & 0 & -203.8 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

4.1 仿真结果(Simulation results)

本文采用MATLAB/Simulink对四旋翼无人机进行轨迹跟踪仿真, 并将所设计的鲁棒反馈控制方法与文献[27]中内外环结构PD控制方法进行仿真对比.

假设转动惯量为标称值, 空气动力学参数取0.05. 四旋翼无人机跟踪X-Y平面内的一个半径为10 m圆, 首先, 8 s时, 四旋翼无人机在2 s内垂直上升至1 m; 接着, 在X-Y平面做圆形运动, 周期为8 s, 仿真持续45 s, 飞行速度达7.8 m/s. 其标称参数情况下的期望轨迹和实际跟踪轨迹三维图如图4所示.

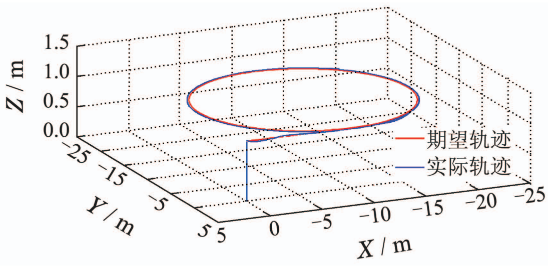


图 4 标称参数下三维轨迹图

Fig. 4 UAV trajectory in three dimensional with the nominal parameters

从图4可以看出, 尽管期望轨迹的方向快速变化, 本文所设计的鲁棒状态反馈控制方法依然可以跟踪上期望轨迹, 并有很好的跟踪效果, 而且控制增益是由LMI求出, 不需要手动调节.

在标称参数下进行内外环PD控制的仿真, 并将其与本文方法进行对比, 相应的位置跟踪误差和角度跟踪误差曲线如图5–6所示.

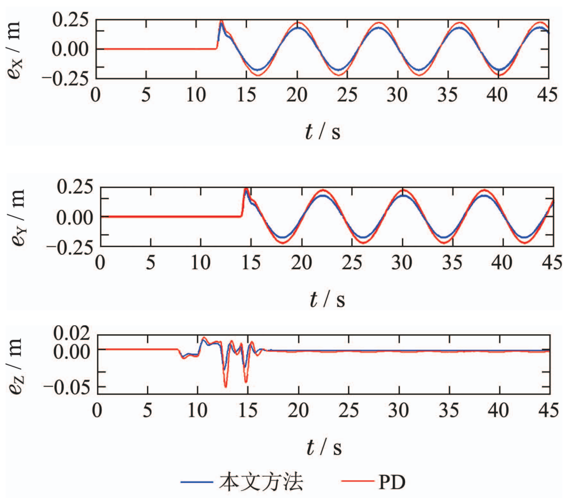


图 5 标称参数下位置跟踪误差

Fig. 5 Simulation curves of position tracking error with the nominal parameters

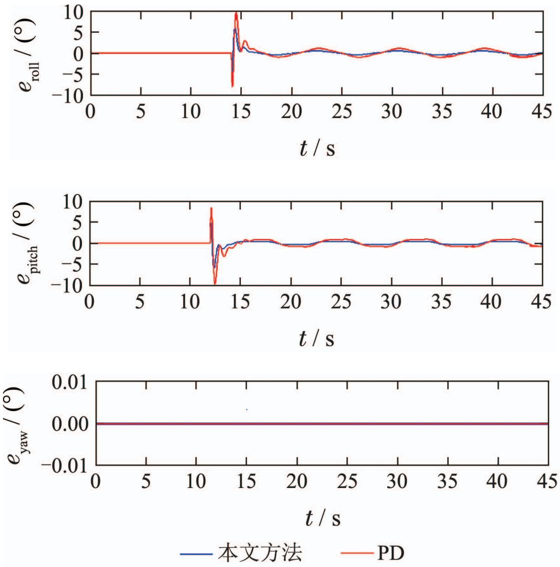


图 6　标称参数下角度跟踪误差

Fig. 6　Simulation curves of attitude tracking error with the nominal parameters

从图5可以看出, 在X, Y方向, 采用内外环PD控制的跟踪误差达0.24 m, 采用本文方法的跟踪误均小于0.2 m; 在Z方向, 采用内外环PD控制的位置跟踪误差达0.05 m, 采用本文方法的位置跟踪误差小于0.025 m. 可知本文提出的控制方法位置跟踪误差更小. 从图6可以看出, 采用本文方法的角度跟踪误差小于内外环PD控制. 因此, 在标称情况下, 本文所提出的鲁棒控制方法比内外环PD控制的控制效果更好.

为了验证本文方法的鲁棒性, 假设空气阻力系数和转动惯量等参数存在不确定性, 空气阻力系数和升力系数在取值范围内随机变化, 转动惯量在标称值上下10%范围内随机变化. 在此条件下, 内外环PD控制和本文控制方法仿真的跟踪误差如下图7–8所示.

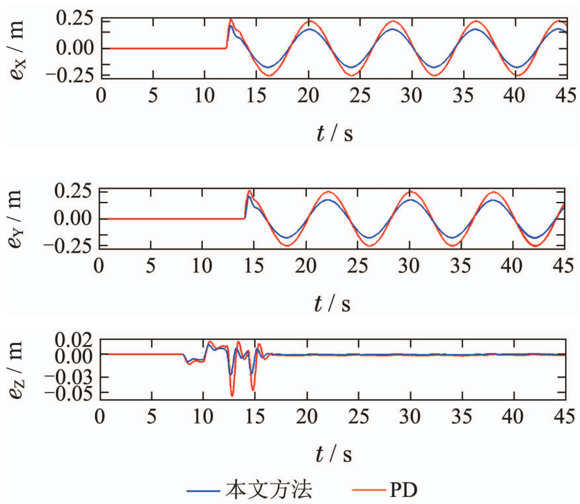


图 7　不确定参数下位置跟踪误差

Fig. 7　Simulation curves of position tracking error with the uncertain parameters

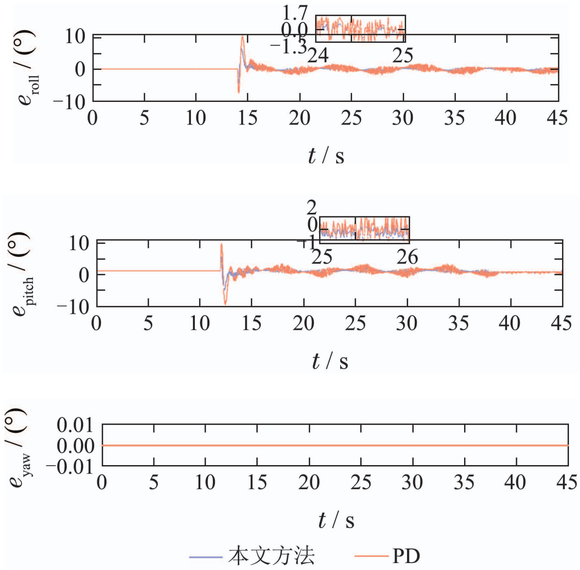
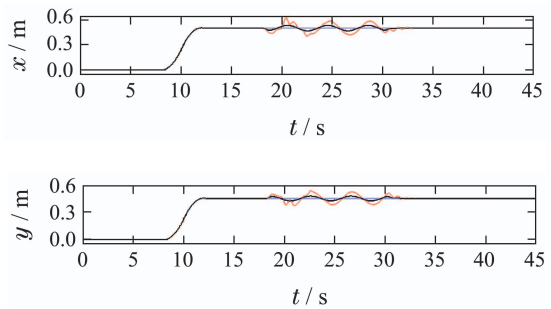


图 8　不确定参数下角度跟踪误差

Fig. 8　Simulation curves of attitude tracking error with the uncertain parameters

从图7–8可以看出, 在不确定参数下, 两种控制方法的位置跟踪误差和角度跟踪误差都出现了一定的波动. 在X轴、Y轴方向, 采用内外环PD控制的跟踪误差增加量达0.02 m, 增幅约8%, 而采用本文方法的位置跟踪误差仅增加了0.002 m, 增幅不足1%; 在Z轴方向, 采用内外环PD控制的位置跟踪误差增幅大于本文方法. 从图8可以看出, 采用本文方法的角度误差增加量小于内外环PD控制. 在14 s附近, 采用内外环PD控制的滚转角跟踪误差增加量达到0.95°, 采用本文方法的滚转角跟踪误差仅增加了0.38°; 在12 s附近, 采用内外环 PD 控制的俯仰角跟踪误差增加量达到1.05°, 增幅约9.5%, 而采用本文方法的俯仰角跟踪误差增加量仅有0.14°, 增幅仅2.2%. 从上面的分析可知, 本文提出的方法有较强的鲁棒性.

为了验证本文提出方法具有抑制外部有界扰动的能力, 本文进行参数不确定情况下的仿真, 初始点为(0, 0, 0), 8 s∼12 s达到设定点(0.5, 0.5, 0.5), 保持稳定; 18 s∼31 s, 对位置和角度方向同时加入幅值为0.22的正弦扰动. 在此条件下, 内外环PD控制和本文控制方法仿真的角度曲线和位置曲线如下图9–10所示.



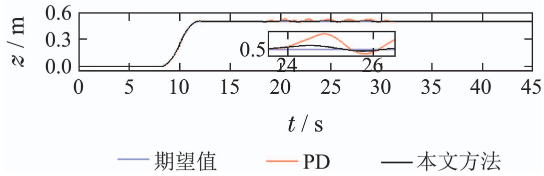


图 9 位置曲线

Fig. 9 Simulation curves of position

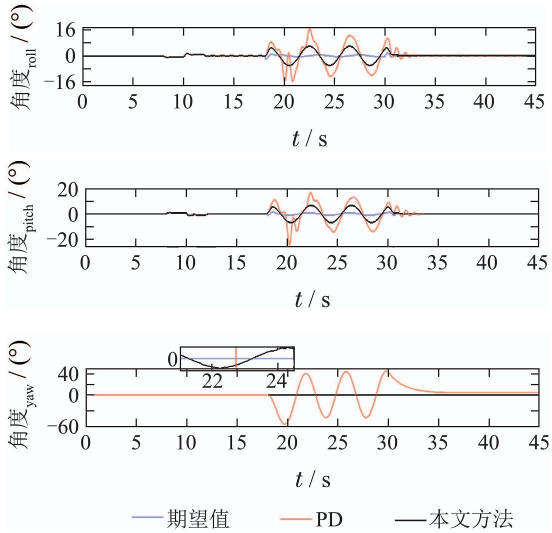


图 10 角度曲线

Fig. 10 Simulation curves of attitude

从图9–10中看出, 采用本文方法的位置误差和角度跟踪误差均明显小于内外环PD控制.在31 s时, 扰动结束, 本文设计的控制器比内外环PD控制更快地回到平衡状态. 所以本文方法设计的控制器有抑制外部扰动的能力, 并且在扰动消失后能快速回到平衡状态.

4.2 实验结果(Experiment results)

实验室搭建的实验平台通过pixhawk实时读取陀螺芯片、加速度计、气压芯片、GPS等的数据获取实时状态信息; 接着, 根据初始设定轨迹及所设计控制算法, 得出设计的电机转速值; 最后, 将期望转速值转换为PWM信号, 并输出至电子调速器控制电机转速; 与此同时, 该系统将实时状态信息通过数传传入PC机.

采用式(41)和式(42)所示的控制器, 本文进行了室外轨迹跟踪实验验证所设计方法的有效性, 四旋翼无人机跟踪X-Y平面内的一个圆形轨迹, 进行一个整圆的飞行时间为40 s. 首先, 18 s时, 四旋翼无人机在2 s内垂直上升至1 m; 接着在X-Y平面做半径为4/3 m的圆形运动, 仿真持续200 s. 室外飞行环境以及实验结果如图11–14所示.

从图12中看出, 本文所设计方法比内外环PD控制跟踪效果更好, 位置跟踪误差均小于内外环PD控制; 从图13中可看出, 相比于内外环PD控制, 采用本文方法的滚转角和俯仰角误差更小, 偏航角误差相差不大. 从上面的分析可知, 在复杂的室外环境下, 本文提出鲁棒控制方法能够较好地克服外界不确定性扰动的影响, 跟踪效果优于内外环PD控制方法.

图 11 室外飞行环境

Fig. 11 The outdoor experiment

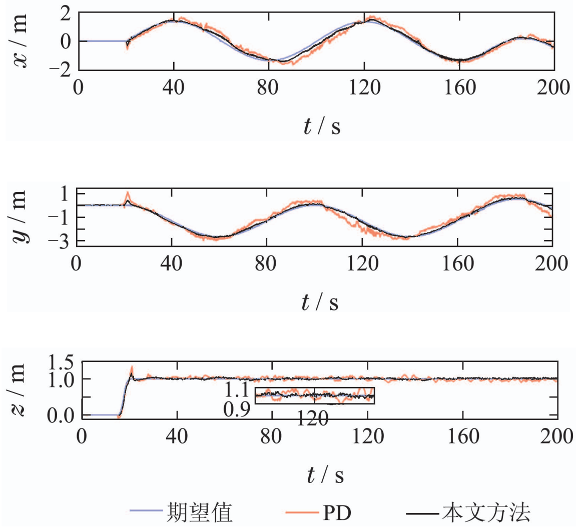


图 12 室外实验的位置曲线

Fig. 12 Position curves of the outdoor test

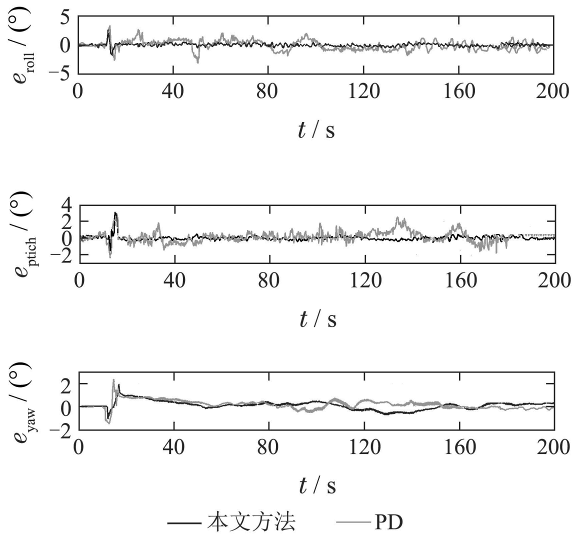


图 13 室外实验的角度误差曲线

Fig. 13 Attitude error curves of the outdoor test

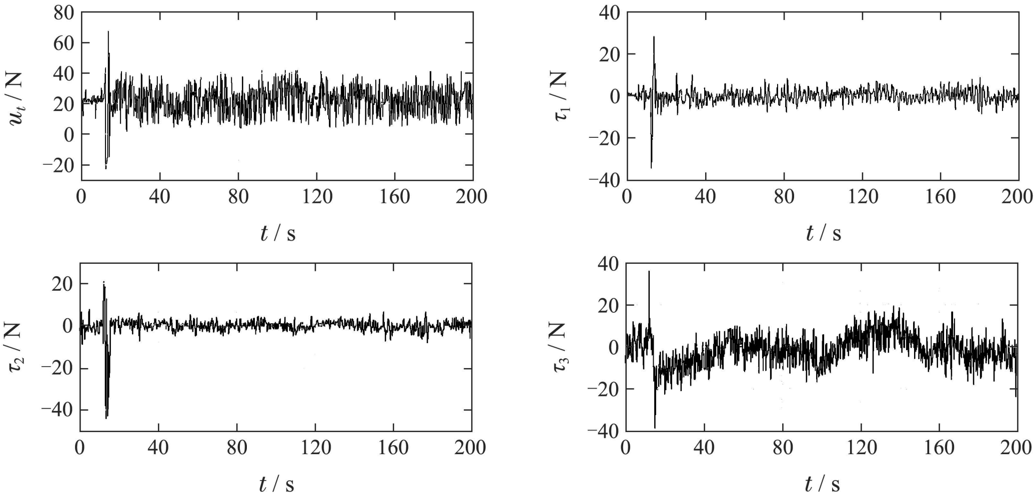


图 14 设计控制器的输入

Fig. 14 Control inputs by proposed controller

5 结论(Conclusions)

本文研究了多变量、强耦合和参数不确定的四旋翼无人机系统, 提出了基于区间矩阵的状态反馈鲁棒控制器设计方法. 四旋翼无人机控制系统被解耦为两部分: 内环角度控制系统和外环位置控制系统, 对系统中不确定升力系数和阻力系数及难以精确测量的转动惯量, 引入区间变量描述. 得到系统误差模型. 对内外环设计鲁棒H_∞反馈控制器实现三维轨迹实时跟踪并有效抑制有界外部扰动, 所设计的控制器对于飞行环境的变化具有更强的鲁棒性, 并且控制参数只需通过LMI求解就可以得到, 不需要手动调节. 最后, 仿真对比结果和实验结果证明了本文所提出的控制方法的鲁棒性和有效性.

参考文献(References):

[1] HAO Wei, XIAN Bin. Nonlinear fault tolerant control design for quadrotor unmanned aerial vehicle attitude system [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(11): 1457 – 1463.
(郝伟, 鲜斌. 四旋翼无人机姿态系统的非线性容错控制设计 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(11): 1457 – 1463.)

[2] WEI Qingtong, CHEN Mou, WU Qingxian. Backstepping-based attitude control for a quadrotor UAV with input saturation and attitude constraints [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1362 – 1369.
(魏青铜, 陈谋, 吴庆宪. 输入饱和与姿态受限的四旋翼无人机反步姿态控制 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1362 – 1369.)

[3] SALIH A L, MOGHAVVEMI M, MOHAMED A F, et al. Flight PID controller design for a UAV quadrotor [J]. *Scientific Research and Essays*, 2010, 5(23): 3660 – 3667.

[4] ZHANG X, XIAN B, ZHAO B, et al, Autonomous flight control of a nano quadrotor helicopter in a GPS-denied environment using onboard vision [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(10): 6392 – 6403.

[5] SHAKEV N G, TOPALOV A V, KAYNAK O, et al. Comparative results on stabilization of the quad-rotor rotorcraft using bounded feedback controllers [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2012, 65(1): 389 – 408.

[6] RODRIGUEZ R H, VEGA P V, ORTA S A, et al. Robust backstepping control based on integral sliding modes for tracking of quadrotors [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2014, 73(1): 51 – 66.

[7] BENALLEGUE A, MOKHTARI A, FRIDMAN L. High-order sliding-mode observer for a quadrotor UAV [J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2008, 18(4/5): 427 – 440.

[8] RAFFO G V, ORTEGA M G, RUBIO F R. An integral predictive nonlinear H_∞ control structure for a quadrotor helicopter [J]. *Automatica*, 2010, 46(1): 29 – 39.

[9] YUE Jilong, ZHANG Qingjie, ZHU Huayong. Research progress and key technologies of micro quad-rotor UAVs [J]. *Electronics Optics & Control*, 2010, 17(10): 46 – 52.
(岳基隆, 张庆杰, 朱华勇, 微小型四旋翼无人机研究进展及关键技术浅析 [J]. 光电与控制, 2010, 17(10): 46 – 52.)

[10] HOFFMANN G M, HUANG H, WASLANDER S L, et al. Precision flight control for a multi-vehicle quadrotor helicopter testbed [J]. *Control Engineering Practice*, 2011, 19(9): 1023 – 1036.

[11] XIONG J J, ZHENG E H. Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV [J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(3): 725 – 731.

[12] ZHENG E H, XIONG J J, LUO J L. Second order sliding mode control for a quadrotor UAV [J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(4): 1350 – 1356.

[13] DIERKS T, JAGANNATHAN S. Output feedback control of a quadrotor UAV using neural networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(1): 50 – 66.

[14] ZHAO B, XIAN B, ZHANG Y, et al. Nonlinear robust adaptive tracking control of a quadrotor UAV via immersion and invariance methodology [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(5): 2891 – 2902.

[15] FUJIMOTO K, YOKOYAMA M, TANABE Y. I&I-based adaptive control of a four-rotor mini helicopter [C] //*Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*. Glendale: IEEE, 2010, 11: 144 – 149.

[16] LEE T. Robust adaptive attitude tracking on SO(3) with an application to a quadrotor UAV [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(5): 1925 – 1930.

[17] RAFFO G V, ORTEGA M G, RUBIO F R. MPC with nonlinear H_∞ control for path tracking of a quad-rotor helicopter [C] //*the International Federation of Automatic Control*. Seoul: IEEE, 2008, 7: 8564 – 8569.

[18] LIU H, LI D J, ZUO Z Y, et al. Robust three-loop trajectory tracking control for quadrotors with multiple uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(4): 2263 – 2274.

[19] LIU H, BAI Y Q, LU G, et al. Brief paper robust attitude control of uncertain quadrotors [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(11): 1583 – 1589.

[20] HOU H L, NIAN X H, XIONG H Y, et al. Robust decentralized coordinated control of a multimotor web-winding system [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, 24(4): 1495 – 1503.

[21] SU Yonghua, HE Manchao, ZHAO Minghua, et al. Reliability analysis of response surface method based on interval variables [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, 27(12): 1408 – 1413.
(苏永华, 何满潮, 赵明华, 等. 基于区间变量的响应面可靠性分析方法 [J]. 岩土工程学报, 2005, 27(12): 1408 – 1413.)

[22] LU JG, CHEN GR. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: an LMI approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1294 – 1299.

[23] NAIDOO Y, STOPFORTH R, BRIGHT G. Quad-rotor unmanned aerial vehicle helicopter modelling & control [J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2011, 8(4): 139 – 149.

[24] SHEN Tao, WANG Xiaohong, YUAN Zhugang. Robust stability for a class of uncertain systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(4): 426 – 427.
(申涛, 王孝红, 袁铸钢. 一类不确定系统的鲁棒稳定性分析 [J]. 自动化学报, 2007, 33(4): 426 – 427.)

[25] NICULESCU S I, LOZANO R. On the passivity of linear delay systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(3): 460 – 464.

[26] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory* [M]. Philadelphia: Society for Industrial Mathematica, 1994.

[27] ZHANG Yao, XIAN Bin, YIN Qiang, et al. Autonomous control system for the quadrotor unmanned aerial vehicle [C] //*Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*. Hefei: IEEE, 2012, 7: 4862 – 4867.
(张垚, 鲜斌, 殷强, 等. 四旋翼无人机自主控制系统研究 [C] //第31届中国控制会议论文集. 合肥: IEEE, 2012, 7: 4862 – 4867.)

[28] FANG Zhenping, CHEN Wanchun, ZHANG Shuguang. *Aviation Aircraft Flight Dynamics* [M]. Beijing: Beihang University Press, 2005.
(方振平, 陈万春, 张曙光. 航空飞行器飞行动力学 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005.)

作者简介:

孙妙平 (1978–), 女, 博士, 硕士生导师, 目前研究方向为电力系统稳定性控制和四旋翼无人机控制, E-mail: miaopingsun@mail.csu.edu.cn;

刘静静 (1991–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为四旋翼无人机控制, E-mail: 15111283260@163.com;

年晓红 (1965–), 男, 教授, 目前研究方向为卷绕系统鲁棒控制和四旋翼无人机控制, E-mail: xhnian@mail.csu.edu.cn;

王海波 (1971–), 男, 教授, 目前研究方向为鲁棒控制、故障诊断, E-mail: hbwang1971@aliyun.com.