DOI: 10.7641/CTA.2017.70116

# 鲁棒高斯和集合卡尔曼滤波及其在纯角度跟踪中的应用

姜浩楠, 蔡远利†

(西安交通大学 电子与信息工程学院, 陕西 西安 710049)

**摘要**: 针对纯角度目标跟踪中量测信息易受异常值和非高斯噪声干扰的问题, 提出了一种新的非线性滤波算法–鲁棒高斯和集合卡尔曼滤波(robust Gaussian-sum ensemble Kalman filter, RGSEnKF)算法. 首先, 采用Huber技术重塑集合卡尔曼滤波的量测更新过程, 能够有效地处理量测中的异常值. 随后, 将改进的集合卡尔曼滤波在高斯和框架下进行扩展, 得到RGSEnKF算法, 可以进一步解决受非高斯噪声干扰的非线性系统的状态估计问题. 此外, 新算法中包含距离参数化初始化策略和高斯分量融合策略. 前者是为了减小纯角度跟踪中距离信息不可观测的影响, 而后者可以避免高斯分量数目随时间不断增长. 大量仿真结果验证了新算法的有效性和鲁棒性.

**关键词**: 纯角度跟踪; 异常值; 非高斯噪声; 集合卡尔曼滤波; 高斯和

**引用格式**: 姜浩楠, 蔡远利. 鲁棒高斯和集合卡尔曼滤波及其在纯角度跟踪中的应用. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 129 – 136

**中图分类号**: V448　　**文献标识码**: A

# Robust Gaussian-sum ensemble Kalman filter and its application in bearings-only tracking

JIANG Hao-nan, CAI Yuan-li†

(School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

**Abstract:** In order to deal with the situation that measurements are easily contaminated by outliers and non-Gaussian noise, a new nonlinear filtering algorithm called the robust Gaussian-sum ensemble Kalman filter (RGSEnKF) is proposed for the bearings-only tracking problem. Firstly, the measurement update process of the ensemble Kalman filter is reformulated by using Huber technique so that outliers can be dealt with efficiently. Further, the improved ensemble Kalman filter is extended within a Gaussian-sum framework, the result is RGSEnKF algorithm which can handle the state estimation problem of nonlinear system corrupted by non-Gaussian noise. Moreover, the new algorithm includes a range-parameterized initialization strategy and a Gaussian merging strategy. The former strategy can reduce the effect of unobservability of range in bearings-only tracking and the latter can prevent the number of Gaussian components from increasing over time. Lots of simulation results validate the effectiveness and robustness of the new algorithm.

**Key words:** bearings-only tracking; outliers; non-Gaussian noise; ensemble Kalman filter; Gaussian-sum

**Citation:** JIANG Haonan, CAI Yuanli. Robust Gaussian-sum ensemble Kalman filter and its application in bearings-only tracking. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(2): 129 – 136

## 1　引言(Introduction)

纯角度跟踪(bearings-only tracking, BOT)问题, 也称为目标运动分析, 广泛存在于军事应用中, 诸如水下跟踪、飞行器监视和电子作战等[1]. 纯角度跟踪的目的是根据受噪声干扰的角度量测信息估计目标的运动参数(如位置、速度和加速度等).

最早的并且使用最广泛的解决BOT问题的方法是扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)[2]. EKF采用了局部线性化技术, 当系统的非线性较强时往往会产生不稳定甚至发散的结果. 基于EKF的改进算法, 如修正极坐标系下的EKF (extended Kalman filter in modified polar coordinate, MPCEKF)[3]、移位瑞利滤波(shifted Rayleigh filter, SRF)[4]和距离参数化EKF(range-parameterized extended Kalman filter, RPEKF)[5]存在着相同的问题. 尽管MPCEKF在一定程度上解决了系统不可观测的问题, 但此类方法受初始值的影响较大. 除此以外, 文献[6]已经证实, 基于修正极坐标系的滤波算法并不能保证比基于笛卡尔

收稿日期: 2017−03−01; 录用日期: 2017−09−14.
†通信作者. E-mail: ylicai@mail.xjtu.edu.cn; Tel.: +86 13509181530.
本文责任编委: 胡跃明.
国家自然科学基金项目(61202128), 陕西省自然科学基础研究计划项目(2017JQ6056)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61202128) and the Shaanxi Province Natural Science Basic Research Project (2017JQ 6056).

坐标系的滤波算法性能更好.

近年来, 基于确定性/随机性点采样[7]的滤波算法引起了较多的关注. 相比于EKF对非线性函数线性化的思想, 基于点采样的滤波算法, 采用不同的方式近似非线性函数的概率密度分布. 以容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF)[8]为代表的确定性采样滤波算法能以至少二阶的精度逼近非线性系统状态的后验分布[9]; 在给定足够多的样本条件下, 以粒子滤波(particle filter, PF)[10]为代表的随机性采样滤波可以无限逼近真实的后验分布. 另一种随机性采样滤波算法–集合卡尔曼滤波(ensemble Kalman filter, EnKF), 最早由Evensen[11]提出, 之后广泛应用于气象学, 在目标跟踪领域受到的关注较少. EnKF采用序贯蒙特卡罗方法和数据同化技术改善了量测噪声随机性对滤波精度的不利影响[12]. 与PF相比, EnKF在保证高精度的同时大大降低了计算复杂度.

除了PF, 上述滤波算法均是在高斯噪声假设下提出的. 然而, 在实际目标跟踪应用中, 量测信息很容易受到异常值[13]和闪烁噪声[14]的干扰, 量测噪声将包含许多不确定信息, 使得其协方差变大甚至导致其统计特性不再服从高斯分布. 此时, 若采用之前所述的滤波算法可能会导致不准确甚至发散的结果. PF虽然能得到鲁棒的估计结果, 但由于其计算复杂度过高, 在实际应用中使用较少.

量测数据中的异常值是因为各种突发干扰(如设备故障、环境因素和人为工作失误等)使得量测值明显偏大或偏小[13]. 由于偏差量远超过精度范围, 异常值将对量测结果产生不利影响, 必须采用一定的手段进行判别和修正. Huber的M估计理论[15]是解决异常值的一种有效方法, 它通过Huber补偿函数修正二次型性能指标, 减小了受异常值干扰的量测的权重. 一些学者[16–18]将传统的滤波算法与Huber理论结合, 提升了鲁棒性. 然而, 这些算法均需要噪声统计特性的先验信息. 此外, 当噪声为非高斯时, 这些算法的估计效果并不能得到保证. 一直以来, 高斯和滤波[19]是解决非高斯噪声下系统估计的有效方法, 但是高斯分量数目随时间呈指数增长所导致的巨大的计算复杂度限制了此类方法在实际中的应用.

本文针对BOT问题中量测信息易受异常值和非高斯噪声干扰的问题, 首先推导了基于Huber理论的EnKF(HEnKF)算法, 然后采用高斯和框架将其扩展, 建立了一种新的非线性滤波算法, 称为鲁棒高斯和集合卡尔曼滤波(robust Gaussian-sum ensemble Kalman filter, RGSEnKF), 这种新算法同时具备估计精度高和鲁棒性强的特点. 为了减小由于高斯分量数目随时间累积不断增加而带来的计算负担, 在执行过程中采用了一种高斯分量融合策略, 改善了算法的实时性. 此外, 该算法使用距离参数化初始化策略在一定程度上消除了距离不可观测产生的影响.

## 2 系统模型(System model)

在笛卡尔坐标系中, 设$k$时刻目标的位置和速度分别为$(x_k^t, y_k^t)$和$(\dot{x}_k^t, \dot{y}_k^t)$, 则目标的状态向量可表示为$\boldsymbol{x}_k^t = [x_k^t\ \ y_k^t\ \ \dot{x}_k^t\ \ \dot{y}_k^t]^{\mathrm{T}}$.

类似地, 观测站的状态向量可以表示为$\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{o}} = [x_k^{\mathrm{o}}\ \ y_k^{\mathrm{o}}\ \ \dot{x}_k^{\mathrm{o}}\ \ \dot{y}_k^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$. 由此可定义$k$时刻相对运动状态向量$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_k^t - \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{o}} = [x_k\ \ y_k\ \ \dot{x}_k\ \ \dot{y}_k]^{\mathrm{T}}$.

本文主要考虑非机动目标的纯角度跟踪问题, 系统状态方程可表示如下:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_k = f(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{w}_{k-1} = \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{U}_{k-1,k} + \boldsymbol{w}_{k-1},\end{aligned} \tag{1}$$

其中: 过程噪声$\boldsymbol{w}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_{k-1})$, $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_{k-1})$表示均值为0协方差为$\boldsymbol{Q}_{k-1}$的高斯分布. 状态转移矩阵$\boldsymbol{F}$、确定性输入向量$\boldsymbol{U}_{k-1,k}$以及噪声协方差矩阵$\boldsymbol{Q}_{k-1}$分别为

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_{k-1,k} = \begin{bmatrix} x_k^{\mathrm{o}} - x_{k-1}^{\mathrm{o}} - \Delta T \dot{x}_{k-1}^{\mathrm{o}} \\ y_k^{\mathrm{o}} - y_{k-1}^{\mathrm{o}} - \Delta T \dot{y}_{k-1}^{\mathrm{o}} \\ \dot{x}_k^{\mathrm{o}} - \dot{x}_{k-1}^{\mathrm{o}} \\ \dot{y}_k^{\mathrm{o}} - \dot{y}_{k-1}^{\mathrm{o}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta T^3}{3} & 0 & \frac{\Delta T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta T^3}{3} & 0 & \frac{\Delta T^2}{2} \\ \frac{\Delta T^2}{2} & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & \frac{\Delta T^2}{2} & 0 & \Delta T \end{bmatrix} d,$$

式中: $\Delta T$为采样间隔, $d$为过程噪声强度.

系统的量测方程为

$$z_k = h(\boldsymbol{x}_k) + v_k, \tag{2}$$

式中: $h(\boldsymbol{x}_k) = \arctan \dfrac{x_k}{y_k}$, 量测噪声$v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$.

## 3 HEnKF算法(HEnKF algorithm)

本节将详细推导HEnKF算法, 和其他传统滤波方法类似, 包括时间更新方程和量测更新方程. 时间更新方程的推导基于标准的EnKF算法, 量测更新方程的推导使用了Huber技术, 提升了算法的鲁棒性.

### 3.1 时间更新方程(Equations of time update)

考虑上一节描述的非线性系统, 假定在$k-1$时刻, 状态估计样本集合为$\{\boldsymbol{x}_{k-1|k-1}^i\}_{i=1}^q$, 状态一步预测样本集合为$\{\boldsymbol{x}_{k|k-1}^i\}_{i=1}^q$, $q$表示集合的样本个数, 并且

$$\boldsymbol{x}_{k|k-1}^i = f(\boldsymbol{x}_{k-1|k-1}^i) + \boldsymbol{w}_{k-1}^i, \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{w}_{k-1}^i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_{k-1})$.

状态一步预测均值由下式给出:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{x}^i_{k|k-1}. \tag{4}$$

定义状态一步预测误差

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{k|k-1}=\boldsymbol{x}^i_{k|k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},$$

则状态一步预测误差协方差为

$$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{xx}}_{k|k-1} = \frac{1}{q-1}\sum_{i=1}^{q}\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{x}}^{i,\mathrm{T}}_{k|k-1}. \tag{5}$$

### 3.2 量测更新方程(Equations of measurement update)

为了改善EnKF算法的鲁棒性, 增强系统应对异常值的能力, 本节基于Huber的M估计理论[15]对量测噪声协方差进行修正, 重塑量测信息, 得到基于Huber理论的EnKF(HEnKF)算法.

首先建立非线性回归模型如下:

$$\begin{bmatrix} z_k \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\boldsymbol{x}_k) \\ \boldsymbol{x}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k \\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_{k|k-1}}\end{bmatrix}, \tag{6}$$

式中: $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$是状态一步预测样本集合均值, $z_k$为$k$时刻得到的量测值, $\boldsymbol{x}_k$为真实状态, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_{k|k-1}}$是状态预测值和真实值之间的差值. 定义如下矩阵:

$$\boldsymbol{s}_k = \begin{bmatrix} R_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{xx}}_{k|k-1}\end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{s}_k^{-1/2}\begin{bmatrix} z_k \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$g(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{s}_k^{-1/2}\begin{bmatrix} h(\boldsymbol{x}_k) \\ \boldsymbol{x}_k\end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{s}_k^{-1/2}\begin{bmatrix} v_k \\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_{k|k-1}}\end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中: $\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{xx}}_{k|k-1}$是状态一步预测误差协方差矩阵, $\boldsymbol{\sigma}_k$的协方差矩阵为单位阵. 根据上述方程, 非线性回归问题可以重写为

$$\boldsymbol{y}_k = g(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{\sigma}_k. \tag{11}$$

定义如下目标函数:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k) = \sum_{i=1}^{m+n}\varphi(\boldsymbol{\xi}_{k,i}), \tag{12}$$

式中: $n$和$m$分别代表状态向量和量测向量的维度, $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{y}_k - g(\boldsymbol{x}_k)$, $\boldsymbol{\xi}_{k,i}$表示$\boldsymbol{\xi}_k$的第$i$个分量, Huber补偿函数$\varphi$定义如下:

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}_{k,i}) = \begin{cases} 0.5\boldsymbol{\xi}^2_{k,i}, & |\boldsymbol{\xi}_{k,i}| < \lambda, \\ \lambda|\boldsymbol{\xi}_{k,i}| - 0.5\lambda^2, & |\boldsymbol{\xi}_{k,i}| \geqslant \lambda, \end{cases} \tag{13}$$

其中$\lambda$是可调参数, 通常的取值范围是$\lambda \in [1.3, 2]$.

最小化式(12), 得到

$$\sum_{i=1}^{m+n}\varphi'(\boldsymbol{\xi}_{k,i})\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{k,i}}{\partial \boldsymbol{x}_i} = 0. \tag{14}$$

令$\boldsymbol{\varPhi} = \mathrm{diag}\{\dfrac{\varphi'(\boldsymbol{\xi}_{k,i})}{\boldsymbol{\xi}_{k,i}}\}$, 其中

$$\boldsymbol{\varPhi}= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varPhi}_z & \boldsymbol{0}_{m\times n} \\ \boldsymbol{0}_{n\times m} & \boldsymbol{\varPhi}_{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}, \tag{15}$$

且

$$\frac{\varphi'(\boldsymbol{\xi}_{k,i})}{\boldsymbol{\xi}_{k,i}} = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{\xi}_{k,i}| < \lambda, \\ \dfrac{\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{\xi}_{k,i}\,\lambda}{\boldsymbol{\xi}_{k,i}}, & |\boldsymbol{\xi}_{k,i}| \geqslant \lambda, \end{cases} \tag{16}$$

则当系统的量测方程为线性, 如$z_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k + v_k$时, 方程(14)的解[15]为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k(z_k - \hat{z}_{k|k-1}), \tag{17}$$

式中滤波增益矩阵

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{xx}}_{k|k-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}_k(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{xx}}_{k|k-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}_k + R^{1/2}_k\boldsymbol{\varPhi}^{-1}_z R^{\mathrm{T}/2}_k)^{-1}.$$

当量测方程为非线性时, 根据上式可对量测噪声协方差进行如下修正:

$$\breve{R}_k = R^{1/2}_k\boldsymbol{\varPhi}^{-1}_z R^{\mathrm{T}/2}_k, \tag{18}$$

然后采用修正的量测噪声协方差重塑量测信息.

状态一步预测集合$\{\boldsymbol{x}^i_{k|k-1}\}^q_{i=1}$中每个样本对应的量测一步预测为

$$z^i_{k|k-1} = h(\boldsymbol{x}^i_{k|k-1}), \tag{19}$$

则量测一步预测均值由下式给出:

$$\hat{z}_{k|k-1} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}z^i_{k|k-1}. \tag{20}$$

定义量测误差

$$\tilde{z}^i_{k|k-1}=z^i_{k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1},$$

则状态与量测误差互协方差矩阵$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{x}z}_{k|k-1}$和量测误差协方差矩阵$\boldsymbol{P}^{zz}_{k|k-1}$可计算如下:

$$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{x}z}_{k|k-1} = \frac{1}{q-1}\sum_{i=1}^{q}\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{k|k-1}\tilde{z}^{i,\mathrm{T}}_{k|k-1}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{P}^{zz}_{k|k-1} = \frac{1}{q-1}\sum_{i=1}^{q}\tilde{z}^i_{k|k-1}\tilde{z}^{i,\mathrm{T}}_{k|k-1}, \tag{22}$$

由此可以得到滤波增益矩阵

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{x}z}_{k|k-1}(\boldsymbol{P}^{zz}_{k|k-1} + \breve{R}_k)^{-1}. \tag{23}$$

状态一步预测集合样本的滤波估计值为

$$\boldsymbol{x}^i_{k|k} = \boldsymbol{x}^i_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k(z_k + v^i_k - z^i_{k|k-1}), \tag{24}$$

其中: $z_k$为$k$时刻的真实量测值, $v^i_k \sim \mathcal{N}(0, \breve{R}_k)$. 式中通过数据同化思想引入$v^i_k$旨在解决量测噪声随机性对滤波精度的不利影响. 从而滤波均值和协方差可由下面两式计算得到

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{x}^i_{k|k}, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{xx}}_{k|k} = \frac{1}{q-1}\sum_{i=1}^{q}\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{k|k}\tilde{\boldsymbol{x}}^{i,\mathrm{T}}_{k|k}, \tag{26}$$

式中$\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{k|k} = \boldsymbol{x}^i_{k|k} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$.

## 4 RGSEnKF算法(RGSEnKF algorithm)

鉴于高斯混合模型[19–20]在非高斯密度建模中得到越来越广泛的应用, 本节采用高斯和框架将HEnKF进一步扩展, 建立一种新的能够解决受非高斯噪声干扰的非线性系统估计问题的滤波算法.

### 4.1 距离参数化初始化策略(Range-parameterized initialization strategy)

受到RPEKF算法[5]的启发, 本文的高斯和算法采用距离参数化策略进行初始化. 首先将初始距离区间$(r_{\min}, r_{\max})$分成$N_{\rm G}$个子区间, 每个子区间的均值和标准差定义为

$$\bar{r}_n = r_{\min}\frac{\rho^{n-1}+\rho^n}{2}, \tag{27}$$

$$\sigma_{r_n} = r_{\min}\frac{\rho^n-\rho^{n-1}}{\sqrt{12}}, \tag{28}$$

公比$\rho$为

$$\rho = (\frac{r_{\max}}{r_{\min}})^{1/N_{\rm G}}.$$

在每个子区间上进行采样, 得到$N_{\rm G}$个不同的初始距离估计值, 然后分配给$N_{\rm G}$个HEnKF完成高斯和滤波算法的初始化.

### 4.2 高斯和框架(Gaussian-sum framework)

**引理 1**[19] 任意的概率密度$p(\boldsymbol{x})$都可以通过如下形式来近似

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N_{\rm G}}\alpha^i\mathcal{N}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}^i,\boldsymbol{\Sigma}^i), \tag{29}$$

其中: $\mathcal{N}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}^i,\boldsymbol{\Sigma}^i)$表示均值为$\boldsymbol{\mu}^i$协方差为$\boldsymbol{\Sigma}^i$的高斯分布, $\sum\limits_{i=1}^{N_{\rm G}}\alpha^i=1$.

**引理 2**[20] 已知$f,\boldsymbol{w},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$维数匹配, 且$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{\Sigma}$正定, 函数$f$对其自变量可导, 则

$$\begin{aligned}&\int\mathcal{N}(\boldsymbol{x};f(\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{w},\boldsymbol{Q})\mathcal{N}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\approx\\&\mathcal{N}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Sigma}_1),\end{aligned} \tag{30}$$

其中均值$\boldsymbol{\mu}_1$和协方差$\boldsymbol{\Sigma}_1$由EKF算法的时间更新过程得到.

**引理 3**[20] 已知$h,v,R,\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$维数匹配, 且$R$和$\boldsymbol{\Sigma}$正定, 函数$h$对其自变量可导, 则

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}(z;h(\boldsymbol{x})+v,R)\mathcal{N}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})\approx\\&\mathcal{N}(z;\hat{z},\boldsymbol{P}^{zz})\mathcal{N}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}_2),\end{aligned} \tag{31}$$

其中: 均值$\boldsymbol{\mu}_2$和协方差$\boldsymbol{\Sigma}_2$由EKF算法的量测更新过程得到, $\hat{z}$和$\boldsymbol{P}^{zz}$分别表示根据状态预测值得到的量测均值和量测误差协方差.

对于非线性系统(1)–(2), 在$k$时刻, 根据引理1, 假定非高斯过程噪声和非高斯量测噪声可以表示为

$$p(\boldsymbol{w}_k)\approx\sum_{i=1}^{G}\beta_k^i\mathcal{N}(\boldsymbol{w}_k;\boldsymbol{w}_k^i,\boldsymbol{Q}_k^i), \tag{32}$$

$$p(v_k)\approx\sum_{j=1}^{K}\gamma_k^j\mathcal{N}(v_k;v_k^j,R_k^j), \tag{33}$$

其中: $\sum\limits_{i=1}^{G}\beta_k^i=\sum\limits_{j=1}^{K}\gamma_k^j=1$, $\beta_k^i$为过程噪声第$i$个高斯分量的权重, $\gamma_k^j$为量测噪声第$j$个高斯分量的权重.

A) 时间更新.

假定在$k-1$时刻, 状态后验分布可以表示为

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{x}_{k-1}|z_{1:k-1})=\\&\sum_{i=1}^{N_{\rm G}}\alpha_{k-1|k-1}^i\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_{k-1};\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}^i,\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}^{\boldsymbol{xx},i}).\end{aligned} \tag{34}$$

根据等式(1)(32), 条件转移分布为

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})\approx\\&\sum_{i=1}^{G}\beta_{k-1}^i\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_k;f(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{w}_{k-1}^i,\boldsymbol{Q}_{k-1}^i),\end{aligned} \tag{35}$$

所以$k-1$时刻的预测分布可以表示为

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{x}_k|z_{1:k-1})=\\&\int p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})p(\boldsymbol{x}_{k-1}|z_{1:k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}\approx\\&\sum_{j=1}^{G}\sum_{i=1}^{N_{\rm G}}\alpha_{k-1|k-1}^i\beta_{k-1}^j\times\\&\int\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_k;f(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{w}_{k-1}^j,\boldsymbol{Q}_{k-1}^j)\cdot\\&\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_{k-1};\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}^i,\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}^{\boldsymbol{xx},i})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}.\end{aligned} \tag{36}$$

根据引理2, 式(36)可以由高斯和近似并重写为

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{x}_k|z_{1:k-1})\approx\\&\sum_{r=1}^{GN_{\rm G}}\alpha_{k|k-1}^r\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^r,\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{\boldsymbol{xx},r}),\end{aligned} \tag{37}$$

当$\boldsymbol{w}_k^i=\boldsymbol{0}, i=1,\cdots,G$时, 式中:

$$\begin{aligned}&\alpha_{k|k-1}^r=\alpha_{k-1|k-1}^i\beta_{k-1}^j,\\&\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^r=\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q}\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{r,n},\\&\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{\boldsymbol{xx},r}=\frac{1}{q-1}\sum_{n=1}^{q}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{r,n}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{r,n})^{\rm T},\\&\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{r,n}=f(\boldsymbol{x}_{k-1|k-1}^{i,n})+\boldsymbol{w}_{k-1}^{j,n},\\&\boldsymbol{x}_{k-1|k-1}^{i,n}\sim\mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}^i,\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}^{\boldsymbol{xx},i}),\\&\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{r,n}=\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{r,n}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^r,\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{w}_{k-1}^{j,n}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{Q}_{k-1}^j)$.

B) 量测更新.

在$k$时刻, 得到量测$z_k$, 根据等式(2)(33), 似然密度可以表示为

$$p(z_k|\boldsymbol{x}_k)\approx\sum_{i=1}^{K}\gamma_k^i\mathcal{N}(z_k;h(\boldsymbol{x}_k)+v_k^i,R_k^i), \tag{38}$$

后验密度可以写为

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{x}_k|z_{1:k})=\\&c_kp(z_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|z_{1:k-1})\approx\\&c_k\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{GN_{\rm G}}\gamma_k^j\alpha_{k|k-1}^i\times\mathcal{N}(z_k;h(\boldsymbol{x}_k)+v_k^j,R_k^j)\cdot\\&\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^i,\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{\boldsymbol{xx},i}),\end{aligned} \tag{39}$$

其中$c_k$是归一化系数, 满足

$$c_k = (\int p(z_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|z_{1:k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k)^{-1}.$$

根据引理3, 重写等式(39)如下:

$$p(\boldsymbol{x}_k|z_{1:k}) \approx \sum_{r=1}^{KGN_{\mathrm{G}}} \alpha_{k|k}^r \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_k; \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^r, \boldsymbol{P}_{k|k}^{\boldsymbol{xx},r}), \quad (40)$$

当$v_k^i = 0, i = 1, \cdots, K$时, 式中:

$$\alpha_{k|k}^r = \frac{\alpha_{k|k-1}^i \gamma_k^j \mathcal{N}(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^i, \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{zz,i} + \breve{R}_k^j)}{\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{GN_{\mathrm{G}}} \alpha_{k|k-1}^i \gamma_k^j \mathcal{N}(z_k; \hat{z}_{k|k-1}^i, \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{zz,i} + \breve{R}_k^j)},$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^r = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q} \boldsymbol{x}_{k|k}^{r,n},$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k}^{\boldsymbol{xx},r} = \frac{1}{q-1}\sum_{n=1}^{q} (\boldsymbol{x}_{k|k}^{r,n} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^r)(\boldsymbol{x}_{k|k}^{r,n} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^r)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{z}_{k|k-1}^i = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q} h(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{i,n}),$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{zz,i} = \frac{1}{q-1}\sum_{n=1}^{q} \tilde{z}_{k|k-1}^{i,n}(\tilde{z}_{k|k-1}^{i,n})^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{z}_{k|k-1}^{i,n} = h(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{i,n}) - \hat{z}_{k|k-1}^i,$$

$$\boldsymbol{x}_{k|k}^{r,n} = \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{i,n} + \boldsymbol{K}_k^{ij}(z_k + v_k^{j,n} - h(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{i,n})),$$

$$\boldsymbol{K}_k^{ij} = \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{\boldsymbol{x}z,i}(\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{zz,i} + \breve{R}_k^j)^{-1},$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{\boldsymbol{x}z,i} = \frac{1}{q-1}\sum_{n=1}^{q} \tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{i,n}(\tilde{z}_{k|k-1}^{i,n})^{\mathrm{T}},$$

其中: $v_k^{j,n} \sim \mathcal{N}(0, \breve{R}_k^j)$, $\breve{R}_k^j$ 为修正的量测噪声协方差.

最后可以得到状态和协方差的滤波估计值

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \sum_{r=1}^{KGN_{\mathrm{G}}} \alpha_{k|k}^r \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^r, \quad (41)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k}^{\boldsymbol{xx}} = \sum_{r=1}^{KGN_{\mathrm{G}}} \alpha_{k|k}^r [\boldsymbol{P}_{k|k}^{\boldsymbol{xx},r} + \tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}^r \tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}^{r,\mathrm{T}}], \quad (42)$$

其中$\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}^r = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^r - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$.

**注 1** 本文采用HEnKF算法代替引理2和引理3中的EKF算法计算相应的均值和协方差.

**注 2** 当表示状态、过程噪声和量测噪声的高斯分量数目均为1(即$N_{\mathrm{G}} = G = K = 1$)时, RGSEnKF算法退化为HEnKF算法, 所以HEnKF算法是RGSEnKF算法的特例.

### 4.3 高斯分量融合策略(Gaussian merging strategy)

在算法实现过程中, 为了限制高斯分量数目随时间的不断增长, 在量测更新过程结束后, 通过高斯分量融合策略, 保证每次时间更新过程中近似状态后验分布的高斯分量数目不变. 具体如下: 假定在$k$时刻, 状态的后验密度为

$$p_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N_k} \omega_k^i \mathcal{N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{m}_k^i, \boldsymbol{P}_k^i). \quad (43)$$

首先, 保留所有权重大于$T'$的高斯分量并删除所有其他分量

$$C_{1,k} = \{i = 1, \cdots, N_k : \omega_k^i > T'\}. \quad (44)$$

在余下的高斯分量中, 找到权重最大的

$$j = \arg\max_{i \in C_{1,k}} \omega_k^i, \quad (45)$$

并按如下准则找出所有符合条件的高斯分量

$$C_{2,k} = \{i \in C_{1,k} : \tilde{\boldsymbol{m}}_k^{i,\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_k^i)^{-1}\tilde{\boldsymbol{m}}_k^i < U'\}, \quad (46)$$

式中$\tilde{\boldsymbol{m}}_k^i = \boldsymbol{m}_k^i - \boldsymbol{m}_k^j$.

将这些高斯分量通过加权求平均的方式合并为一个高斯分布, 其均值和协方差如下:

$$\hat{\boldsymbol{m}}_k^l = \frac{1}{\sum_{i \in C_{2,k}} \omega_k^i} \sum_{i \in C_{2,k}} \omega_k^i \boldsymbol{m}_k^i, \quad (47)$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k^l = \frac{1}{\sum_{i \in C_{2,k}} \omega_k^i} \sum_{i \in C_{2,k}} \omega_k^i (\boldsymbol{P}_k^i + \tilde{\boldsymbol{m}}_k^i \tilde{\boldsymbol{m}}_k^{i,\mathrm{T}}), \quad (48)$$

式中$\tilde{\boldsymbol{m}}_k^i = \boldsymbol{m}_k^i - \hat{\boldsymbol{m}}_k^l$.

删除所有已经进行过融合操作的高斯分量, 重复上述过程直至所有的高斯分量完成操作. 最后选出权重最大的$N_{\max}$个高斯分量近似状态后验分布.

$$\hat{p}_k(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{i=1}^{N_{\max}} \hat{\omega}_k^i \mathcal{N}(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{m}}_k^i, \hat{\boldsymbol{P}}_k^i). \quad (49)$$

## 5 误差分析(Error analysis)

Cramér-Rao下界(CRLB)被广泛应用于滤波器的性能评估, 它提供了一个滤波器可能达到的最好的均方误差. $k$时刻估计误差的CRLB有如下形式:

$$\mathrm{CRLB}_k \triangleq \boldsymbol{J}_k^{-1}, \quad (50)$$

其中Fisher信息矩阵

$$\boldsymbol{J}_k = \mathrm{E}[-\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x}_{1:k}, z_{1:k})}{\partial \boldsymbol{x}_k^2}].$$

**引理 4**[1] 后验Fisher信息矩阵$\boldsymbol{J}_k$的计算服从下面的递归形式

$$\boldsymbol{J}_k = \boldsymbol{D}_k^{22} - \boldsymbol{D}_k^{21}(\boldsymbol{J}_{k-1} + \boldsymbol{D}_k^{11})^{-1}\boldsymbol{D}_k^{12}, \quad (51)$$

其中:

$$\boldsymbol{D}_k^{11} = \mathrm{E}\{-\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}^2}\},$$

$$\boldsymbol{D}_k^{12} = \mathrm{E}\{-\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}\partial \boldsymbol{x}_k}\},$$

$$\boldsymbol{D}_k^{21} = \mathrm{E}\{-\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})}{\partial \boldsymbol{x}_k\partial \boldsymbol{x}_{k-1}}\},$$

$$\boldsymbol{D}_k^{22} = \mathrm{E}\{-\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})}{\partial \boldsymbol{x}_k^2}\} + \mathrm{E}\{-\frac{\partial^2 \ln p(z_k|\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k^2}\}.$$

**定理 1** 对于BOT系统(1)–(2), 状态估计误差的CRLB由下式给出:

$$\mathrm{CRLB}_k \triangleq \boldsymbol{J}_k^{-1}, \quad (52)$$

其中

$$\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}R_k^{-1}\boldsymbol{H}_k-\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{J}_{k-1}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}. \tag{53}$$

**证** 对于BOT系统, 假设噪声服从高斯分布, 则条件概率密度函数

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})=\frac{1}{\sqrt{2\pi|\boldsymbol{Q}_{k-1}|}}\exp[-\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}}_k}{2}],$$

$$p(z_k|\boldsymbol{x}_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi|R_k|}}\exp[-\frac{\tilde{z}_k^{\mathrm{T}}R_k^{-1}\tilde{z}_k}{2}],$$

其中: $\tilde{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_{k-1},\ \tilde{z}_k=z_k-h(\boldsymbol{x}_k)$.

根据引理4, 有

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}_k^{11}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{F},\\ \boldsymbol{D}_k^{12}=-\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1},\\ \boldsymbol{D}_k^{21}=-\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{F},\\ \boldsymbol{D}_k^{22}=\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}R_k^{-1}\boldsymbol{H}_k,\end{cases} \tag{54}$$

将式(54)代入式(51), 再根据式(50)就可以得到式(52). 证毕.

对于BOT系统, $\boldsymbol{H}_k$的具体形式如下:

$$\boldsymbol{H}_k=\frac{\partial h(\boldsymbol{x}_k)}{\partial\boldsymbol{x}_k}=[\frac{y_k}{x_k^2+y_k^2}\quad\frac{-x_k}{x_k^2+y_k^2}\quad 0\quad 0]. \tag{55}$$

## 6 仿真和分析(Simulation and analysis)

针对二维平面内的纯角度目标跟踪问题, 本节采用EnKF, HEnKF和RGSEnKF三种滤波算法, 在不同的仿真条件下分别进行100次蒙特卡罗仿真实验, 比较各个算法的跟踪效果. 仿真场景如图1所示, 目标和观测站的初始位置分别在(4.92 km, 0.85 km)和(0, 0). 目标作匀速直线运动, 观测站在0 min ∼12 min和18 min ∼ 30 min均作匀速直线运动, 在13 min ∼ 17 min作机动运动. 过程噪声强度$d=10^{-12}\ \mathrm{km^2/s^3}$, 采样间隔$\Delta T=1$ min, 仿真时长为30 min.

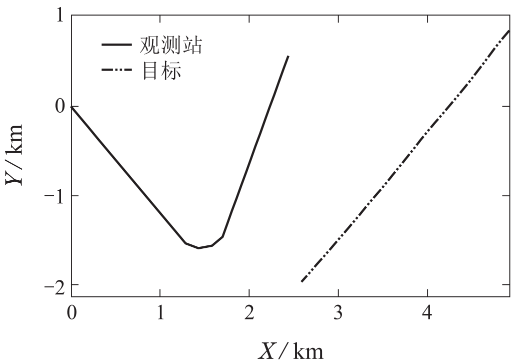


图 1 纯角度跟踪场景

Fig. 1 Bearings-only tracking scenario

根据初始距离、目标速度、方位角和目标航向角等先验信息进行初始化. 初始距离估计为$r_0\sim\mathcal{N}(r,\sigma_r^2)$, 目标初始速度估计为$s_0\sim\mathcal{N}(s,\sigma_s^2)$, 初始方位角估计为$\theta_0\sim\mathcal{N}(\theta,\sigma_\theta^2)$, 目标初始航向角估计为$c_0\sim\mathcal{N}(c,\sigma_c^2)$. 其中: $r=5\,\mathrm{km},\ s=2.1\,\mathrm{m}/s,\ \theta=80°$和$c=-140°$分别表示初始距离、目标速度、方位角和目标航向角的真实值, $\sigma_r=2\,\mathrm{km},\ \sigma_s=1\,\mathrm{m/s},\ \sigma_\theta=1.5°$和$\sigma_c=\pi/\sqrt{12}$分别表示相应的标准差.

由上面的初始估计可以得到状态的初始估计如下:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}r_0\sin\theta_0\\ r_0\cos\theta_0\\ s_0\sin c_0-\dot{x}_0^{\circ}\\ s_0\cos c_0-\dot{y}_0^{\circ}\end{bmatrix}, \tag{56}$$

其中$(\dot{x}_0^{\circ},\dot{y}_0^{\circ})$为观测站的初始速度. 初始协方差[8]为

$$\boldsymbol{P}_0=\begin{bmatrix}P_{\mathrm{xx}}&P_{\mathrm{xy}}&0&0\\ P_{\mathrm{yx}}&P_{\mathrm{yy}}&0&0\\ 0&0&P_{\dot{\mathrm{x}}\dot{\mathrm{x}}}&P_{\dot{\mathrm{x}}\dot{\mathrm{y}}}\\ 0&0&P_{\dot{\mathrm{y}}\dot{\mathrm{x}}}&P_{\dot{\mathrm{y}}\dot{\mathrm{y}}}\end{bmatrix}, \tag{57}$$

其中:

$$P_{\mathrm{xx}}=r_0^2\sigma_\theta^2\cos^2\theta_0+\sigma_{\mathrm{r}}^2\sin^2\theta_0,$$
$$P_{\mathrm{yy}}=r_0^2\sigma_\theta^2\sin^2\theta_0+\sigma_{\mathrm{r}}^2\cos^2\theta_0,$$
$$P_{\mathrm{xy}}=P_{\mathrm{yx}}=(\sigma_{\mathrm{r}}^2-r_0^2\sigma_\theta^2)\sin\theta_0\cos\theta_0,$$
$$P_{\dot{\mathrm{x}}\dot{\mathrm{x}}}=s_0^2\sigma_{\mathrm{c}}^2\cos^2c_0+\sigma_{\mathrm{s}}^2\sin^2c_0,$$
$$P_{\dot{\mathrm{y}}\dot{\mathrm{y}}}=s_0^2\sigma_{\mathrm{c}}^2\sin^2c_0+\sigma_{\mathrm{s}}^2\cos^2c_0,$$
$$P_{\dot{\mathrm{x}}\dot{\mathrm{y}}}=P_{\dot{\mathrm{y}}\dot{\mathrm{x}}}=(\sigma_{\mathrm{s}}^2-s_0^2\sigma_{\mathrm{c}}^2)\sin c_0\cos c_0.$$

EnKF算法和HEnKF算法的状态集合样本均根据式(56)–(57)进行初始化. 对于本文所提出的RGSEnKF算法, 首先设置初始距离区间为$(r-2\sigma_{\mathrm{r}}, r+2\sigma_{\mathrm{r}})$, 根据距离参数化思想将其分为$N_{\mathrm{G}}$个子区间, 并由式(27)–(28)计算每个子区间的距离均值和协方差, 最后结合式(56)–(57)可以得到$N_{\mathrm{G}}$组初始状态和协方差, 赋给$N_{\mathrm{G}}$个并行的HEnKF进行递推估计; 量测噪声设置为$K$个高斯分布的叠加, 从而初始状态和量测噪声可以表示为如下高斯混合形式:

$$\begin{cases}p(\boldsymbol{x}_0)=\sum\limits_{i=1}^{N_{\mathrm{G}}}\alpha^i\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{x}_0^i,\boldsymbol{P}_0^i),\\ p(v_k)=\sum\limits_{j=1}^{K}\gamma^j\mathcal{N}(v_k;v_k^j,R_k^j).\end{cases} \tag{58}$$

本文采用的性能评价指标为位置均方根误差(root-mean-square error, RMSE), $k$时刻目标的位置RMSE定义如下:

$$\mathrm{RMSE_k}=\sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\hat{x}_k^i-x_k^i)^2+(\hat{y}_k^i-y_k^i)^2},$$

其中: $M$表示蒙特卡罗次数, $(\hat{x}_k^i,\hat{y}_k^i)$为估计的目标位置, $(x_k^i,y_k^i)$为真实的目标位置.

**仿真实验1** 假设量测噪声服从均值为0标准差为$\sigma_\theta=1.5°$的高斯分布, 且量测存在异常值. 假定异常值依次出现在第23 ∼ 27 min, 分别在较小异常值$5\sigma_\theta,\ 5\sigma_\theta,\ 5\sigma_\theta,\ 5\sigma_\theta,\ 5\sigma_\theta$和较大异常值$5\sigma_\theta,\ 10\sigma_\theta,\ 15\sigma_\theta,\ 20\sigma_\theta,\ 50\sigma_\theta$出现的情况下进行仿真, 集合样本数设为$q=50$, 初始状态高斯分量数目设为$N_{\mathrm{G}}=5$, 过程噪声和量测噪声高斯分量数目分别设为$G=1$和

$K=1$. 3种滤波算法得到的位置RMSE曲线如图2和图3所示. 图中的CRLB曲线表示位置RMSE的Cramér-Rao下界.

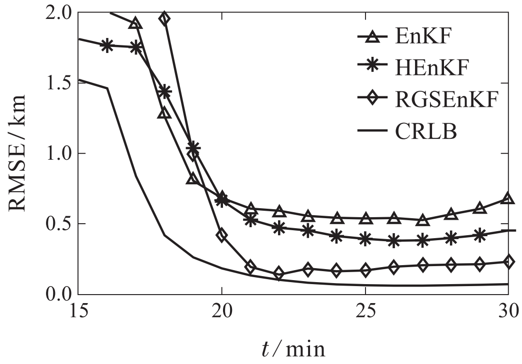


图 2 较小异常值情况下RMSE对比

Fig. 2 Comparison of RMSE when small outliers occur

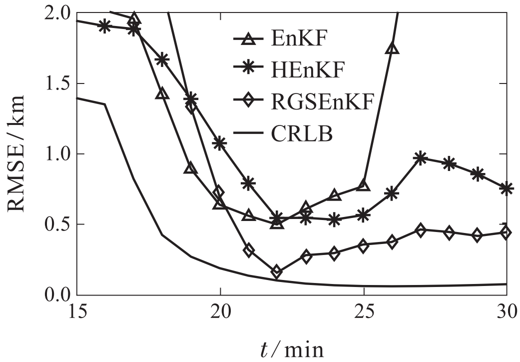


图 3 较大异常值情况下RMSE对比

Fig. 3 Comparison of RMSE when large outliers occur

**仿真实验 2**　假设量测噪声服从非高斯分布$p(v_k)=(1-\beta)\mathcal{N}(0,(\sigma_\theta)^2)+\beta\mathcal{N}(0,(5\sigma_\theta)^2)$, $\sigma_\theta=1.5°$, $\beta$为闪烁噪声概率. 在$\beta=0.1$和$\beta=0.3$的情况下进行仿真, 集合样本数设为$q=50$, 初始状态高斯分量数目设为$N_{\rm G}=5$, 过程噪声和量测噪声高斯分量数目分别设为设为$G=1$和$K=2$. 3种滤波算法得到的位置RMSE曲线如图4和图5所示. 图中的CRLB曲线表示位置RMSE的Cramér-Rao下界.

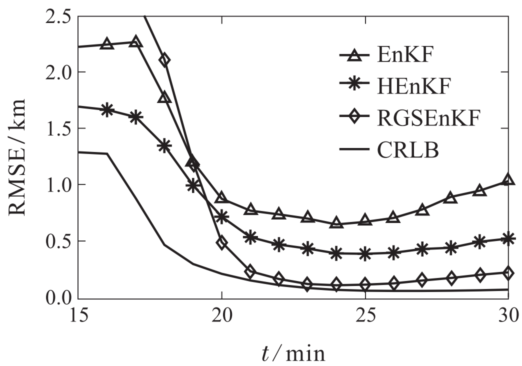


图 4 较小闪烁噪声概率情况下RMSE对比

Fig. 4 Comparison of RMSE when $\beta$ is small

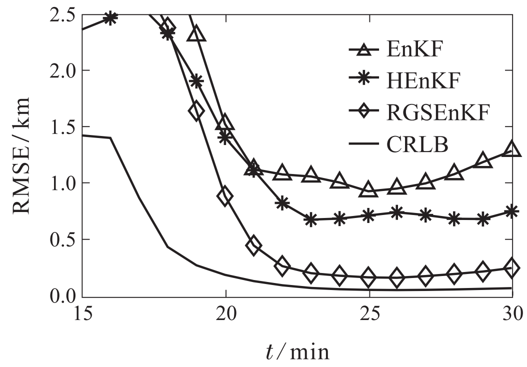


图 5 较大闪烁噪声概率情况下RMSE对比

Fig. 5 Comparison of RMSE when $\beta$ is large

从图2中可以看出, 当异常值较小时, 3种算法均能在一定时间内收敛, 标准的EnKF算法依靠其自身的数据同化作用在一定程度上消除了异常值的影响, 但跟踪精度较低; HEnKF通过重塑量测信息提升了算法性能, 而本文RGSEnKF算法的跟踪精度最高. 图3中, 当异常值较大尤其是在第27 min出现巨大异常值的时候, EnKF和HEnKF算法的跟踪精度迅速下降. RGSEnKF算法虽然也出现了短暂的发散现象, 但相比于HEnKF, 在异常值出现后能更快地恢复到较高的跟踪精度范围内.

从图4和图5中可以看出, 当量测噪声为非高斯时, 对于EnKF算法, 由于假定量测噪声为已知高斯噪声, 在非高斯环境下出现了系统模型失配, 导致其跟踪精度迅速下降并趋于发散. HEnKF算法将出现的受非高斯噪声干扰的量测视为异常值进行处理, 在一定程度上提高了跟踪精度. 当闪烁噪声概率较小($\beta=0.1$)时, HEnKF算法估计得到的RMSE曲线虽然能够收敛, 但滤波精度较低; 而当闪烁噪声概率较大($\beta=0.3$)时, HEnKF算法的性能并不稳定, 且滤波精度大幅度下降. 本文提出的RGSEnKF算法采用高斯和框架, 可以有效地处理非高斯噪声存在下非线性系统的状态估计问题. 仿真结果表明, RGSEnKF算法跟踪效果最好, 而且在不同的闪烁噪声概率下, 性能差异并不大, 验证了本文算法的有效性和鲁棒性.

3种算法相对于EnKF的运行时间对比如表1所示, 由于本文算法使用了高斯和框架, 时间复杂度随着高斯分量的增加有所提升.

表 1 相对运行时间

Table 1 Relative computation time

| 算法 | 相对运行时间 |
|---|---|
| EnKF | 1 |
| HEnKF | 1.2 |
| RGSEnKF($N_{\rm G}=5,\ K=1$) | 5.9 |
| RGSEnKF($N_{\rm G}=5,\ K=2$) | 11.3 |

## 7 结论(Conclusions)

本文在高斯和框架下, 推导了HEnKF算法, 并结合距离参数化初始化策略和高斯分量融合策略建立了一种新的非线性滤波算法——RGSEnKF算法, 能够有效解决受异常值或者非高斯噪声干扰的非线性系统的状态估计问题. 仿真实验验证了本文算法在纯角度跟踪中的有效性.

## 参考文献(References):


[1] RISTIC B, ARULAMPALAM S, GORDON N. *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications* [M]. Norwood, MA: Artech House, 2004.

[2] KAI X, WEI C, LIU L. Robust extended Kalman filtering for nonlinear systems with stochastic uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part A: Systems and Humans*, 2010, 40(2): 399 – 405.

[3] AIDALA V, HAMMEL S. Utilization of modified polar coordinates for bearings-only tracking [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1983, 28(3): 283 – 294.

[4] CLARK J M C, VINTER R B, YAQOOB M M. Shifted Rayleigh filter: a new algorithm for bearings-only tracking [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(4): 1373 – 1384.

[5] PEACH N. Bearings-only tracking using a set of range-parameterised extended Kalman filters [J]. *IEEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 1995, 142(1): 73 – 80.

[6] LANEUVILLE D, JAUFFRET C. Recursive bearings-only TMA via unscented Kalman filter: Cartesian vs. modified polar coordinates [C] //*Aerospace Conference*. Big Sky, MT: IEEE, 2008: 1 – 11.

[7] DUNIK J, STRAKA O, SIMANDL M, et al. Random-point-based filters: analysis and comparison in target tracking [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(2): 1403 – 1421.

[8] LEONG P H, ARULAMPALAM S, LAMAHEWA T A, et al. A Gaussian-sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, 49(2): 1161 – 1176.

[9] WANG Xiaoxu, PAN Quan, HUANG He, et al. Overview of deterministic sampling filtering algorithms for nonlinear system [J]. *Control and Decision*, 2012, 27(6): 801 – 812.
(王小旭, 潘泉, 黄鹤, 等. 非线性系统确定采样型滤波算法综述 [J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 801 – 812.)

[10] ARULAMPALAM M S, MASKELL S, GORDON N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(2): 174 – 188.

[11] EVENSEN G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics [J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 1994, 99(C5): 10143 – 10162.

[12] HU Zhentao, ZHANG Yong, LIU Xianxing. Maneuvering target tracking algorithm based on ensemble Kalman filter with observation iterated update [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(11): 1517 – 1523.
(胡振涛, 张勇, 刘先省. 基于量测迭代更新集合卡尔曼滤波的机动目标跟踪算法 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(11): 1517 – 1523.)

[13] LIAO Ying, LIU Guangming, WEN Yuanlan, et al. *Passive Tracking Technology of Non-Cooperative Space Target and Application* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015.
(廖瑛, 刘光明, 文援兰, 等. 空间非合作目标被动跟踪技术与应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2015.)

[14] SONG Xiaoquan, SUN Zhongkang. Maneuvering target tracking with non-Gaussian noise [J]. *Acta Electronica Sinica*, 1998, 26(9): 40 – 46.
(宋小全, 孙仲康. 非高斯噪声下的机动目标跟踪 [J]. 电子学报, 1998, 26(9): 40 – 46.)

[15] CHANG L, HU B, CHANG G, et al. Huber-based novel robust unscented Kalman filter [J]. *IET Science, Measurement & Technology*, 2012, 6(6): 502 – 509.

[16] KARLGAARD C D, SCHAUB H. Huber-based divided difference filtering [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(3): 885 – 891.

[17] WANG X, CUI N, GUO J. Huber-based unscented filtering and its application to vision-based relative navigation [J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2010, 4(1): 134 – 141.

[18] WU H, CHEN S, YANG B, et al. Robust derivative-free cubature Kalman filter for bearings-only tracking [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, 39(8): 1866 – 1871.

[19] KOTECHA J H, DJURIC P M. Gaussian sum particle filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(10): 2602 – 2612.

[20] LIN Qing, YIN Jianjun, ZHANG Jianqiu, et al. Gaussian sum filtering methods for nonlinear non-Gaussian models [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(12): 2493 – 2499.
(林青, 尹建君, 张建秋, 等. 非线性非高斯模型的高斯和滤波算法 [J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(12): 2493 – 2499.)


## 作者简介:


**姜浩楠** (1991–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为组合导航、目标跟踪和非线性滤波, E-mail: jianghaonan@stu.xjtu.edu.cn;

**蔡远利** (1963–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为现代控制理论及应用、复杂系统建模与仿真、飞行器制导与控制、飞行动力学等, E-mail: ylicai@mail.xjtu.edu.cn.