第 35 卷第 2 期
2018 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 35 No. 2
Feb. 2018

DOI: 10.7641/CTA.2018.70385

流体管道水锤抑制的时间尺度变换控制

陈特欢[1,2†], 任志刚[2,3]

(1. 宁波大学 机械工程与力学学院, 浙江 宁波 315211;

2. 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027; 3. 广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510006)

摘要: 在流体管道运行中, 打开的阀门突然关闭会造成管道内部流体对阀门及管壁的巨大压力冲击, 这种现象叫做水锤效应, 严重威胁流体管道的健康运行. 基于此, 本文研究了阀门关闭过程中抑制水锤效应的最优边界控制问题. 水锤模型由一组非线性时空演化方程描述, 本文首先通过半离散方法得到一个有限维模型. 然后, 采用分段一次线性控制变量参数化方法及灵敏度分析方法, 结合时间尺度变换方法, 推导其梯度形式. 最后, 结合非线性优化求解器, 完成边界最优控制设计. 仿真结果显示时间尺度变换方法能够更有效地抑制水锤效应. 考虑到实际工程中的控制量为阀门相对开度, 在得到阀门处的流量和压力的最优变化过程后, 本文给出了阀门相对开度随时间的演化关系.

关键词: 水锤模型; 分段一次线性控制变量参数化; 时间尺度变换; 敏感性分析

引用格式: 陈特欢, 任志刚. 流体管道水锤抑制的时间尺度变换控制. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 198 – 206

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Control of water hammer suppression via time-scaling technique

CHEN Te-huan[1,2†], REN Zhi-gang[2,3]

(1. Faculty of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo University, Ningbo Zhejiang 315211, China;
2. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;
3. School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong 510006, China)

Abstract: During the fluid pipeline running, sudden closure of an open valve in the pipeline network causes a huge pressure shock toward the valve and pipeline wall. This phenomenon, called water hammer, threatens the healthy operation of the fluid pipeline. Thus, an optimal boundary control problem of water hammer suppression during valve closure is studied. The water hammer model can be described as a set of nonlinear spatio-temporal equations, including a boundary control at the end of the pipeline. First, the method of lines (MOL) is applied to reduce the water hammer model to a finite dimensional model. Then, the piecewise-linear control parameterization method and sensitivity analysis method combined with the time-scaling technique are proposed to derive the gradients of the objective function. Finally, nonlinear optimization techniques are used to solve the optimal control problem. Numerical results show the time-scaling technique can suppress water hammer more effectively. Since the practical control input is the degree of the valve opening, the optimal changes of valve relative opening with time evolution are given based on the optimal boundary control and the corresponding pressure changes.

Key words: water hammer model; piecewise-linear control parameterization; time-scaling technique; sensitivity analysis

Citation: CHEN Tehuan, REN Zhigang. Control of water hammer suppression via time-scaling technique. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(2): 198 – 206

1 引言(Introduction)

在流体管道运行和管理中, 通过阀门、泵等执行器对流体管道进行运行控制和调度非常重要, 是流体管道健康运行的保障. 然而, 执行器操作或控制不当, 如打开的阀门突然关闭, 会引发严重的安全事故(水锤效应). 其产生一系列急骤的压力交替变化的水力撞击, 以每秒一公里以上的速度, 将巨大的压力振荡传至全管, 对流体管道造成严重的危害[1–2].

水锤抑制的应用非常广泛, 不仅存在于城市污水管道、石油化工管道[3–4], 还存在于航天器推进系

收稿日期: 2017−06−07; 录用日期: 2018−01−04.
†通信作者. E-mail: chentehuan@nbu.edu.cn; Tel.: +86 15868891711.
本文责任编委: 吴敏.
国家自然科学基金项目(61703217, 61703114, 61473253), 工业控制技术国家重点实验室开放课题(ICT170301, ICT170288), 宁波大学科研基金(XYL17024)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61703217, 61703114, 61473253), the Open Research Project of the State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, China (ICT170301, ICT170288) and the Research Foundation of Ningbo University (XYL17024).

统[5]、核反应堆换热循环系统等. 不可避免的水锤效应是这些流体管道系统的重大安全隐患. 不当或不合适的水锤抑制处理将直接威胁整个流体管道网络的安全.

为了防止流体管道遭受水锤的破坏, 各种抑制水锤的策略不断被提出, 主要集中于被动防御策略和主动控制策略. 在被动防御策略方面, 其主要包括采用特殊材料来增强流体管道耐压能力和增设减压设备, 如释压阀、调压井[6]. 尽管被动防御策略对抑制水锤效应有一定的作用, 然而面对复杂的流体管道运行工况, 尤其是超出被动防御设计范围之外的水锤抑制, 显得力不从心[7]. 水锤抑制的主动控制策略主要包含两方面, 一个是边界控制稳定性分析, 另一个是最优控制. Coron等研究线性水锤模型的边界反馈稳定性问题, 从而指导执行机构(泵)的运行控制[8]. Georges等分析滚动优化对线性水锤模型的稳定性, 并给出保证平衡状态渐进稳定的充分条件[9]. 岑丽辉等对圣维南模型采用黎曼不变法, 从而给出了确保闭环系统渐进稳定的边界反馈控制律形式及相关参数选择方案[10]. 高红霞等引入内流动力学, 完善了柔性立管原始无穷维分布参数模型并用Lyapunov直接法进行稳定性和状态一致有界性证明[11]. Krstic等考虑流体管道这类准线性的一阶双曲型偏微分方程, 利用反步方法设计一个全状态反馈控制器, 并证明了该闭环系统的指数稳定性[12].

本文从最优控制角度出发, 设计阀门最优控制策略, 应对流体管道中的水锤. 最优控制作为一种在工程领域中较成功应用的主动控制策略, 结合被动防御策略, 将水锤的破坏降到最低. 曹慧哲等对线性水锤模型应用函数极值理论和Ritz法, 得到了使流体管道阀门处压力冲击最小值时的关阀规律[13]. Kou等主要通过大量实际测试所得的经验规律, 得到较优的液压控制阀输入, 来解决矿井排水系统中阀门关闭所引起的水锤问题[14]. Djebedjian等针对流体管网中突然关阀、泵故障等突发情况, 采用遗传算法优化配水系统, 从而抑制水锤破坏[15]. Axworthy等提出了一个基于节点、图模型的阀门关闭算法. 该算法适用于一个缓慢变化(刚性水柱)的流体管道网络[16]. 许超等针对水锤抑制的最优控制问题, 采用伴随方法推导出系统的协态方程和最优性条件[17], 而此方法没有考虑时间尺度变换. Kerachian等考虑水锤抑制的一个多目标优化模型, 并结合专业优化软件和贝叶斯网络方法, 设计流体管道最优的阀门关闭策略[18].

目前水锤优化控制鲜有考虑时间尺度变换方法, 而此方法将边界控制变量在时域上离散的同时, 给出离散时间区间的最优尺度, 从而得到更优的阀门关闭策略. 因此, 本文针对阀门关闭过程中水锤抑制的边界最优控制问题, 首先将时空演化模型离散成非线性的有限维模型. 其次, 采用分段一次线性控制变量参数化方法和时间尺度变换方法逼近控制变量, 从而将轨迹优化问题转化为参数优化问题. 针对此优化问题, 通过灵敏度分析方法, 推导出目标函数及约束的梯度形式, 并提出基于梯度的优化框架求解得到阀门关闭的最优策略. 最后, 用仿真分析得到时间尺度变换方法的优势.

2 水锤抑制的最优控制问题(Optimal control problem of water hammer suppression)

2.1 流体管道动力学模型(Dynamic model of the fluid pipeline)

本文考虑如图1所示的常见流体管道系统, 其首端连接着水库, 末端有一个阀门. 对于流体管道而言, 可做如下假设: 管道是等直径的圆柱管, 管道高度的变化可以忽略; 温度变化范围比较小, 流体的粘度和密度基本保持不变, 流体沿径向的速度梯度为零; 管道的弹性形变相对于流体而言可以忽略; 流体的平均速度相对于管道的波速可以忽略.

图 1 常见流体管道系统

Fig. 1 A general pipeline flow system

根据以上假设, 流体管道模型可由以下的时空演化方程组成[19]:

$$\frac{\partial q(l,t)}{\partial t}+\frac{S}{\rho}\frac{\partial p(l,t)}{\partial l}+\frac{fq(l,t)\,|q(l,t)|}{2DS}=0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p(l,t)}{\partial t}+\frac{\rho c^2}{S}\frac{\partial q(l,t)}{\partial l}=0, \quad (2)$$

式中: $l\in[0,L], t\in[0,T]$, l为空间变量, t为时间变量, L为管道长度, T为阀门关闭所需时间, p为压力, q为流量, S为管道截面积, D为管道直径, c为波速, ρ为流体密度, f为摩阻系数.

根据如图1所示的常见流体管道系统, 得到系统的边界条件

$$p(0,t)=P,\ q(L,t)=u(t),\ t\in[0,T], \quad (3)$$

式中: P是水库产生的一个恒压, $u(t)$是流体管道末端的流量调节量. 根据实际的控制要求, 边界流量调节量有如下有界约束:

$$0\leqslant u(t)\leqslant U_{\max},\ t\in[0,T], \quad (4)$$

式中$U_{\max}$代表流体管道运行中的最大流量值.

在初始时刻, 阀门完全开启, 即流量最大, 得到

$$u(0)=U_{\max}. \quad (5)$$

在终端时刻, 阀门需完全关闭, 得到

$$u(T)=0. \tag{6}$$

流体管道在运行过程中一般为稳态, 因此, 设定初始流量为

$$q(l,0)=Q,\ l\in[0,L], \tag{7}$$

式中Q是流体管道稳态时的流体流量, 为一常数. 通过式(1)得到初始的压力分布为

$$p(l,0)=P-\frac{\rho fQ\,|Q|}{2DS^2}l, l\in[0,L]. \tag{8}$$

2.2 最优控制问题(Optimal control problem)

为了抑制阀门关闭过程中的水锤效应, 通过阀门执行器调节流量$u(t)$来减少压力冲击及波动. 考虑文献[20]中所提的目标函数

$$J(u(t))=\frac{1}{T}\int_0^T[p(L,t)-P]^4\mathrm{d}t+\frac{1}{LT}\int_0^T\int_0^L[p(l,t)-P]^4\mathrm{d}l\mathrm{d}t. \tag{9}$$

综上所述, 水锤抑制的最优控制问题为: 给定带有初始条件(7)–(8)和边界条件(3)的流体管道模型(1)–(2), 通过选取满足有界约束(4)、初始时刻控制约束(5)、终端时刻控制约束(6)的边界控制$u(t)$来极小化目标函数值(9).

3 模型半离散和控制变量参数化(Spatial discretization and control parameterization)

3.1 流体管道模型半离散方法(The method of lines toward the fluid pipeline model)

采用半离散方法(MOL)来近似流体管道无限维时空演化模型(1)–(2). 将管道总长度等分成N份子空间区间, 即$[l_{i-1},l_i]$, $i=1,2,\cdots,N$,且$l_0=0$, $l_N=L$. 令

$$\begin{cases}p_i=p(l_i,t),\\ q_i(t)=q(l_i,t),\end{cases} i=0,1,\cdots,N. \tag{10}$$

利用有限差分得到

$$\frac{\partial p(l_{i-1},t)}{\partial l}=\frac{p(l_i,t)-p(l_{i-1},t)}{\Delta L}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial q(l_i,t)}{\partial l}=\frac{q(l_i,t)-q(l_{i-1},t)}{\Delta L}, \tag{12}$$

式中: $i=1,2,\cdots,N$, $\Delta L=L/N$. 将式(11)–(12)代入流体管道模型(1)–(2)得到

$$\dot q_{i-1}(t)=-\frac{S}{\rho\Delta L}(p_i(t)-p_{i-1}(t))-\frac{fq_{i-1}(t)\,|q_{i-1}(t)|}{2DS}, \tag{13}$$

$$\dot p_i(t)=-\frac{\rho c^2}{S\Delta L}(q_i(t)-q_{i-1}(t)), \tag{14}$$

式中$i=1,2,\cdots,N$. 根据式(10), 边界条件(3)变为

$$p_0(t)=P,\ q_N(t)=u(t),\ t\in[0,T]. \tag{15}$$

令

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_1(t)=[p_1(t)\ \cdots\ p_N(t)]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^N,\\&\boldsymbol{x}_2(t)=[q_0(t)\ \cdots\ q_{N-1}(t)]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^N,\\&|\boldsymbol{x}_1(t)|=[|p_1(t)|\ \cdots\ |p_N(t)|]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^N,\\&|\boldsymbol{x}_2(t)|=[|q_0(t)|\ \cdots\ |q_{N-1}(t)|]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^N,\end{aligned}$$

并定义

$$\boldsymbol{x}(t)=[\boldsymbol{x}_1(t)\ \ \boldsymbol{x}_2(t)]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{2N}, \tag{16}$$

$$|\boldsymbol{x}(t)|=[|\boldsymbol{x}_1(t)|\ \ |\boldsymbol{x}_2(t)|]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{2N}, \tag{17}$$

得到

$$\boldsymbol{x}_1(0)=[P-\frac{\rho fQ\,|Q|}{2DS^2}\Delta L\cdots P-\frac{\rho fQ\,|Q|}{2DS^2}L]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^N,$$

$$\boldsymbol{x}_2(0)=Q[1\cdots1]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^N,$$

那么, 初始条件为

$$\boldsymbol{x}(0)=[\boldsymbol{x}_1(0)\ \ \boldsymbol{x}_2(0)]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{2N}. \tag{18}$$

根据式(16)–(17), 水锤离散模型(13)–(14)描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t)\circ|\boldsymbol{x}(t)|+\boldsymbol{b}P+\boldsymbol{a}u(t), \tag{19}$$

式中“$\circ$”为Hadamard卷积. 各个矩阵$A,\boldsymbol{a},B,\boldsymbol{b}$的形式见附录. 此外, 对目标函数(9)使用辛普森法则得到

$$J(u(t))=\int_0^T\{\frac{3N+1}{3NT}(x_N(t)-P)^4+\frac{4}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2}(x_{2j-1}(t)-P)^4+\frac{2}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2-1}(x_{2j}(t)-P)^4\}\mathrm{d}t. \tag{20}$$

3.2 分段一次线性控制变量参数化方法(Piecewise-linear control parameterization)

将整个控制时域$[0,T]$分成R份子时间区间. 即

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{R-1}<t_R=T,$$

式中$R>1$是子时间区间的数量. 同时, 考虑到流量$u(t)$是一个连续的变量, 用分段一次线性控制变量参数化方法逼近[21]

$$\dot u(t)\approx\sigma_k,\ t\in[t_{k-1},t_k)\,,\ k=1,2,\cdots,R, \tag{21}$$

其中: $[t_{k-1},t_k)$是第k个子时间区间, σ_k第k个子时间区间上的变化率, 且$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_R]^{\mathrm T}$. 可将式(21)写成

$$\dot u(t)\approx\sum_{k=1}^R\sigma_k\chi_{[t_{k-1},t_k)}(t), \tag{22}$$

式中$\chi_{[t_{k-1},t_k)}(t)$是指标函数

$$\chi_{[t_{k-1},t_k)}(t)=\begin{cases}1, t\in[t_{k-1},t_k)\,,\\ 0, 其他.\end{cases}$$

根据式(22), $\dot{u}(t)$被分段常数所逼近. 令$x_{2N+1}=u(t)$为一个新的状态变量, 它可由以下动态系统表示:

$$\begin{cases}\dot{x}_{2N+1}(t)=\sum_{k=1}^{R}\sigma_k\chi_{[t_{k-1},t_k)}(t),\ t\in[0,T],\\ x_{2N+1}(0)=U_{\max}.\end{cases}\tag{23}$$

由于$x_{2N+1}(t)$是分段一次线性的, 边界控制有界约束(4)变为

$$0\leqslant x_{2N+1}(t_k)\leqslant U_{\max},\ k=1,2,\cdots,R.\tag{24}$$

同时, 水锤离散模型(19)变为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t)\circ|\boldsymbol{x}(t)|+\boldsymbol{b}P+\boldsymbol{a}x_{2N+1}(t).\tag{25}$$

终端时刻控制约束(6)变为

$$x_{2N+1}(T)=0.\tag{26}$$

4 流体管道时间尺度变换方法(Time-scaling technique for the fluid pipeline model)

4.1 时间尺度变换方法(Time-scaling technique)

等分的子时间区间$[t_{k-1},t_k)$, $k=1,2,\cdots,R$, 并不能获取最好的控制效果. 因此, 将子时间区间长度也作为一组优化量来求解. 然而, 变化的子时间区间长度无论在优化上还是在数值计算上都非常困难. 因此, 引入time-scaling变换方法[22].

引入一个时间尺度变换函数

$$t(s)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\lfloor s\rfloor}\theta_k+\theta_{\lfloor s\rfloor+1}(s-\lfloor s\rfloor), s\in[0,R)\,,\\ T, \qquad s=R,\end{cases}\tag{27}$$

式中: $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1\ \ \theta_2\ \ \cdots\ \ \theta_R]^{\mathrm{T}}$, 而$\lfloor s\rfloor$表示不大于$s$的一个整数.

新的时间变量s与原时间变量t之间可通过以下微分方程联系:

$$\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}=\sum_{k=1}^{R}\theta_k\chi_{[t_{k-1},t_k)}(s),\ s\in[0,R],\tag{28}$$

式中:

$$\theta_k=t_k-t_{k-1}, \theta_k>0,\ \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_R=T,$$

且$t(0)=0$. 显然, 经过time-scaling变换后, 新的时间尺度$s=k$分别与原时间尺度$t=t_k$一一对应, 如图2所示. 此外, 定义

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(s)=\boldsymbol{x}(t(s)).\tag{29}$$

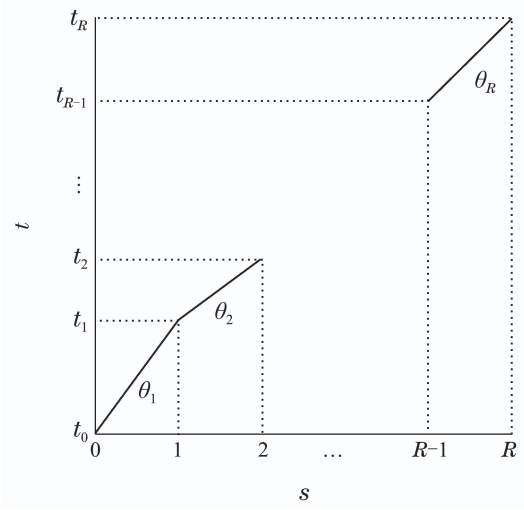

图 2 时间尺度变换图

Fig. 2 Time-scaling technique

4.2 时间尺度变换后的最优控制问题(Optimal control problem via time-scaling technique)

根据式(29)定义, 水锤离散模型(25)变为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t(s))}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t(s))}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}=\theta_k[A\tilde{\boldsymbol{x}}(s)+B\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\circ|\tilde{\boldsymbol{x}}(s)|+\boldsymbol{b}P+\boldsymbol{a}\tilde{x}_{2N+1}(s)],\tag{30}$$

式中: $s\in[k-1,k)$, $k=1,2,\cdots,R$. 初始条件变为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(0)=[x_1(0)\ \ x_2(0)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2N}.\tag{31}$$

同时, 式(23)变为

$$\dot{\tilde{x}}_{2N+1}(s)=\sigma_k\theta_k,\ \tilde{x}_{2N+1}(0)=U_{\max},\tag{32}$$

式中: $s\in[k-1,k]$, $k=1,2,\cdots,R$. 边界控制有界约束(24)变为

$$0\leqslant\tilde{x}_{2N+1}(k)\leqslant U_{\max},\ k=1,2,\cdots,R.\tag{33}$$

终端时刻控制约束(26)变为

$$\tilde{x}_{2N+1}(R)=0.\tag{34}$$

目标函数(20)变为

$$J(\sigma,\theta)=\sum_{k=1}^{R}\int_{k-1}^{k}\theta_k\{\frac{3N+1}{3NT}(\tilde{x}_N(s)-P)^4+\frac{4}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2}(\tilde{x}_{2j-1}(s)-P)^4+\frac{2}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2-1}(\tilde{x}_{2j}(s)-P)^4\}\mathrm{d}\eta.\tag{35}$$

因此, 水锤抑制的最优控制问题变为: 给定带有初始条件(31)的水锤离散模型(30)以及新的状态方程(32), 选取控制向量$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \cdots\ \ \sigma_R]^{\mathrm{T}}$和时间尺度向量$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1\ \ \theta_2\ \ \cdots\ \ \theta_R]^{\mathrm{T}}$来极小化目标函数值(35), 且满足有界约束(33)和终端时刻约束(34).

5 最优控制问题求解(Solving the optimal control problem)

第4.2节中定义的最优控制问题是一个非线性优化问题. 然而, 目标函数对控制向量和时间尺度向量的关系是隐式的. 因此, 为了能够采用基于梯度的优化工具求解, 需通过灵敏度分析方法去演化约束条件以及目标函数的梯度信息[23].

5.1 新的状态变量的灵敏度分析(Sensitivity analysis of the new state variable)

定理 1 对于每个$m=1,2,\cdots,R$, 新的状态变量$\tilde{x}_{2N+1}(s)$在每个子时间区间$[m-1,m]$上对控制参数σ_k的状态变化为

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \sigma_k}=\begin{cases}\theta_m\left[s-(m-1)\right], k=m,\\ \theta_k, & k<m,\\ 0, & k>m.\end{cases} \tag{36}$$

证 用归纳法证明. 当$m=1$时, 从式(32)可得

$$\tilde{x}_{2N+1}(s)=U_{\max}+\sigma_1\theta_1 s,\ s\in[0,1].$$

显然, 对于所有的$s\in[0,1]$,

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \sigma_k}=\begin{cases}\theta_1 s, k=1,\\ 0, \quad k>1.\end{cases}$$

因此, $m=1$的情况满足式(36). 假设式(36)满足$m=\bar{l}$的情况. 然后对所有的$s\in\left[\bar{l}-1,\bar{l}\right]$,

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \sigma_k}=\begin{cases}\theta_{\bar{l}}\left[s-(\bar{l}-1)\right], k=\bar{l},\\ \theta_k, & k<\bar{l},\\ 0, & k>\bar{l}.\end{cases}$$

当$m=\bar{l}+1$时, 根据式(32)得到

$$\tilde{x}_{2N+1}(s)=\tilde{x}_{2N+1}(\bar{l})+\sigma_{\bar{l}+1}\theta_{\bar{l}+1}(s-\bar{l}),$$
$$s\in\left[\bar{l},\bar{l}+1\right),$$

因此, 对于所有$s\in\left[\bar{l},\bar{l}+1\right)$,

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \sigma_k}=\begin{cases}\theta_{\bar{l}+1}\left[s-\bar{l}\right], k=\bar{l}+1,\\ \dfrac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(\bar{l})}{\partial \sigma_k}, & k<\bar{l}+1,\\ 0, & k>\bar{l}+1.\end{cases}$$

运用归纳假设得到

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \sigma_k}=\begin{cases}\theta_{\bar{l}+1}\left[s-\bar{l}\right], k=\bar{l}+1,\\ \theta_k, & k<\bar{l}+1,\\ 0, & k>\bar{l}+1.\end{cases}$$

这表明$m=\bar{l}+1$情况满足式(36). 证毕.

同理可证定理2.

定理 2 对于每个$m=1,2,\cdots,R$, 新的状态变量$\tilde{x}_{2N+1}(s)$在每个子时间区间$[m-1,m]$上对时间参数θ_k的状态变化为

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \theta_k}=\begin{cases}\sigma_m\left[s-(m-1)\right], k=m,\\ \sigma_k, & k<m,\\ 0, & k>m.\end{cases} \tag{37}$$

定理1与定理2的区别在于前者是新的状态变量$\tilde{x}_{2N+1}(s)$对σ_k求导, 后者是新的状态变量$\tilde{x}_{2N+1}(s)$对θ_k求导. 在证明过程中, σ_k和θ_k只有相乘的形式. 因此, 定理1和定理2的结果非常相似.

5.2 灵敏度方程推导(Derivation of the sensitivity equation)

在$s\in[0,k-1]$时间区间内, 系统状态$\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$对第$k$个控制参数无影响, 因此可得

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \sigma_k}=0,\ s\in[0,k-1]. \tag{38}$$

对于任意$m=k,k+1,\cdots,R$,

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(s)=\tilde{\boldsymbol{x}}(m-1)+\int_{m-1}^{s}\{A\theta_k\tilde{\boldsymbol{x}}(s)+ \boldsymbol{a}\theta_k\tilde{x}_{2N+1}(s)+\boldsymbol{b}\theta_k P+B\theta_k\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\circ|\tilde{\boldsymbol{x}}(s)|\}\mathrm{d}\eta, \tag{39}$$

式中$s\in[m-1,m]$. 式(39)对控制参数σ_k求导得到

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \sigma_k}=\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(m-1)}{\partial \sigma_k}+\int_{m-1}^{s}\{A\theta_k\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \sigma_k}+ \boldsymbol{a}\theta_k\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \sigma_k}+2B\theta_k|\tilde{\boldsymbol{x}}(s)|\circ\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \sigma_k}\}\mathrm{d}\eta,$$
$$s\in[m-1,m),\ m=k,k+1,\cdots,R. \tag{40}$$

然后, 式(40)对时间s求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \sigma_k}\}= A\theta_k\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \sigma_k}+\boldsymbol{a}\theta_k\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \sigma_k}+2B\theta_k|\tilde{\boldsymbol{x}}(s)|\circ\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \sigma_k},$$
$$s\in[m-1,m),\ m=k,k+1,\cdots,R, \tag{41}$$

式中$\dfrac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \sigma_k}$可由第5.1节中的定理1得到, 初始条件为式(38). 同理可得

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \theta_k}=0,\ s\in[0,k-1] \tag{42}$$

及灵敏度方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \theta_k}\}= A\theta_k\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \theta_k}+\boldsymbol{a}\theta_k\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \theta_k}+2B\theta_k|\tilde{\boldsymbol{x}}(s)|\circ\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s)}{\partial \theta_k}+ \delta_{km}\left[A\tilde{\boldsymbol{x}}(s)+B\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\circ|\tilde{\boldsymbol{x}}(s)|+\boldsymbol{b}P+\boldsymbol{a}\tilde{x}_{2N+1}(s)\right],$$
$$s\in[m-1,m),\ m=k,k+1,\cdots,R, \tag{43}$$

其中: δ_{km}为Kronecker函数, $\dfrac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(s)}{\partial \theta_k}$可由第5.1节

中的定理2得到, 初始条件为式(42).

5.3 目标函数梯度(Gradient formulas of the objective function)

第5.2节中已得到灵敏度方程, 因此, 目标函数(35)对σ_k, θ_k采用链式法则求导获得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial J(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_k}=\\&\sum_{k=1}^{R}\int_{k-1}^{k}\theta_k\{\frac{12N+4}{3NT}(\tilde{x}_N(s)-P)^3\frac{\partial \tilde{x}_N(s)}{\partial \sigma_k}+\\&\frac{16}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2}(\tilde{x}_{2j-1}(s)-P)^3\frac{\partial \tilde{x}_{2j-1}(s)}{\partial \sigma_k}+\\&\frac{8}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2-1}(\tilde{x}_{2j}(s)-P)^3\frac{\partial \tilde{x}_{2j}(s)}{\partial \sigma_k}\}\mathrm{d}\eta,\end{aligned}\tag{44}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial J(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}=\\&\sum_{k=1}^{R}\int_{k-1}^{k}\theta_k\{\frac{12N+4}{3NT}(\tilde{x}_N(s)-P)^3\frac{\partial \tilde{x}_N(s)}{\partial \theta_k}+\\&\frac{16}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2}(\tilde{x}_{2j-1}(s)-P)^3\frac{\partial \tilde{x}_{2j-1}(s)}{\partial \theta_k}+\\&\frac{8}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2-1}(\tilde{x}_{2j}(s)-P)^3\frac{\partial \tilde{x}_{2j}(s)}{\partial \theta_k}\}+\\&\delta_{km}\{\frac{3N+1}{3NT}(\tilde{x}_N(s)-P)^4+\\&\frac{4}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2}(\tilde{x}_{2j-1}(s)-P)^4+\\&\frac{2}{3NT}\sum_{j=1}^{N/2-1}(\tilde{x}_{2j}(s)-P)^4\}\mathrm{d}\eta,\ m=1,2,\cdots,R,\end{aligned}\tag{45}$$

式中: $\frac{\partial \tilde{x}_i(s)}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial \tilde{x}_i(s)}{\partial \theta_k},\ i=1,2,\cdots,N$, 由灵敏度方程(41)(43)计算得到.

此外, 不等式状态约束(33)对σ_k, θ_k的梯度分别为

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(R)}{\partial \sigma_k}, -\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(R)}{\partial \sigma_k},\ k=1,2,\cdots,R,$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(R)}{\partial \theta_k}, -\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(R)}{\partial \theta_k},\ k=1,2,\cdots,R.$$

终端时刻状态约束(34)对σ_k, θ_k的梯度分别为

$$\frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(R)}{\partial \sigma_k},\ \frac{\partial \tilde{x}_{2N+1}(R)}{\partial \theta_k}, k=1,2,\cdots,R.$$

因此, 基于梯度的优化框架求解最优控制问题的具体步骤如下所示:

1) 选择一组初始猜测σ_k,θ_k, $k=1,2,\cdots,R$;

2) 求解水锤离散模型(30);

3) 计算状态变化式 (36)–(37) 和灵敏度方程(41)(43);

4) 计算目标函数的梯度(44)–(45)及其状态约束的梯度;

5) 执行最优测试. 如果当前点是最优的, 那么就停止; 否则执行第6)步;

6) 根据梯度信息得到下一步的搜索方向, 确定最优步长, 获取新的σ_k,θ_k, $k=1,2,\cdots,R$.

6 数值计算(Numerical simulations)

本部分将所提的最优控制方法应用到具体仿真实例, 验证有无采用时间尺度变换方法的控制策略. 流体管道参数如下: 流体管道总长度$L=100\,\mathrm{m}$, 直径$D=100\,\mathrm{mm}$, 流体密度$\rho=1000\,\mathrm{kg/m^3}$, 波速$c=1200\,\mathrm{m/s}$, 摩擦系数$f=0.03$. 此外, 阀门关闭所需总时间$T=10\,\mathrm{s}$, 水库产生的一个恒压$P=2\times10^5\,\mathrm{Pa}$, 初始流量$Q$=$1.57\times10^{-2}\,\mathrm{m^3/s}$, 流体管道离散数$N$=10和子时间区间的数量$R=10$.

初始猜测的优化控制向量和时间尺度向量为$\sigma_k=-1.57\times10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}, \theta_k=1,\ k=1,2,\cdots,R$, 根据第5部分所提的基于梯度的优化框架, 迭代求解得到控制向量和时间尺度向量的最优值. 表1给出了采用时间尺度变换方法时的最优控制参数值, 通过时间尺度变换方法, 可将等分的时间间隔转为优化的非等分的时间间隔. 抑制水锤的效果就是让流体管道压力峰值和压力波动达到最小.

表 1 最优控制参数值

Table 1 Optimal parameters

k	$\sigma_k\times10^{-3}$	θ_k
1	−3.071	1.056
2	−2.216	1.045
3	−1.839	1.050
4	−1.477	0.901
5	−1.485	0.886
6	−1.266	0.970
7	−1.135	1.004
8	−1.070	1.026
9	−1.030	1.028
10	−1.003	1.029

以下, 本文给出采用时间尺度方法和不采用时间尺度方法时的抑制效果比较. 采用时间尺度变换和不采用时间尺度变换方法下的最优目标函数分别为$1.2217\times10^{17}, 1.7172\times10^{17}$, 前者的数值要远小于后者近40%, 说明前者抑制水锤效果更好. 图3给出了时间尺度变换方法下的边界最优控制策略(流量最优变化). 图4给出了时间尺度变换方法和不采用时间尺度方法下流体管道末端(阀门执行器端) $l=L$处的压力变化轨迹. 采用时间尺度变换方法的压力峰值为$2.2413\times10^5\,\mathrm{Pa}$, 而不采用时间尺度变换方法的压力峰值$2.2742\times10^5\,\mathrm{Pa}$, 同时前者的压力波动还远小于后者. 图5和图6分别给出了在相应控制策略下整个流

体管道压力时空演化过程. 从这些压力变化轨迹图中也可以看出, 采用时间尺度变换方法能得到更小的压力冲击和波动. 因此, 从目标函数值和压力轨迹图的比较显示采用时间尺度方法能更好地减少水锤带来的破坏.

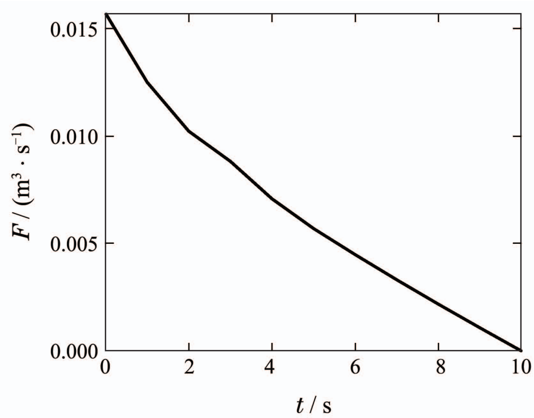

图 3 流体管道$l = L$处的流量最优变化曲线

Fig. 3 Optimal boundary control curve at $l = L$

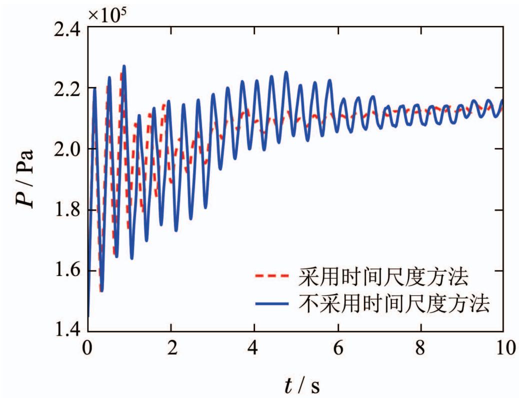

图 4 流体管道$l = L$处采用时间尺度方法和不采用时间尺度方法时的压力波动比较

Fig. 4 Comparison between time-scaling approach and time-scaling-free approach

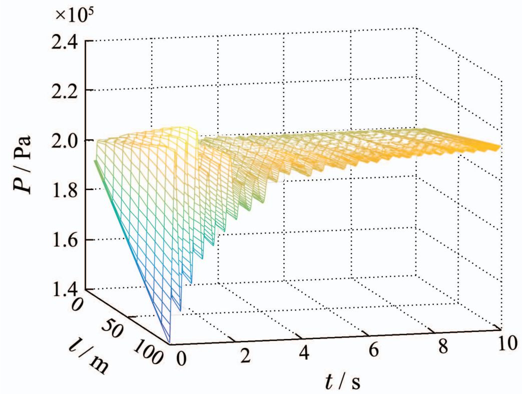

图 5 考虑时间尺度方法时的压力演化情况

Fig. 5 Pressure profile corresponding to the time-scaling approach

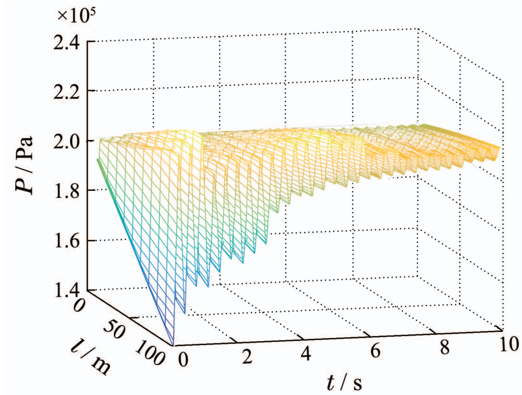

图 6 不考虑时间尺度方法时的压力演化情况

Fig. 6 Pressure profile corresponding to the time-scaling-free approach

7 流量最优变化规律下的阀门关闭策略(Valve closing strategy under the optimal flow rate)

第6部分给出了最优边界控制(管道末端流量最优变化)下的压力时空演化情况, 但研究阀门处流量最优变化规律不是主动控制的最终目的. 实际过程中的控制量为阀门相对开度$\lambda(t)$. 结合文献[8], 给出阀门相对开度$\lambda(t)$随时间t的演化关系.

首先, 根据定义可得$\lambda(t) = S_t/S$, 其中S_t为关闭过程中t时刻的管道末端的断面面积. 同时, 给出阀门的流量

$$q(L,t) = \mu(t)S_t\sqrt{2p(L,t)/\rho}, \tag{46}$$

式中$\mu(t)$为阀门的流量系数. 初始时的流量为

$$Q = \mu_0 S\sqrt{2(P - \frac{\rho f Q\,|Q|}{2DS^2}L)/\rho}, \tag{47}$$

式中μ_0为阀门全开时的流量系数. 将式(46)除以式(47)得到

$$\frac{q(L,t)}{Q} = \frac{\mu(t)}{\mu_0}\lambda(t)\sqrt{\frac{p(L,t)}{P - \dfrac{\rho f Q\,|Q|}{2DS^2}L}}, \tag{48}$$

其中$q(L,t), p(L,t)$分别为第6部分计算的流量和相应压力的最优变化值. 因此, 式(48)只含有$\mu(t), \lambda(t)$为未知量. 根据文献[24], 阀门生产厂商会给出$\mu(t)$随$\lambda(t)$变化的特性曲线. 拟合出$\lambda(t)$的变化规律$\mu(t)/\mu_0 = f(\lambda(t))$, 代入式(48), 即可知道最优的关阀相对开度曲线, 即相对开度$\lambda(t)$随时间t的演化关系.

8 结论(Conclusions)

针对水锤抑制的最优控制问题, 文中利用半离散方法离散水锤时空演化模型并采用分段一次线性控制变量参数化方法逼近流体管道末端的流量调节量(边界控制). 结合时间尺度变换方法, 将边界控制的时间切换点也当成一组优化量来考虑, 从而将控制优

化问题转为参数优化问题. 通过灵敏度分析方法, 推导出目标函数及约束的梯度形式, 完成抑制水锤的最优主动控制策略设计. 从数值仿真结果和目标函数值可以看出, 它要大大优于不采用时间尺度变换的方法, 且非常有效地抑制水锤效应. 时间尺度变换的引入会增加数值计算量, 因此下一步研究快速计算灵敏度方程方法. 具体包括采用并行计算构架和硬件电路设计(field programmable gate array, FPGA)来加快灵敏度方程计算[25]. 水锤模型本质上是非线性偏微分方程模型, 考虑这类无限维系统的模型预测控制[26]和迭代学习控制[27]也是研究的重点. 本文侧重非线性水锤模型开环控制器的设计, 然而在流体管道运行过程中, 各种干扰因素存在. 因此, 设计流体管道闭环控制器和分析控制算法鲁棒性非常重要. 针对优化算法陷入局部最优的问题, 采用深度学习策略对不同的初始值、最优控制序列和最优值进行学习, 从而在搜索最优的过程中尽可能找到全局最优解. 此外, 目前团队正开始搭建流体管道测控平台以及开发基于LabVIEW 的管控平台, 为下一步实验验证做准备. 团队长期的计划就是将抑制水锤的优化算法应用到实际中去.

参考文献(References):

[1] JIN Zhui, JIANG Naichang, WANG Xing, et al. *Pump Water Hammer and Its Protection* [M]. Beijing: China Construction Industry Press, 2004.
(金锥, 姜乃昌, 汪兴, 等. 停泵水锤及其防护 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2004.)

[2] WANG Ting. Water hammer prevention project application [J]. *City and Town Water Supply*, 2014, 1(15): 22 – 24.
(王挺. 水锤预防工程实例应用 [J]. 城镇供水, 2014, 1(15): 22 – 24.)

[3] ZHU Ming. Analysis for and prevent from water hammer in petrochemical plants [J]. *Guangdong Chemical Industry*, 2013, 40(6): 141 – 143.
(朱明. 石油化工企业管道水锤现象分析与防护 [J]. 广东化工, 2013, 40(6): 141 – 143.)

[4] XU C, DONG Y, REN Z, et al. Sensor deployment for pipeline leakage detection via optimal boundary control strategies [J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2015, 11(1): 199 – 216.

[5] LECOURT R, STEELANT J. Experimental investigation of water hammer in simplified feed lines of satellite propulsion systems [J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2007, 23(6): 1214 – 1224.

[6] NIELACNY M. Model of the water-hammer effect considering a spring safety valve [J]. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 2004, 54(1): 25 – 40.

[7] JUNG B S, KARNEY B W. Optimum selection of hydraulic devices for water hammer control in the pipeline systems using genetic algorithm [C] //*Proceedings of the 4th Joint Fluids Summer Engineering Conference*. Hawaii, USA: ASME, 2003: 2877 – 2883.

[8] BASTIN G, CORON J M. *Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems* [M]. Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

[9] PHAM V T, GEORGES D, BESANCON G. Predictive control with guaranteed stability for water hammer equations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(2): 465 – 470.

[10] CEN L, XI Y, LI D, et al. Boundary feedback control of open canals with a riemann invariants approach [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2015, 37(7): 900 – 908.

[11] GAO Hongxia, ZHAO Zhijia, WU Xinsheng, et al. Robust boundary control for flexible fluid-transporting marine riser based on internal fluid dynamics [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 785 – 791.
(高红霞, 赵志甲, 吴忻生, 等. 基于内流动力学的海洋输油柔性立管鲁棒边界控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 785 – 791.)

[12] VAZQUEZ R, CORON J, KRSTIC M, et al. Local exponential H^2 stabilization of a 2×2 quasilinear hyperbolic system using backstepping [J]. *SIAM Journal on Control & Optimization*, 2012, 51(3): 2005 – 2035.

[13] CAO Huizhe, HE Zhihong, HE Zhongyi. The analytic research on the wave process and optimal control of water hammer in pipes [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(6): 22 – 26.
(曹慧哲, 贺志宏, 何钟怡. 有压管道水击波动过程及优化控制的解析研究 [J]. 工程力学, 2008, 25(6): 22 – 26.)

[14] KOU Y, YANG J, KOU Z. A water hammer protection method for mine drainage system based on velocity adjustment of hydraulic control valve [J]. *Shock and Vibration*, 2015, 2016(1): 1 – 13.

[15] DJEBEDJIAN B, MOHAMED M S, MONDY A G, et al. Cost optimization of water distribution systems subjected to water hammer [C] //*Thirteenth International Water Technology Conference*. Hurghada, Egypt: IWTC, 2009: 491 – 513.

[16] AXWORTHY D H, KARNEY B W. Valve closure in graph-theoretical models for slow transient network analysis [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2000, 126(4): 304 – 309.

[17] CHEN T, XU C, LIN Q, et al. Water hammer mitigation via PDE-constrained optimization [J]. *Control Engineering Practice*, 2015, 45(2): 54 – 63.

[18] BAZARGANLARI M R, KERACHIAN R, AFSHAR H, et al. Developing an optimal valve closing rule curve for real-time pressure control in pipes [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2013, 27(1): 215 – 225.

[19] WANG Guizeng, YE Hao. *Leak Detection and Location of Fluid Transportation Pipeline* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2010.
(王桂增, 叶昊. 流体输送管道的泄漏检测与定位 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.)

[20] DING Y, WANG S. Optimal control of open-channel flow using adjoint sensitivity analysis [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2006, 132(11): 1215 – 1228.

[21] LIANG Haiyan, REN Zhigang, XU Chao, et al. Optimal homing trajectory design for parafoil systems using sensitivity analysis approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(8): 1003 – 1011.
(梁海燕, 任志刚, 许超, 等. 翼伞系统最优归航轨迹设计的敏感度分析方法 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(8): 1003 – 1011.)

[22] LIN Q, LOXTON R, TEO K L. The control parameterization method for nonlinear optimal control: a survey [J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2014, 10(1): 275 – 309.

[23] WANG Xingdan, YAO Yu, GUO Jian. Parameter sensitivity analysis for nonlinear terminal guidance system [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(4): 486 – 492.
(王杏丹, 姚郁, 郭健. 非线性末制导系统参数灵敏度分析 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(4): 486 – 492.)

[24] CAO H, WANG F, FENG J, et al. Optimal control of the valve based on traveling wave method in the water hammer process [C] //*Proceedings of the 6th International Conference on Fluid Mechanics*. Guangzhou, China: AIP, 2011: 436 – 440.

[25] YANG N, LI D, ZHANG J, et al. Model predictive controller design and implementation on FPGA with application to motor servo system [J]. *Control Engineering Practice*, 2012, 20(11): 1229 – 1235.

[26] HE Defeng, DING Baocang, YU Shuyou. Review of fundamental properties and topics of model predictive control for nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 273 – 287.
(何德峰, 丁宝苍, 于树友. 非线性系统模型预测控制若干基本特点与主题回顾 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(3): 273 – 287.)

[27] DAI Xisheng, TIAN Senping. Iterative learning control for first order strong hyperbolic distributed parameter systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1086 – 1089.
(戴喜生, 田森平. 一阶强双曲分布参数系统的迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1086 – 1089.)

附录 $A, \boldsymbol{a}, B, \boldsymbol{b}$的具体形式(Appendix Values of $A, \boldsymbol{a}, B, \boldsymbol{b}$)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N},$$

$$A_{12} = \frac{\rho c^2}{S\Delta L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

$$A_{21} = \frac{S}{\rho\Delta L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

$$\boldsymbol{a} = [0 \cdots -\frac{\rho c^2}{S\Delta L}\, 0 \cdots 0]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2N},$$

$$\boldsymbol{b} = [0 \cdots 0\, \frac{S}{\rho\Delta L} \cdots 0]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2N},$$

$$B = -\frac{f}{2DS} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N},$$

其中I是$N \times N$的单位矩阵.

作者简介:

陈特欢 (1988–), 男, 讲师, 目前研究方向为流体管道最优控制, E-mail: chentehuan@nbu.edu.cn;

任志刚 (1987–), 男, 博士, 目前研究方向为分布参数系统最优控制, E-mail: renzhigang@zju.edu.cn.