

线性时变系统有限时间稳定性分析

陈志华^{1†}, 解永春^{1,2,3}

(1. 北京控制工程研究所, 北京 100190; 2. 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190;

3. 天津市微重力环境模拟技术重点实验室, 天津 300301)

摘要: 针对一般非线性时变系统的有限时间稳定性分析问题, 考虑到系统初始时刻在有限时间区间内的变化, 本文分别提出了一般非线性时变系统的一致有限时间稳定性、一致收缩稳定性和固定调节时间一致收缩稳定性定义. 针对一类线性时变系统, 基于计算系统的所有轨线的包线的思想, 本文分别给出了判定该类系统的收缩稳定性、固定调节时间收缩稳定性、一致有限时间稳定性、一致收缩稳定性、固定调节时间一致收缩稳定性的充分必要条件, 同时给出了判定该类系统一致收缩稳定性及固定调节时间一致收缩稳定性的 3 个充分条件. 进一步, 本文将所得定理结果推广到了周期线性时变系统, 所得结论为判定周期线性时变系统关于任意初始时刻的一致有限时间稳定性、一致收缩稳定性及固定调节时间一致收缩稳定性提供了理论依据. 最后, 以 4 个数值算例和两航天器相对运动过程为例验证了本文结果的正确性.

关键词: 线性时变系统; 一致; 有限时间稳定; 收缩稳定; 调节时间; 包线

引用格式: 陈志华, 解永春. 线性时变系统有限时间稳定性分析. 控制理论与应用, 2018, 35(4): 485–496

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Finite time stability analysis of the linear time-varying systems

CHEN Zhi-hua^{1†}, XIE Yong-chun^{1,2,3}

(1. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;

2. Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China;

3. Tianjin Key Laboratory of Microgravity and Hypogravity Environment Simulation Technology, Tianjin 300301, China)

Abstract: Considering the problem of the finite time stability analysis of the general nonlinear time-varying system with its initial time varying in a finite interval of time, the paper proposes the concepts of uniform finite time stability, uniform contractive stability and uniform contractive stability with fixed settling time, respectively. For a class of linear time-varying (LTV) systems, by computing the envelope of all of its trajectories, the corresponding sufficient and necessary decision theorems for its contractive stability, contractive stability with fixed settling time, uniform finite time stability, uniform contractive stability and uniform contractive stability with fixed settling time are derived respectively. Moreover, three sufficient decision theorems for the uniform contractive stability and uniform contractive stability with fixed settling time of the LTV systems are also proposed. Further, the obtained theorems are generalized to the periodic LTV system, and the generalized results provide theoretical basis for deciding the uniform finite time stability, uniform contractive stability and uniform contractive stability with fixed settling time of the periodic LTV system with respect to arbitrary initial time. Finally, four numerical examples and an example about relative motion process of two spacecraft are given to verify the correctness of the obtained results.

Key words: linear time-varying system; uniform; finite time stability; contractive stability; settling time; envelope

Citation: CHEN Zhihua, XIE Yongchun. Finite time stability analysis of the linear time-varying systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(4): 485–496

1 引言(Introduction)

在以往的系统稳定性理论研究中, Lyapunov 稳定性理论占据了主导地位. 众所周知, Lyapunov 稳定性

关注系统在无穷时间区间上的动态行为. 然而, 实际应用中不少系统是工作在有限时间区间上的, 如导弹飞行全程、卫星变轨过程、两航天器交会对接过程^[1]

收稿日期: 2017-06-14; 录用日期: 2017-12-12.

[†]通信作者. E-mail: chen_zhihua@126.com; Tel.: +86 10-68378682.

本文责任编辑: 段志生.

国家重点基础研究发展计划“973”项目(2013CB733100), 国家自然科学基金重点项目(61333008)资助.

Supported by the National Key Basic Research and Development Program “973” (2013CB733100) and the State Key Program of National Natural Science of China (61333008).

等. 对于这类系统, 通常要求其在有限的工作时间区间内满足正常工作所需的性能指标即可. 这时系统不一定是Lyapunov稳定的, 而有限时间稳定性(finite time stability, FTS)的概念, 即要求系统从设定界限 α 出发的状态在有限时间内不超过设定界限 $\beta(> \alpha)$, 刚好能刻画在有限时间区间内工作的系统对于稳定性的要求条件.

Kamenkov在1953年首次提出了有限时间稳定性概念^[2], 经过其后60多年的发展, 有限时间稳定性研究已取得了大量结果^[3-9], 如文献[7-8]研究了正切换系统的有限时间稳定性, 文献[9]研究了变体飞行器姿态控制系统的有限时间稳定性. 注意到现有文献[10]中还有另一种有限时间稳定性定义, 文献[10]提出的有限时间稳定性定义要求系统是Lyapunov稳定的, 而在本文讨论的FTS定义中则没有这一要求.

针对线性系统的有限时间稳定性分析问题, 目前文献研究中主要采用了3种方法: 1) 计算系统的所有轨线的包线的方法^[11]; 2) 求解特定的微分线性矩阵不等式(differential linear matrix inequality, DLMI)法^[12]; 3) 构造特定要求的V型函数方法^[6]. 其中, 基于计算系统的轨线包线的方法给出的是充要条件且便于直接计算, 基于求解特定DLMI方法给出的是充分条件且可以利用数值方法求解, 而构造特定V型函数方法给出的是充分条件且存在构造相应的V型函数的困难. 针对非线性系统的有限时间稳定性分析问题, 目前文献中主要采用构造特定要求的V型函数的方法^[3-5, 13], 最终给出的是充分不必要条件. 该方法的问题在于所要求的V型函数构造困难, 难以计算且具有一定的保守性. 还有不少文献[14-16]研究了含有时滞的系统的有限时间稳定性分析问题. 针对含有时滞的线性系统, 主要研究方法是采样构造类Lyapunov函数方法^[14, 16]或者时滞依赖Lyapunov-Krasovskii泛函的方法^[15], 最终给出的都是充分条件, 因而具有不同程度的保守性. 而针对含有时滞的非线性系统, 主要研究方法是利用相关的不等式直接估计系统的解的方法^[14], 最终推导给出的也是充分条件, 且保守性的大小直接依赖具体的推导过程. 还有一些文献研究了随机系统^[6, 13]、含有不确定性的系统^[14]、含有脉冲的系统^[17]、分数阶系统^[18]等的有限时间稳定性分析问题.

实际应用中, 通常希望系统在有限的工作时间内不仅是有限时间稳定, 而且要求具有类似渐近稳定的性能, 而收缩稳定性(contractive stability, CS)^[3, 19-20]概念(或称有限时间收缩稳定性)正好可以准确地刻画这种性能要求, 即在有限时间稳定的基础上进一步要求从设定界限 α 出发的状态在有限时间内的某一时刻开始不再超过设定界限 $\gamma(< \alpha)$. 因此, 可用收缩稳定性的概念来刻画系统时域轨线在有限时间区间内的渐近行为.

关于一般非线性系统的收缩稳定性分析目前仅有少量研究结果^[3, 19-20], 且一般都采用构造特定要求的V型函数^[3, 19]或Lyapunov型函数^[20]方法给出相应的充分条件. 这些充分条件中要求的V型函数或Lyapunov型函数都存在难以构造的困难, 不利于计算且都具有一定的保守性.

关于一般非线性系统的有限时间稳定性及收缩稳定性研究中, 只有少数文献[4-6]提及了一致有限时间稳定性分析问题. 这些文献给出的一致有限时间稳定性定义均要求对于整个工作时间范围 $[t_0, t_0 + T)$ 内的任意时刻 $\tau \in [t_0, t_0 + T)$, 系统在 $[\tau, t_0 + T)$ 上有限时间稳定. 因此当 $\tau \rightarrow t_0 + T$ 时, 系统启动至终止的工作持续时间长度 $t_0 + T - \tau \rightarrow 0$, 这是不符合实际的. 而在实际应用中, 系统工作启动的初始时刻 t_0 难免存在偏差^[21], 故在实际应用中的合理要求便是允许 t_0 在一定的时间区间 T_0 内变化, 这就自然产生了研究系统的有限时间稳定性或收缩稳定性关于区间 T_0 上的所有初始时刻 t_0 一致的问题. 因此, 如何合理地刻画系统的一致有限时间稳定性和一致收缩稳定性便成了本文研究的出发点.

尽管上述关于系统的有限时间稳定性分析的研究已经取得了不少结果, 但如何更合理地刻画系统的有限时间稳定性关于初始时刻 t_0 的一致性, 如何更简便地分析系统的有限时间稳定性仍然是需要继续研究的问题. 相比于上述研究文献, 本文的贡献主要体现在3方面:

1) 针对一般非线性时变系统的有限时间稳定性关于在有限区间 T_0 内变化的初始时刻 t_0 的一致问题, 提出了一致有限时间稳定性, 一致收缩稳定性以及固定调节时间一致收缩稳定性概念. 与已有定义^[4-6]的不同之处在于本文定义中系统的整个工作持续时间长度 T 保持不变.

2) 针对一类线性时变(linear time-varying, LTV)系统, 基于计算系统的轨线包线的思想^[11, 22], 给出了其收缩稳定, 固定调节时间收缩稳定, 一致有限时间稳定, 一致收缩稳定及固定调节时间一致收缩稳定的充分必要条件, 以及一致收缩稳定和固定调节时间一致收缩稳定的充分条件. 其中判定该类系统收缩稳定性和固定调节时间收缩稳定性的充分必要条件便于直接数值计算, 且比已有方法^[19-20]的保守性小, 克服了基于V型函数判定方法^[3, 5]要求构造特定V型函数的困难.

3) 将针对LTV系统的定理结果推广到了周期LTV系统, 所得结论为判定周期LTV系统关于任意初始时刻的一致有限时间稳定性, 一致收缩稳定性及固定调节时间一致收缩稳定性提供了理论依据.

本文后续内容安排如下: 第2节给出了相关预备知识, 包括相关知识及符号说明, 并提出了针对一般非线性时变系统的一致有限时间稳定性, 一致收缩稳定性和固定调节时间一致收缩稳定性概念, 同时给出了

本文研究的问题描述, 以及用到的相关引理; 第3节给出了线性时变系统的一致有限时间稳定性, (一致)收缩稳定性及固定调节时间(一致)收缩稳定的判定定理; 第4节给出了5个算例, 检验了本文结果的正确性; 第5节给出了本文结论.

本文用到的一些符号: $\mathbb{R}$ 表示全体实数集合; $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实向量集合; I_n 代表 n 阶单位矩阵; A^T 代表矩阵 A 的转置; $\lambda_{\max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大特征值; $A > 0$ 表示矩阵 A 是正定矩阵; $\forall$ 表示任意.

2 预备知识(Preliminary results)

2.1 相关知识(Related knowledge)

实矩阵的两个性质:

1) 设 $A = A^T > 0$, 则存在矩阵 $B = B^T > 0$, 使得 $A = B^2$;

2) 设 $A = A^T$, 则 A 的Rayleigh商 $R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ 具有性质: $\max_{x \neq 0} R(x) = \lambda_{\max}(A)$.

2.2 有限时间稳定性概念(Concepts about finite time stability)

对于如下式(1)形式的一般非线性系统:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1)$$

其中: 系统状态变量 $x(t) = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, 向量场 $f: \mathbb{R}^n \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$. 设 $f(t, x)$ 在某个区域 $G \subseteq \mathbb{R}^n \times J$ 内可测, 且对于任意有界闭域 $D \subseteq G$, 存在一个可积函数 $M(t)$, 使得 $\|f(t, x)\| \leq M(t)$ 在 D 内几乎处处成立^[5].

针对非线性系统(1), 下面将提出一致有限时间稳定性、一致收缩稳定性及固定调节时间一致收缩稳定性的定义. 现有文献中已经给出了系统(1)的有限时间稳定性(finite time stable, FTS)、收缩稳定性(contractively stable, CS)及固定调节时间收缩稳定性(contractively stable with fixed settling time, CSWFS)这3个概念, 为了内容的完整性, 这里再次列出.

定义1 在有限工作时间区间 $[t_0, t_0 + T]$ 上, 其中: $t_0, T > 0$ 分别称为工作初始(启动)时刻和工作持续时间长度, 加权矩阵 $\Gamma = \Gamma^T > 0$, $A = A^T > 0$, 称系统(1)相对于给定的参数分别是:

有限时间稳定(FTS)^[3-5, 12, 19-20]: 即如果对于给定的参数 $(\lambda, A, \Gamma, A, T, t_0)$, $0 < \lambda < A$, 对于工作初始时刻 t_0 , 可由 $x_0^T \Gamma x_0 \leq \lambda$ 得出 $x^T(t) A x(t) < A$, 对 $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ 成立.

收缩稳定(CS)^[3, 19-20]: 即若对于给定参数 $(\lambda, A, \Gamma, A, T, t_0)$, $0 < \epsilon < \lambda < A$, 对于工作初始时刻 t_0 , 存在 $T_s = T_s(t_0, A, \epsilon)$ 满足 $T_s < T$, 且可由 $x_0^T \Gamma x_0 \leq \lambda$ 得出 $x^T(t) A x(t) < A$, 对于 $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ 成立; 且 $x^T(t) A x(t) < \epsilon$, 对于 $\forall t \in (t_0 + T_s, t_0 + T]$ 成立.

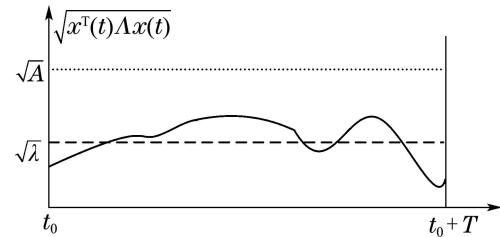
固定调节时间收缩稳定(CSWFS)^[19-20]: 即如果

对于给定的参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, A, T, t_0, \tau_s)$, $0 < \epsilon < \lambda < A$, 对工作初始时刻 $t_0, \tau_s \in [0, T]$ 为指定的固定调节时间, 由 $x_0^T \Gamma x_0 \leq \lambda$ 可得 $x^T(t) A x(t) < A$, 对于 $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ 成立; 且 $x^T(t) A x(t) < \epsilon$, 对 $\forall t \in (t_0 + \tau_s, t_0 + T]$ 成立.

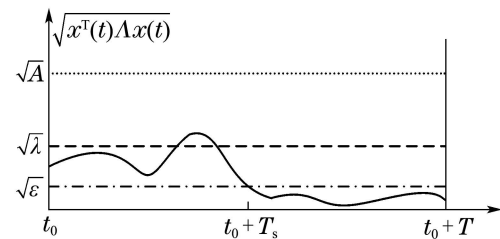
有限时间不稳定(FTUS)^[3, 5]: 即如果不满足有限时间稳定性定义的条件.

注1 相比收缩稳定性, 固定调节时间收缩稳定性直接指定了一个调节时间 τ_s .

图1为有限时间稳定性和收缩稳定性的示意图.



(a) 有限时间稳定性



(b) 收缩稳定性

图1 有限时间稳定性与收缩稳定性示意图

Fig. 1 Sketch map of FTS and CS

为研究初始时刻 t_0 在有限时间区间 $T_0(t_0 \in T_0)$ 上变化时的有限时间稳定性的相关问题, 提出了一致有限时间稳定性, 一致收缩稳定性和固定调节时间的一致收缩稳定性的定义.

定义2 在有限工作时间区间 $[t_0, t_0 + T]$ 上, 其中: $t_0 \in T_0$, $T_0 = [T_{01}, T_{02}] \subseteq \mathbb{R}$, $T > 0$ 分别称为工作初始(启动)时刻, 工作初始时刻区间范围和工作持续时间长度, 加权矩阵 $\Gamma = \Gamma^T > 0$, $A = A^T > 0$, 称系统(1)相对于给定的参数分别是:

一致有限时间稳定(uniformly FTS, UFTS): 即如果对于给定参数 $(\lambda, A, \Gamma, A, T, T_0)$, $0 < \lambda < A$, 对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 可由 $x_0^T \Gamma x_0 \leq \lambda$ 得出 $x^T(t) A x(t) < A$, 对 $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ 成立.

一致收缩稳定(uniformly CS, UCS): 即若对于给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, A, T, T_0)$, $0 < \epsilon < \lambda < A$, 对于任意工作初始时刻 $t_0 \in T_0$, 存在独立于 t_0 的 $T_s = T_s(A, \epsilon) \in [0, T]$, 且可由 $x_0^T \Gamma x_0 \leq \lambda$ 得出 $x^T(t) A x(t) < A$, 对于 $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ 成立; 且 $x^T(t) A x(t) < \epsilon$, 对于 $\forall t \in (t_0 + T_s, t_0 + T]$ 成立.

固定调节时间一致收缩稳定(uniformly CSWFS, UCSWFS): 即若对于给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0, \tau_s)$, $0 < \epsilon < \lambda < A$, $\tau_s \in [0, T)$ 为指定的固定调节时间, 对任意工作初始时刻 $t_0 \in T_0$, 可由 $\mathbf{x}_0^T \Gamma \mathbf{x}_0 \leq \lambda$ 得出 $\mathbf{x}^T(t) \Lambda \mathbf{x}(t) < A$, 对于 $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ 成立; 且 $\mathbf{x}^T(t) \Lambda \mathbf{x}(t) < \epsilon$, 对于 $\forall t \in (t_0 + \tau_s, t_0 + T]$ 成立.

注2 这里提出的一致有限时间稳定性, 一致收缩稳定性及固定调节时间一致收缩稳定性均是定义在有限时间区间范围内的, 故统称为有限时间稳定性.

2.3 问题描述(Problem formulation)

考虑式(2)表示的LTV系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

其中: 状态变量 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, 系统矩阵 $A(t)$ 的任一元素 $a_{ij}(t)$ 均为关于时间 t 的分段连续实值函数, 且在任意有界区间上有界且至多包含有限多个不连续点, 其中 $i, j = 1, \dots, n$.

注3 上述条件保证了在任意有界闭区间上, 系统(2)的解是存在唯一的^[23].

考虑区域

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}_0^T \Gamma \mathbf{x}_0 \leq \rho_0^2\} \quad (3)$$

和

$$E_t = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T(t) \Lambda \mathbf{x}(t) \leq \rho(t)^2\}, \quad (4)$$

其中: 矩阵 $\Gamma = \Gamma^T > 0$, $\Lambda = \Lambda^T > 0$, 常数 $\rho_0 > 0$, $\rho(t)$ 为一连续函数, 满足 $\rho(t) > 0$, $\forall t \geq t_0$, 且 $\rho(t_0) \geq \rho_0 \sqrt{\lambda_{\max}(\Gamma^{-\frac{1}{2}} \Lambda \Gamma^{-\frac{1}{2}})}$.

注4 由预备知识给出的实矩阵性质1和2可得

$$\max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} \mathbf{x}_0^T \Gamma \mathbf{x}_0 = \rho_0^2 \lambda_{\max}(\Gamma^{-\frac{1}{2}} \Lambda \Gamma^{-\frac{1}{2}}).$$

下面给出本文主要研究内容的问题描述.

问题 当给定系统(2)及相关参数 $\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, t_0, T_0, \tau_s$ 时, 研究分别在什么条件下系统(2)一致有限时间稳定, (一致)收缩稳定及固定调节时间(一致)收缩稳定.

2.4 相关引理(Related lemmas)

引理1^[11,22] 考虑系统(2), 设 t_0 为工作初始时刻, 初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \Omega_0$, 工作持续时间为 T , 则 $\mathbf{x}(t) \in E_t$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ 的充分必要条件为

$$\rho(t) \geq M(t, t_0, \rho_0),$$

其中 $M(t, t_0, \rho_0) \triangleq \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(X(t, t_0))$, 下文同此, 且矩阵 $X(t, t_0)$ 为矩阵微分方程(5)的解.

$$\begin{cases} \frac{\partial X(t, t_0)}{\partial t} = (\Lambda^{\frac{1}{2}})A(t)(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{-1}X(t, t_0) + \\ \quad X(t, t_0)(\Lambda^{\frac{1}{2}})A(t)^T(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{-1}, \\ X(t_0, t_0) = \Lambda^{\frac{1}{2}}\Gamma^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (5)$$

且 $X(t, t_0)$ 具体为式(6)所示:

$$X(t, t_0) = (\Lambda^{\frac{1}{2}})\Phi(t, t_0)\Gamma^{-1}\Phi^T(t, t_0)(\Lambda^{\frac{1}{2}}). \quad (6)$$

注5 1) 可以根据文献[11]或文献[22]的思路证明引理1, 不再详细给出. 2) 引理1说明系统(2)的轨线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ 构成的集合 $\{\mathbf{x}^T \Lambda \mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0 \in \Omega_0\}$ 的边界 $\max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} \mathbf{x}^T \Lambda \mathbf{x}$ 必定由区域(3)边界上的初值点取到. 即当系统(2)初值范围取在区域(3)内时, 其所有轨线 $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ 的边界(即系统(2)的所有轨线的包线)就是 $M(t, t_0, \rho_0)$.

引理2^[11] 给定参数 $(\lambda, A, \Gamma, \Lambda, T, t_0)$, $0 < \lambda = \rho_0^2 < A$, 则系统(2)有限时间稳定的充分必要条件为

$$\rho_M < A^{1/2},$$

其中 $\rho_M \triangleq \max_{[t_0, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0)$, 下文 ρ_M 含义同此.

引理3 设系统(2)为周期 $T_{\text{sys}} > 0$ 的系统, 给定参数 $(\lambda, A, \Gamma, \Lambda, T)$, $0 < \lambda = \rho_0^2 < A$. 若 $t_{02} = t_{01} + T_{\text{sys}}$, $t_{01}, t_{02} \in \mathbb{R}$, 则有

$$M(t, t_{01}, \rho_0) = M(t + T_{\text{sys}}, t_{02}, \rho_0),$$

对任意 $t \in [t_{01}, t_{01} + T]$ 成立. 证明见附录A1.

3 主要结果(Main results)

下面给出判定系统(2)一致有限时间稳定、(一致)收缩稳定、固定调节时间(一致)收缩稳定的充分必要条件. 这些定理均可根据相应的定义, 结合引理1和引理2给出证明.

3.1 充分必要判定定理(Sufficient and necessary decision theorems)

定理1 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, t_0)$, $0 < \lambda = \rho_0^2 < A$ 及 $\epsilon < \lambda$, 则系统(2)收缩稳定的充分必要条件为: 对于初始时刻 t_0 , 有 $\rho_M < A^{1/2}$, 且存在某一时刻 $t^* \in [t_0, t_0 + T)$, 使得

$$\max_{(t^*, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2}.$$

证明见附录A2.

定理2 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, t_0, \tau_s)$, $0 < \lambda = \rho_0^2 < A$ 及 $\epsilon < \lambda$, $\tau_s \in [0, T)$, 则系统(2)固定调节时间收缩稳定的充分必要条件为: 对于初始时刻 t_0 , 有 $\rho_M < A^{1/2}$, 且

$$\max_{(t_0+\tau_s, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2}.$$

证明类似定理1, 略去.

注6 定理1和定理2为采用数值计算方法研究系统(2)的(固定调节时间)收缩稳定性提供了理论依据. 即只需基于方程(5)数值计算得到曲线 $M(t, t_0, \rho_0)$, 再根据定理1和定理2, 即可直接判定系统的(固定调节时间)收缩稳定性.

定理3 给定参数 $(\lambda, A, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, $0 < \lambda = \rho_0^2 < A$, 则系统(2)一致有限时间稳定的充分必要条件

为: 对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有 $\rho_M < A^{1/2}$. 证明类似定理1, 略去.

定理4 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, $0 < \lambda = \rho_0^2 < A$ 及 $\epsilon < \lambda$, 则系统(2)一致收缩稳定的充分必要条件为: 对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有 $\rho_M < A^{1/2}$, 且存在某一时刻 $t^* = t^*(A, \epsilon, t_0) \in [t_0, t_0 + T]$, 满足 $t^* - t_0$ 独立于 t_0 , 使得

$$\max_{(t^*, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2}.$$

证明类似定理1, 略去.

定理5 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0, \tau_s)$, $0 < \lambda = \rho_0^2 < A$ 及 $\epsilon < \lambda$, 则系统(2)固定调节时间一致收缩稳定的充分必要条件为: 对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有 $\rho_M < A^{1/2}$, 且

$$\max_{(t_0+\tau_s, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2}.$$

证明类似定理1, 略去.

注7 定理3、定理4和定理5分别为判定系统(2)的非一致有限时间稳定性, 非(固定调节时间)一致收缩稳定性提供了充分性判据. 即对于某个 $t_0 \in T_0$, 通过数值计算得到曲线 $M(t, t_0, \rho_0)$, 若发现其不满足相应定理的条件即可得出相应结论.

3.2 充分判定定理(Sufficient decision theorems)

针对系统(2), 下面给出其一致收缩稳定及固定调节时间一致收缩稳定的充分判定定理.

定理6 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, $0 < \epsilon < \lambda = \rho_0^2 < A$, $T > 0$, 则系统(2)一致收缩稳定的充分不必要条件为: 存在常数 $\xi > 0$, 满足 $\xi > (\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln(1 + T)$, 使得对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_\xi = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) < A^{1/2},$$

其中: $Y(t, t_0) = f(t, t_0)X(t, t_0)$, $X(t, t_0)$ 同式(6), 且对于任意 $t \geq t_0$, 函数 $f(t, t_0) \geq h_1(t, t_0)$, 且 $h_1(t, t_0) = \xi \ln(1 + t - t_0) + 1$. 证明见附录A3.

推论1 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0, \tau_s)$, $0 < \epsilon < \lambda = \rho_0^2 < A$, $\tau_s > 0$, 则系统(2)固定调节时间一致收缩稳定的充分不必要条件为: 存在常数 $\xi > 0$, 满足 $\xi > (\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln(1 + \tau_s)$, 使得对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_\xi = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) < A^{1/2},$$

其中: $Y(t, t_0) = f(t, t_0)X(t, t_0)$, $X(t, t_0)$ 同式(6), 且对于任意 $t \geq t_0$, 函数 $f(t, t_0) \geq h_1(t, t_0)$, 且 $h_1(t, t_0) = \xi \ln(1 + t - t_0) + 1$. 证明类似定理6, 略去.

定理7 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, $0 < \epsilon < \lambda = \rho_0^2 < A$, $A > 4\epsilon$, $T > 1$, 则系统(2)一致收缩稳定的充分不必要条件为: 存在常数 $\xi > 0$, 满足 $\xi >$

$\ln(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln T$, 使得对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_\xi = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) < A^{1/2},$$

其中: $Y(t, t_0) = f(t, t_0)X(t, t_0)$, $X(t, t_0)$ 同式(6), 且对于任意 $t \geq t_0$, 函数 $f(t, t_0) \geq h_2(t, t_0)$, 且 $h_2(t, t_0) = (t - t_0)^\xi + 1$. 证明见附录A4.

推论2 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0, \tau_s)$, $0 < \epsilon < \lambda = \rho_0^2 < A$, $A > 4\epsilon$, $\tau_s > 1$, 则系统(2)固定调节时间一致收缩稳定的充分不必要条件为: 存在常数 $\xi > 0$, 满足 $\xi \geq \ln(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln \tau_s$, 使得对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_\xi = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) < A^{1/2},$$

其中: $Y(t, t_0) = f(t, t_0)X(t, t_0)$, $X(t, t_0)$ 同式(6), 且对于任意 $t \geq t_0$, 函数 $f(t, t_0) \geq h_2(t, t_0)$, 且 $h_2(t, t_0) = (t - t_0)^\xi + 1$. 证明类似定理7, 略去.

定理6与定理7分别刻画了系统轨线增长速度不超过对数函数及幂函数的吸引情形, 但一般LTV系统轨线的吸引形式则是多样的^[24]. 系统轨线吸引的一种典型情形便是指数吸引形式, 下面给出的定理8便是系统轨线是指数吸引时判定其一致收缩稳定性的充分条件.

定理8 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, $0 < \epsilon < \lambda = \rho_0^2 < A$, $T > 0$, 则系统(2)一致收缩稳定的充分不必要条件为: 存在常数 $\xi > \ln(A/\epsilon)/2T$, 使得对任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_\xi = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) < A^{1/2},$$

其中: $Y(t, t_0) = h_3(t, t_0)X(t, t_0)$, $X(t, t_0)$ 同式(6), $h_3(t, t_0) = e^{2\xi(t-t_0)}$. 证明见附录A5.

推论3 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, $0 < \epsilon < \lambda = \rho_0^2 < A$, $\tau_s > 0$, 则系统(2)固定调节时间一致收缩稳定的充分不必要条件为: 存在常数 $\xi > 0$, 满足 $\xi > \ln(A/\epsilon)/2\tau_s$, 使得对任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_\xi = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) < A^{1/2},$$

其中: $Y(t, t_0) = h_3(t, t_0)X(t, t_0)$, $X(t, t_0)$ 同式(6), $h_3(t, t_0) = e^{2\xi(t-t_0)}$. 证明类似定理8, 略去.

给定参数 (A, ϵ, T, t_0) , 取

$$A = 0.4, \epsilon = 0.05,$$

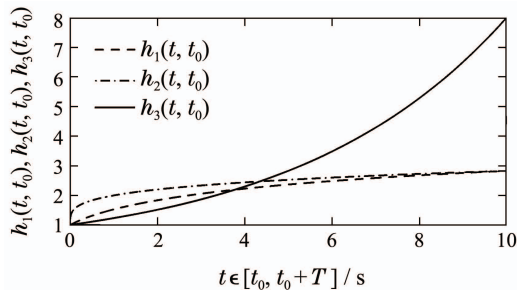
$$T = 10, t_0 = 0,$$

$$\xi_1 = (\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln(1 + T),$$

$$\xi_2 = \ln(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln T,$$

$$\xi_3 = \ln(A/\epsilon)/(2T),$$

则 $h_1(t, t_0)$, $h_2(t, t_0)$ 以及 $h_3(t, t_0)$ 的对比结果如图2所示.

图2 定理6, 7与8中函数 h_1, h_2, h_3 对比示意图Fig. 2 Comparison of h_1, h_2, h_3 in Theorem 6, 7 and 8

由图2可知, 定理6, 定理7和定理8分别代表了系统轨线的不同吸引形式, 即系统轨线的增长速度分别不超过对数函数, 幂函数以及指数函数的吸引情形, 因此各自适用的范围不同, 但都是充分不必要定理。

命题1 设系统(2)为周期系统, 其周期 $T_{\text{sys}} > 0$, 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, 且 T_0 长度大于 T_{sys} , 则下面两个表述等价:

i) 系统(2)关于 $t_0 \in T_0$ 一致有限时间稳定或(固定调节时间)一致收缩稳定。

ii) 系统(2)关于 $t_0 \in \mathbb{R}$ 一致有限时间稳定或(固定调节时间到)一致收缩稳定。

证明略去, 利用引理3并结合一致有限时间稳定性和(固定调节时间)一致收缩稳定性定义即可得出。

4 算例分析(Examples analysis)

下面通过4个数值算例, 以及两航天器相对运动的例子, 以验证本文给出的判定定理的有效性。

例1 有限时间稳定性判定

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1.5\cos^2 t & 1 - 1.5\sin t \cos t \\ -1 - 1.5\sin t \cos t & -1 + 1.5\sin^2 t \end{bmatrix}.$$

该系统取自文献[23], 给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, $\rho_0 = 1$, $\lambda = \rho_0^2$, $\epsilon = 0.1^2$, $A = 4$, $T = 10$, $\Gamma = \Lambda = I_2$, $T_0 = [0, \pi]$ 。

由于 $A(t)$ 特征值 $\sigma(A(t)) = \{-0.25 \pm 0.25\sqrt{7}j\}$, 故若采用冻结系数法将得出系统是Lyapunov渐近稳定的, 但实际上该系统是Lyapunov不稳定的[23]。

取 $t_0 = 0 \in T_0$, 由方程(5)计得到 $M(t, t_0, \rho_0)$ 如图3所示, 再由定理1即可判断系统的有限时间稳定性。

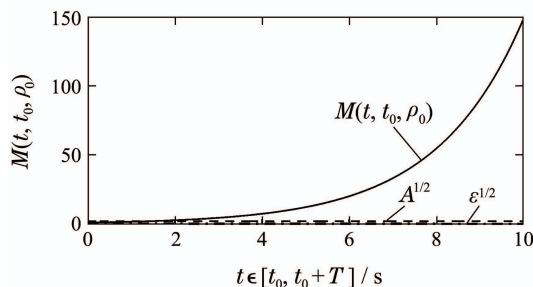


图3 例1系统轨线包线的数值计算结果

Fig. 3 Computation result of the envelope of all trajectories of the system in Example 1

由图3可知, 例1系统相对 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, t_0)$ 不是有限时间稳定的, 当然相对 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$ 也不是一致有限时间稳定的, 这说明了采用冻结系数法可能得出错误的结论。

例2 固定调节时间一致收缩稳定性判定

$$A(t) = \begin{bmatrix} -t-1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0, \tau_s)$,

$$\rho_0 = 1, \lambda = \rho_0^2, \epsilon = 0.1^2, A = 1.21,$$

$$T = 10, \Gamma = \Lambda = I_2, T_0 = [0, 2], \tau_s = 6.$$

计算可知, 系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{-0.5t^2+0.5t_0^2-t+t_0} & 0 \\ 0 & e^{-t+t_0} \end{bmatrix}$$

故 $X(t, t_0)$ 解析表达式如下:

$$X(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{-t^2+t_0^2-2t+2t_0} & 0 \\ 0 & e^{-2t+2t_0} \end{bmatrix}$$

故 $X(t, t_0)$ 的最大特征值 $\lambda_{\max} = e^{-2t+2t_0}$ 。

1) 利用推论3来研究例2系统的固定调节时间收缩稳定性。

取 $\xi = \ln(A/\epsilon)/2\tau_s = 0.3996$, 则对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$,

$$\begin{aligned} \rho_\xi &= \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) = \\ &= \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) = \\ &= \max_{t \in [t_0, t_0+T]} e^{2\xi(t-t_0)} e^{-t+t_0} = 1 < A^{1/2}, \end{aligned}$$

故根据推论3可知, 例2系统是固定调节时间一致收缩稳定的。

2) 结合定理5, 利用数值计算系统轨线包线的方法来研究例2系统的固定调节时间收缩稳定性。

任取 $t_0 = 0 \in T_0$, 图4给出了 $M(t, t_0, \rho_0)$ 数值计算结果。

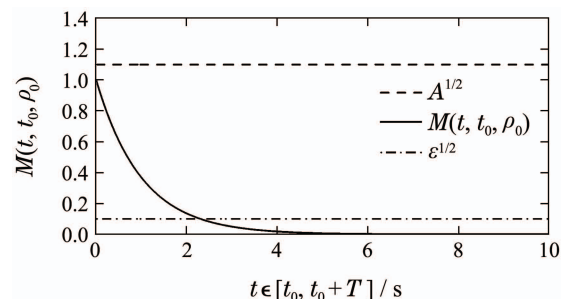


图4 例2系统轨线包线的数值计算结果

Fig. 4 Computation result of the envelope of all trajectories of the system in Example 2

由图4可知, 例2系统相对给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, t_0, \tau_s)$ 是固定调节时间收缩稳定的, 但从图4无法直

接说明该系统是固定调节时间一致收缩稳定的, 因为只研究了 $t_0 = 0$ 时的情形.

注 8 利用数值计算方法研究系统的一致有限时间稳定性, 以及(固定调节时间)一致收缩稳定性是未来继续研究方向.

例 3 一致收缩稳定性判定

$$A(t) = \sin t.$$

给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$,

$$\rho_0 = 0.2, \lambda = \rho_0^2, \epsilon = 0.1^2, A = 0.49,$$

$$T = 3\pi, \Gamma = 16, \Lambda = 1, T_0 = [0, 2\pi].$$

计算可知, 系统的状态转移矩阵为 $\Phi(t, t_0) = e^{\cos t_0 - \cos t}$, 故 $X(t, t_0)$ 解析表达式如下:

$$X(t, t_0) = e^{2\cos t_0 - 2\cos t} / 16.$$

1) 先验证定理5条件,

$$\rho_M = \max_{t \in [t_0, t_0 + T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(X(t, t_0)) \leq 0.05e^2 = 0.3695 < 0.7 = A^{1/2}.$$

但是, 对于任意 $t^* \in [t_0, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned} \max_{t_0 \in T_0} \max_{t \in [t^*, t_0 + T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(X(t, t_0)) &= \\ \max_{t_0 \in T_0} 0.05 \max_{t \in [t^*, t_0 + T]} e^{\cos t_0 - \cos t} &\geq \\ \max_{t_0 \in T_0} 0.05 e^{\cos t_0 - \cos(t_0 + T)} &= \max_{t_0 \in T_0} 0.05 e^{2\cos t_0} = \\ 0.05e^2 = 0.3695 > 0.1 = \epsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

故系统是一致有限时间稳定的, 但不是一致收缩稳定的.

2) 任取 $t_0 = 0$, 利用数值计算方法来研究其一致收缩稳定性. $M(t, t_0, \rho_0)$ 数值计算结果如图5所示.

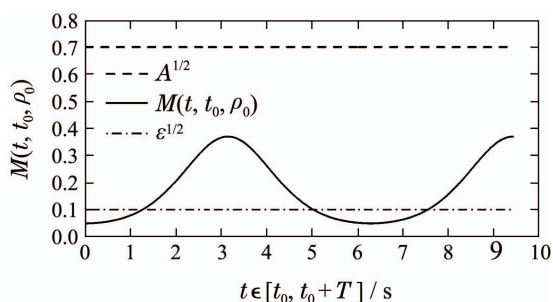


图 5 例3系统轨线包线的数值计算结果

Fig. 5 Computation result of the envelope of all trajectories of the system in Example 3

故由图5可知, 存在 $t_0 = 0 \in T_0$ 使得系统不是一致收缩稳定的, 故例3系统非一致收缩稳定.

例 4 固定调节时间收缩稳定性判定

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} -\sin t - 2 & 0 \\ 0 & -t - 1 \end{bmatrix}.$$

给定下面两组参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, t_0, \tau_s)$:

第1组: $\rho_0 = 1, \lambda = \rho_0^2, A = 1.21, \epsilon = 0.01, \Gamma = \Lambda = I_2, T = 4\pi, t_0 = 0, \tau_s = 6$.

第2组: $\rho_0 = 1, \lambda = \rho_0^2, A = 1.44, \epsilon = 1.21, \Gamma = \Lambda = I_2, T = 4\pi, t_0 = 0, \tau_s = 2$.

首先采用本文方法分析, 数值计算结果如下图6所示, 根据定理2可知, 例4系统对于给定的两组参数均是固定调节时间收缩稳定的.

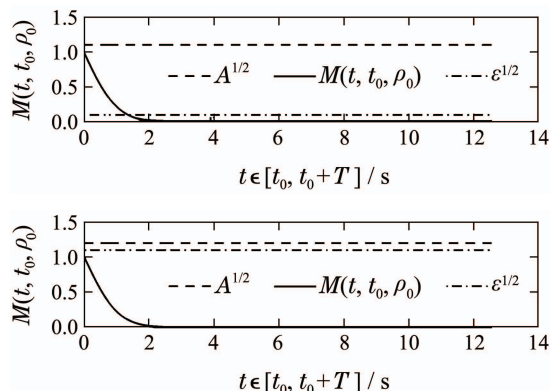


图 6 例4系统轨线包线的数值计算结果

Fig. 6 Computation results of the envelope of all trajectories of the system in Example 4

采用文献[19]中定理4及定理5分析, 对于第2组参数该文献未研究, 故下面研究第1组参数的情形.

1) 根据文献[19]中定理5, 取 $V(x) = 0.5x^T x$, $k_1 = k_2 = 0.5, k_3 = 1, a = 2$, 则可以验证例4系统相对给定参数是固定调节时间收缩稳定的.

2) 根据文献[19]中定理4, 取 $V(x) = 0.5x^T x$, 则根据定理4的条件i)和ii)可得 $\psi_1 \geq -1, \psi_2 \geq -0.01$.

取 $\psi_1 = -1$, 验证条件iii): $\int_{t_1}^{t_2} \psi_1 \leq 0 < 1.1 - 1$, 即条件iii)成立.

取 $\psi_2 = -0.01$, 验证条件iv): $\int_{\tau}^{t_0+T} \psi_1 \leq 0$, 即条件iv)成立.

验证条件v): $\int_{t_0}^{t_0+\tau_s} \psi_2 = -0.06 > 0.1 - 1$, 即条件v)不成立, 终止计算.

故按文献[19]中定理4, 取 $V(t, x) = 0.5x^T x$ 时方法失效, 需要继续寻求 $V(t, x)$.

3) 再采用文献[20]方法分析, 对于第1组参数文献[20]没研究, 故下面研究第2组参数的情形.

Step 1 将 $t = -\tau + 4\pi$ 代入例4系统得到

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} -\sin \tau + 2 & 0 \\ 0 & \tau - 4\pi - 1 \end{bmatrix}.$$

Step 2 按文献[20]中引理2检验下述条件:

在 $t \in [t_0, t_0 + \tau_s] = [0, 2]$ 上, 对于任意 $x(t) \in S_{\epsilon}(t) \triangleq \{x(t) | x^T(t)x(t) \leq \epsilon\}$, 有

$$\|A(t)x(t)\| \geq \sqrt{\epsilon} = 1.1.$$

故对于满足 $\|A(t)x(t)\| \leq g_1(t)$ 的连续函数 $g_1(t)$, 必有 $g_1(t) \geq 1.1$, 此时

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau_s} g_1(s)ds \geq 2.2 > (\epsilon - \lambda)/(2\sqrt{\epsilon}) = 0.0955,$$

即文献[20]算法要求的函数 $g_1(t)$ 不存在, 因此算法在第2步即终止, 文献[20]方法失效.

表1给出了本文方法, 与文献[19]及文献[20]方法对比结果.

表1 几种分析方法对比结果

Table 1 Comparison results of methods of this paper and the paper [19–20]

参数	本文	定理4 ^[19]	定理5 ^[19]	文献[20]
第1组	CSWFS	无法判定	CSWFS	未研究
第2组	CSWFS	未研究	未研究	失效

例5 有限时间稳定性判定.

以椭圆轨道两航天器编队相对运动(Lawden方程^[25]描述)过程为例. 考虑以椭圆轨道为参考轨道的两航天器编队, 伴随航天器相对于参考轨道的相对运动方程^[25–26]可以描述为式(7)所示的LTV系统:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), \quad (7)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & \ddot{\theta} & 0 & 0 & 2\dot{\theta} & 0 \\ -\dot{\theta} & a_{52} & 0 & -2\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (8b)$$

其中: 系统(7)的系统矩阵 $A(t)$ 为式(8a), 控制矩阵 $B(t)$ 为式(8b), 状态向量 $z(t) = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$, 控制加速度向量 $u(t) = [u_x \ u_y \ u_z]^T$, 且 $A(t)$ 的相关元素为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{n(1+e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \\ \ddot{\theta} = \frac{-2ne(1+e\cos\theta)\dot{\theta}\sin\theta}{(1-e^2)^{3/2}}, \\ a_{41} = \dot{\theta}^2 + 2n^2 \frac{(1+e\cos\theta)^3}{(1-e^2)^3}, \\ a_{52} = \dot{\theta}^2 - n^2 \frac{(1+e\cos\theta)^3}{(1-e^2)^3}, \\ a_{63} = -n^2 \frac{(1+e\cos\theta)^3}{(1-e^2)^3}, \end{cases}$$

其中: e 为椭圆轨道偏心率, $n = \sqrt{\mu/a^3}$ 为航天器沿椭圆参考轨道运行平均速率.

设定参考椭圆轨道参数^[26]: 主航天器轨道的长半

轴 $a = 9000 \text{ km}$, 轨道偏心率 $e = 0.5$, 地球引力常数 $\mu = 3.9801 \times 10^5 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$, 初始时刻伴随航天器相对于主航天器的状态(位置 m 和速度 m/s)为 z_0 , 且满足约束 $z_0^T \Gamma z_0 < \lambda$, 初始真近点角 $\theta(t_0) = 0$.

给定参数: $t_0 = 0 \text{ s}$, $T = 2000 \text{ s}$, $\tau_s = 600 \text{ s}$, $\lambda = 2000$, $\rho_0 = \sqrt{\lambda}$, $A = 4000$, $\epsilon = 100$, 加权矩阵 $\Gamma = A = \text{diag}\{0.1, 0.1, 0.1, 10, 10, 10\}$.

控制目标: 对于满足约束 $z_0^T \Gamma z_0 < \lambda$ 的任意初始状态 z_0 , 使得伴随航天器相对于主航天器的位置和速度组成的状态向量 $z(t)$ 在 $[t_0, t_0 + T]$ 上满足 $z^T \Lambda z < A$, 在 $[t_0 + \tau_s, t_0 + T]$ 上满足 $z^T \Lambda z < \epsilon$.

由 $z_0^T \Gamma z_0 < \lambda$ 可知: 初始状态 z_0 各个分量的最大取值范围分别为: $|s| \leq 141.4$, $|\dot{s}| \leq 14.14$, $s = x, y, z$.

针对相对运动方程(7), 设计PD控制律如下:

$$u_s = -k_{ps}s - k_{ds}\dot{s},$$

其中 $s = x, y, z$. 设定PD控制律参数如下:

$$(k_{px}, k_{dx}, k_{py}, k_{dy}, k_{pz}, k_{dz}) = (0.001, 0.25, 0.001, 0.25, 0.001, 0.25).$$

图7(a)中3幅子图分别表示随机生成的1000组 x, y, z 三轴的初始状态(相对位置和相对速度), 用于下面研究伴随航天器相对主航天器在随机初始状态下的运行情况.

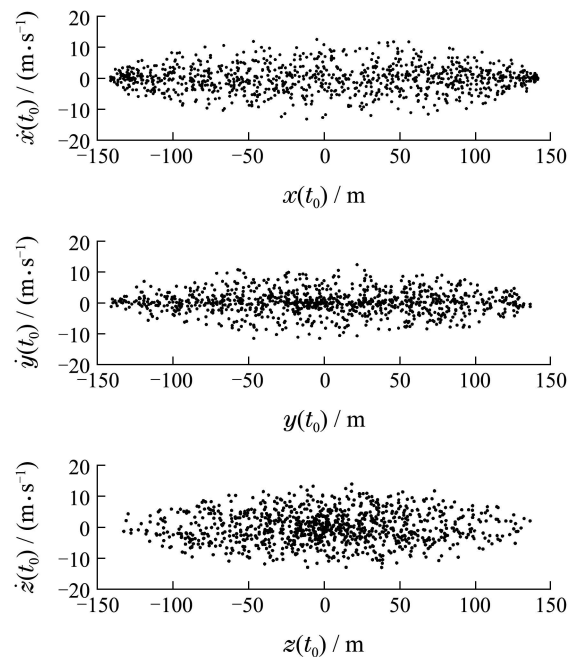


图7(a) 随机生成1000组例5系统的初值

Fig. 7(a) Stochastic generation of 1000 groups of initial values of the system in Example 5

图7(b)中两幅子图分别表示在200 s内与2000 s内, 伴随航天器在1000次随机初始状态下的运行轨迹(加权)范数 $(z(t)^T \Lambda z(t))^{1/2}$ 与本文给出的轨线包线 $M(t, t_0, \rho_0)$ 的对比结果.

由图7(b)可知系统(7)相对给定参数是固定调节时

间收缩稳定的。

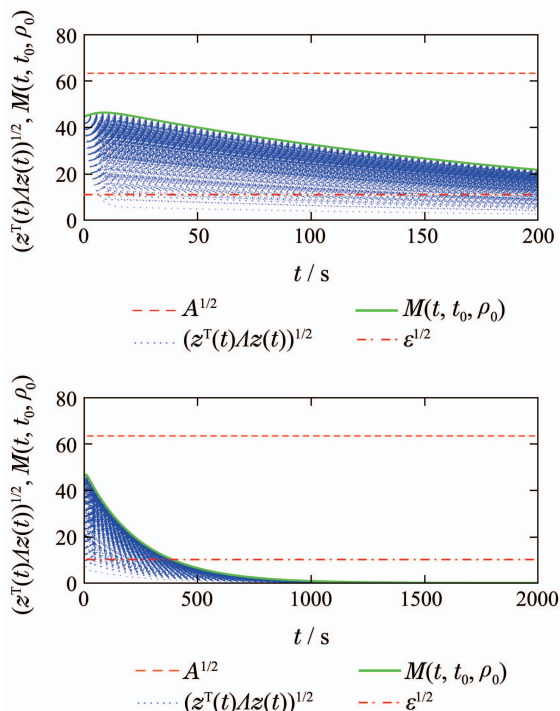


图 7(b) 例5系统轨线包线的数值计算结果

Fig. 7(b) Computation results of the envelope of all trajectories of the system in Example 5

5 结论(Conclusions)

本文研究了一般非线性时变系统的有限时间稳定性和收缩稳定性关于有限时间区间内的初始时刻 t_0 一致的描述, 提出了针对一般非线性时变系统的一致有限时间稳定性, 一致收缩稳定性和固定调节时间一致收缩稳定性概念. 进而针对一类LTV系统, 给出了该类系统一致有限时间稳定, (一致)收缩稳定及固定调节时间(一致)收缩稳定判定的充分必要条件, 以及固定调节时间(一致)收缩稳定判定的充分条件. 所得定理结果为直接采用数值计算方法来分析该类系统的(一致)有限时间稳定性, (一致)收缩稳定性及固定调节时间(一致)收缩稳定性提供了理论依据. 算例分析结果验证了本文结果的正确性, 且具有计算简便及保守性小的优点. 进一步, 将所得定理结果推广到了周期LTV系统, 所得结论为研究周期LTV系统关于 $t_0 \in \mathbb{R}$ 的一致有限时间稳定性, 一致收缩稳定性及固定调节时间一致收缩稳定性提供了理论依据.

本文结果为后续研究LTV系统的一致有限时间稳定性, 一致收缩稳定性与固定调节时间一致收缩稳定性判定的数值计算方法提供了理论依据, 具体数值计算方法将是继续研究的方向.

参考文献(References):

- [1] GUO Yong, SONG Shenmin, LI Xuehui. Attitude and orbit coupled control for non-cooperative rendezvous and docking [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(5): 638 – 644.
(郭永, 宋申民, 李学辉. 非合作交会对接的姿态和轨道耦合控制 [J]. *控制理论与应用*, 2016, 33(5): 638 – 644.)
- [2] KAMENKOV G V. On stability of motion over a finite interval of time [J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (in Russian)*, 1953, 17(2): 529 – 540.
- [3] WEISS L, INFANTE E F. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(1): 54 – 59.
- [4] WEISS L. On uniform and uniform finite time stability [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14(3): 313 – 314.
- [5] MICHEL A N, PORTER D W. Practical stability and finite-time stability for discontinuous systems [J]. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1972, 19(2): 123 – 129.
- [6] MICHEL A N, HOU L. Finite-time and practical stability of a class of stochastic dynamical systems [C] // *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: IEEE, 2008: 3452 – 3456.
- [7] LIU Zhi, ZHANG Xianfu, WANG Yuzhen. Stability and stabilization for discrete-time positive switched multiple equilibria systems on finite time intervals [J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(4): 433 – 440.
(刘志, 张宪福, 王玉振. 离散多平衡点正切换系统有限区间稳定与镇定 [J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(4): 433 – 440.)
- [8] CHEN G P, YANG Y. Finite-time stability of switched positive linear system [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(1): 179 – 190.
- [9] WANG Qing, WANG Tong, DONG Chaoyang, et al. Chained smooth switching control for morphing aircraft [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(7): 949 – 954.
(王青, 王通, 董朝阳, 等. 变体飞行器链式平滑切换控制 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(7): 949 – 954.)
- [10] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [11] GARCIA G, TARBOURIECH S, BERNUSSOU J. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 364 – 369.
- [12] AMATO F, ARIOLA M, COSENTINO C. Finite-time stability of linear time-varying systems: analysis and controller design [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 1003 – 1008.
- [13] MASTELLONE S, DORATO P, ABDALLAH C T. Finite-time stability of discrete-time nonlinear systems: analysis and design [C] // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Nassau, Bahamas: IEEE, 2004: 2572 – 2577.
- [14] SRETEN B S, DRAGUTIN L D, DRAGAN S A. Robust finite-time stability and stabilization of linear uncertain time-delay systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(5): 1548 – 1554.
- [15] ZUO Z Q, LI H C, WANG Y J. New criterion for finite-time stability of linear discrete-time systems with time-varying delay [J]. *Journal of The Franklin Institute*, 2013, 350(9): 2745 – 2756.
- [16] SRETEN B S, DRAGUTIN L D, DRAGAN S A. The application of different Lyapunov-like functionals and some aggregate norm approximations of the delayed states for finite-time stability analysis of linear discrete time-delay systems [J]. *Journal of The Franklin Institute*, 2014, 351(7): 3914 – 3931.
- [17] AMATO F, TOMMASI G D, PIRONTI A. Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical linear systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2456 – 2550.
- [18] WANG F F, CHEN D Y, ZHANG X G, et al. Finite-time stability of a class of nonlinear fractional-order system with the discrete time delay [J]. *International Journal of Systems Science*, 2017, 48(5): 984 – 993.

- [19] ONORI S, DORATO P, GALEANI S, et al. Finite time stability design via feedback linearization [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 4915 – 4920.
- [20] MARTYNYUK A A, KHOROSHUN A S. Revisiting the theory of stability over a finite interval [J]. *International Applied Mechanics*, 2014, 50(3): 335 – 340.
- [21] WU Z K, LI A. Stability and boundedness of differential equations relative to initial time difference by employing vector Lyapunov functions [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 225(12): 358 – 365.
- [22] GARCIA G, PERES P L D, TARBOURIECH S. Assessing asymptotic stability of linear continuous time-varying systems by computing the envelope of all trajectories [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 998 – 1003.
- [23] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. Third Edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011: 56 – 57, 105. (Khalil H K. 非线性系统 [M]. 第3版. 北京: 电子工业出版社, 2011: 56 – 57, 105.)
- [24] HUANG Lin. *Theoretical Foundation of Stability and Robustness* [M]. Beijing: Science Press, 2003: 263 – 264. (黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 263 – 264.)
- [25] INALHAN G, TILLERSON M, HOW J P. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, 25(1): 48 – 59.
- [26] WU Zhigang, TAN Shujun, LU Zhongji. Applying control system design toolbox-PIMCSD in solving reconfiguration of satellites formation [J]. *Computer Applications and Software*, 2009, 26(2): 4 – 8. (吴志刚, 谭述君, 陆仲绩. 应用控制系统设计工具箱PIMCSD求解卫星编队重构问题 [J]. 计算机应用与软件, 2009, 26(2): 4 – 8.)

附录A1 证明引理3 (Appendix A1 Proof of Lemma 3)

证 由题设可知 $t_{01}, t_{02} \in \mathbb{R}$, 且 $t_{02} = t_{01} + T_{\text{sys}}$. 对于任意 $t \in [t_{01}, t_{01} + T]$ 有

$$X(t, t_{01}) = X(t + T_{\text{sys}}, t_{02}),$$

则 $M(t, t_{01}, \rho_0) = M(t + T_{\text{sys}}, t_{02}, \rho_0)$.

而由系统(2)的状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 的定义可知

$$\frac{d\Phi(t, t_{01})}{dt} = A(t)\Phi(t, t_{01}), \quad (9)$$

故

$$\frac{d\Phi(t + T_{\text{sys}}, t_{02})}{dt} = A(t + T_{\text{sys}})\Phi(t + T_{\text{sys}}, t_{02}), \quad (10)$$

其中 $t \in [t_{01}, t_{01} + T]$.

由于 $A(t) = A(t + T_{\text{sys}})$, 且 $\Phi(t_{01}, t_{01}) = \Phi(t_{02}, t_{02})$, 而 $\Phi(t_{02}, t_{02}) = \Phi(t_{01} + T_{\text{sys}}, t_{02})$, 故根据微分方程解的存在唯一性可知: 对于任意 $t \in [t_{01}, t_{01} + T]$, 方程(9)和方程(10)的解矩阵相等, 即 $\Phi(t, t_{01}) = \Phi(t + T_{\text{sys}}, t_{02})$.

故由式(6)可知, 对于任意 $t \in [t_{01}, t_{01} + T]$, 有

$$X(t, t_{01}) = X(t + T_{\text{sys}}, t_{02}).$$

再由 $M(t, t_0, \rho_0)$ 的定义可知

$$M(t, t_{01}, \rho_0) = M(t + T_{\text{sys}}, t_{02}, \rho_0),$$

对于任意 $t \in [t_{01}, t_{01} + T]$ 成立. 证毕.

附录A2 证明定理1 (Appendix A2 Proof of Theorem 1)

证 充分性. 设对于初始时刻 t_0 , 有 $\rho_M < A^{1/2}$, 即

$$\max_{[t_0, t_0 + T]} M(t, t_0, \rho_0) < A^{1/2},$$

故对于任意 $t \in [t_0, t_0 + T]$, 有 $M(t, t_0, \rho_0) < A^{1/2}$ 成立.

再由引理1, 以及区域(3)和(4)的定义可知, 对于任意 $t \in [t_0, t_0 + T]$, 任意 $\mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}_0^T \Gamma \mathbf{x}_0 \leq \lambda\}$, 有 $\mathbf{x}^T \Lambda \mathbf{x} < A$ 成立.

又若存在某一时刻 $t^* \in [t_0, t_0 + T]$, 有

$$\max_{[t^*, t_0 + T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2},$$

则由引理1和区域(4)定义可知, 对于任意 $\mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}_0^T \Gamma \mathbf{x}_0 \leq \lambda\}$, 任意 $t^* \in [t_0, t_0 + T]$, 有 $\mathbf{x}^T \Lambda \mathbf{x} < \epsilon$.

综上, 根据收缩稳定性定义可知, 系统(2)是收缩稳定的.

必要性. 采用反证法.

假设存在某个 $t \in [t_0, t_0 + T]$, 使得 $M(t, t_0, \rho_0) \geq A$, 则由引理1可知, 存在某一初值 $\mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}_0^T \Gamma \mathbf{x}_0 \leq \lambda\}$, 使得 $\mathbf{x}^T(t, t_0, \mathbf{x}_0) \Lambda \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \geq A$, 与系统(2)收缩稳定矛盾!

因此, 对于任意 $t \in [t_0, t_0 + T]$, 有 $M(t, t_0, \rho_0) < A$, 即 $\rho_M < A^{1/2}$.

假设对 $\forall t^* \in [t_0, t_0 + T]$, 有 $\max_{(t^*, t_0 + T]} M(t, t_0, \rho_0) \geq \epsilon^{1/2}$,

故对于时刻 $t = t_0 + T$, 有 $M(t_0 + T, t_0, \rho_0) \geq \epsilon^{1/2}$. 因此, 不存在 $t^* \in [t_0, t_0 + T]$, 使得对于任意 $t \in (t^*, t_0 + T]$, 有 $M(t_0 + T, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2}$, 这与系统(2)收缩稳定矛盾!

故假设不成立, 即存在某一时刻 $t^* \in [t_0, t_0 + T]$, 使得

$$\max_{(t^*, t_0 + T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2}$$

成立. 必要性部分证明完成. 证毕.

附录A3 证明定理6 (Appendix A3 Proof of Theorem 6)

证 充分性. 设存在常数 $\xi > (\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln(1 + T)$, 使得

$$\rho_\xi = \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) < A^{1/2},$$

对于任意的初始时刻 $t_0 \in T_0$ 成立, 则有

$$\begin{aligned} & \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) = \\ & \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(f(t, t_0) X(t, t_0)) < A^{1/2}, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \rho_M &= \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(X(t, t_0)) < \\ & A^{1/2} / \left(\min_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \sqrt{f(t, t_0)} \right) \leq \\ & A^{1/2} / \left(\min_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \sqrt{\xi \ln(1 + t - t_0) + 1} \right) = A^{1/2}. \end{aligned}$$

注意到 $\xi > (\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln(1 + T)$, 则有 $e^{(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\xi} - 1 < T$.

若取 $t^* = t_0 + e^{(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\xi} - 1$, 则 $t^* \in [t_0, t_0 + T]$, 且

$$A^{1/2}/(\xi \ln(1+t-t_0)+1) < \epsilon^{1/2}$$

对于任意 $t \in (t^*, t_0 + T)$ 成立.

即存在 $t^* = t^*(A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0) \in [t_0, t_0 + T]$, 且有 $t^* - t_0$ 独立于 t_0 , 使得

$$\max_{(t^*, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0) = \max_{(t^*, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(X(t, t_0)) < \epsilon^{1/2},$$

故根据定理4可知, 系统是一致收缩稳定的.

必要性. 下面举例证明定理6的必要性未必成立.

给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, 分别取参数 $\lambda = \rho_0^2 = 1$, $\epsilon = 0.81$, $A = 6.25$, $T = 10$, $T_0 = [0, 2]$, $\Gamma = \Lambda = I_2$, 且取系统矩阵

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

下面根据定理4, 采用数值计算方法检验所给系统相对参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$ 是否满足一致收缩稳定定义.

取 $t_0 = 0$, 在 $[t_0, t_0 + T]$ 上数值计算得到 $M(t, t_0, \rho_0)$ 曲线如图A1所示.

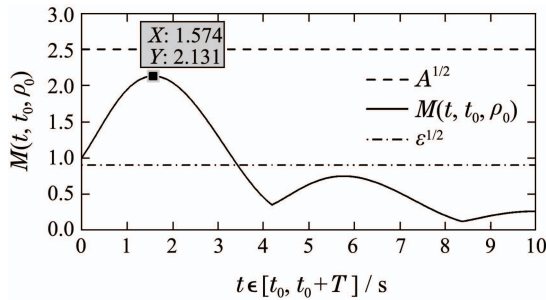


图 A1 包线 $M(t, t_0, \rho_0)$ 的数值计算结果

Fig. A1 Computation result of the envelope $M(t, t_0, \rho_0)$

则由图A1可知, 存在 $t_{\max} \approx 1.57 \in (t_0, t_0 + T)$, 考虑到系统为LTI系统, 故 $t_{\max} - t_0$ 独立于 $t_0 \in T_0$, 使得

$$\begin{aligned} \rho_M &= \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(X(t, t_0)) = \\ M(t_{\max}, t_0, \rho_0) &= 2.131 = kA^{1/2} < A^{1/2} = 2.5, \end{aligned}$$

其中 $k = 0.8524$.

又存在 $t^* = 4$, 满足 $t^* - t_0 \in (0, T)$, 使得

$$\max_{t \in (t^*, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2},$$

即所举例子是一致收缩稳定的.

下面再检验定理6的条件: 显然 $A > \epsilon$, $T > 0$.

注意到 $Y(t, t_0) = f(t, t_0)X(t, t_0)$, 故对于满足

$$\xi > (\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln(1 + T)$$

的最小临界值 $\xi^* \triangleq (\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln(1 + T) = 0.7414$, 有

$$\begin{aligned} \rho_\xi &= \max_{t_0 \leq t \leq t_0+T} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) \geq \\ \rho_{\xi^*}|_{t=t_{\max}} &= kA^{1/2}(\xi^* \ln(t_{\max} - t_0 + 1) + 1). \end{aligned}$$

注意到

$$t_0 + e^{1/k\xi^*-1} - 1 = 0.7902 < t_{\max} \approx 1.57 < t_0 + T,$$

故有 $k(\xi^* \ln(t_{\max} - t_0 + 1) + 1) > 1$, 因此

$$\rho_\xi \geq kA^{1/2}(\xi^* \ln(t_{\max} - t_0 + 1) + 1) > A^{1/2},$$

即对于满足 $\xi > (\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln(1 + T)$ 的任意常数 ξ , 对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_\xi = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) > A^{1/2}.$$

故定理6条件的必要性不满足, 即所举例子即为反例.

证毕.

附录A4 证明定理7(Appendix A4 Proof of Theorem 7)

证 充分性. 类似定理6的充分性证明, 不再详细给出.

必要性. 下面举例证明定理7的必要性未必成立.

给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, 分别取参数 $\lambda = \rho_0^2 = 1$, $\epsilon = 0.81$, $A = 6.25$, $T = 10$, $T_0 = [0, 2]$, $\Gamma = \Lambda = I_2$, 且取系统矩阵

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

下面根据定理4, 采用数值计算方法检验所给系统相对参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$ 是否满足一致收缩稳定定义.

取 $t_0 = 0$, 在 $[t_0, t_0 + T]$ 上数值计算得到 $M(t, t_0, \rho_0)$ 曲线如图A2所示.

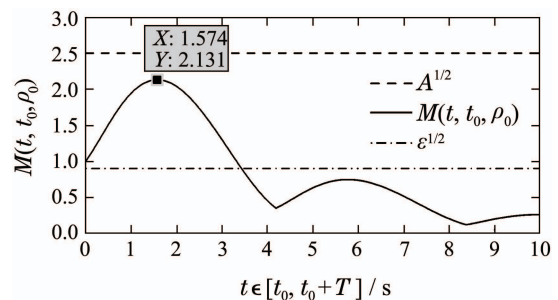


图 A2 包线 $M(t, t_0, \rho_0)$ 的数值计算结果

Fig. A2 Computation result of the envelope $M(t, t_0, \rho_0)$

则由图A2可知, 存在 $t_{\max} \approx 1.57 \in (t_0, t_0 + T)$, 考虑到系统为LTI系统, 故 $t_{\max} - t_0$ 独立于 $t_0 \in T_0$, 使得

$$\begin{aligned} \rho_M &= \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(X(t, t_0)) = \\ M(t_{\max}, t_0, \rho_0) &= 2.131 = kA^{1/2} < A^{1/2} = 2.5, \end{aligned}$$

其中 $k = 0.8524$.

又存在 $t^* = 4$, 满足 $t^* - t_0 \in (0, T)$, 使得

$$\max_{t \in (t^*, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2},$$

即所举例子是一致收缩稳定的.

下面再检验定理7的条件: 显然 $A > 4\epsilon$, $T > 1$.

注意到 $Y(t, t_0) = f(t, t_0)X(t, t_0)$, 故对于满足 $\xi > \ln(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln T$ 的最小临界值

$$\xi^* \triangleq \ln(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln T,$$

有

$$\rho_{\xi} = \max_{t_0 \leq t \leq t_0+T} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) \geq \rho_{\xi^*}|_{t=t_{\max}} = kA^{1/2}((t_{\max} - t_0)^{\xi^*} + 1).$$

注意到

$$t_0 + (1/k - 1)^{\frac{\ln(1/k)}{\ln(\sqrt{A/\epsilon} - 1)}} = 0.6146 < t_{\max} \approx 1.57,$$

故有 $k((t_{\max} - t_0)^{\ln(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln T} + 1) > 1$, 因此

$$\rho_{\xi} \geq kA^{1/2}((t_{\max} - t_0)^{\xi^*} + 1) > A^{1/2},$$

即对于满足 $\xi > \ln(\sqrt{A/\epsilon} - 1)/\ln T$ 的任意常数 ξ , 对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_{\xi} = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) > A^{1/2}.$$

故定理7条件的必要性不满足, 即所举例子即为反例.

证毕.

附录A5 证明定理8(Appendix A5 Proof of Theorem 8)

证 充分性. 类似定理6的充分性证明, 不再详细给出.

必要性. 下面举例证明定理8的必要性未必成立.

给定参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$, 分别取参数 $\lambda = \rho_0^2 = 1$, $\epsilon = 0.01$, $A = 6.25$, $T = 10$, $T_0 = [0, 2]$, $\Gamma = \Lambda = I_2$, 且取系统矩阵

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

下面根据定理4, 采用数值计算方法检验所给系统相对参数 $(\lambda, A, \epsilon, \Gamma, \Lambda, T, T_0)$ 是否满足一致收缩稳定定义.

取 $t_0 = 0$, 在 $[t_0, t_0 + T]$ 上数值计算得到 $M(t, t_0, \rho_0)$ 曲线如图A3所示.

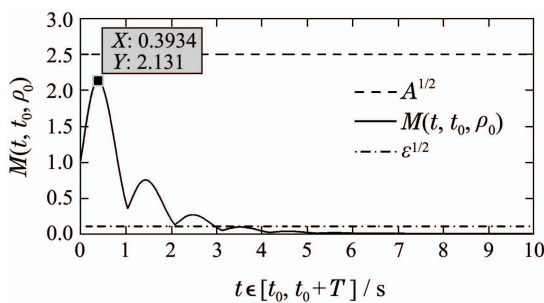


图 A3 包线 $M(t, t_0, \rho_0)$ 的数值计算结果

Fig. A3 Computation result of the envelope $M(t, t_0, \rho_0)$

由图A3可知, 存在 $t_{\max} \approx 0.39 \in (t_0, t_0 + T)$, 考虑到系统为LTI系统, 故 $t_{\max} - t_0$ 独立于 $t_0 \in T_0$, 使得

$$\begin{aligned} \rho_M &= \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(X(t, t_0)) = \\ M(t_{\max}, t_0, \rho_0) &\approx 2.131 = \\ kA^{1/2} &< A^{1/2} = 2.5, \end{aligned}$$

其中 $k = 0.8524$.

又存在 $t^* = 4$, 满足 $t^* - t_0 \in (0, T)$, 使得

$$\max_{t \in (t^*, t_0+T]} M(t, t_0, \rho_0) < \epsilon^{1/2},$$

即所举例子是一致收缩稳定的.

下面再检验定理8的条件: 显然 $A > \epsilon$, $T > 0$.

注意到, $Y(t, t_0) = h_3(t, t_0)X(t, t_0)$, 故对于满足 $\xi > \ln(A/\epsilon)/2T$ 的最小临界值 $\xi^* \triangleq \ln(A/\epsilon)/2T$, 有

$$\begin{aligned} \rho_{\xi} &= \max_{t_0 \leq t \leq t_0+T} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) \geq \\ kA^{1/2} e^{2\xi^*(t_{\max}-t_0)} &, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \rho_{\xi} \geq kA^{1/2} e^{2\xi^*(t_{\max}-t_0)} = kA^{1/2} e^{\ln(A/\epsilon)(t_{\max}-t_0)/T}.$$

注意到

$$t_0 + \frac{\ln(1/k)}{\ln(A/\epsilon)} T = 0.2481 < t_{\max} \approx 0.39 < t_0 + T,$$

故有 $ke^{\ln(A/\epsilon)(t_{\max}-t_0)/T} > 1$, 因此

$$\rho_{\xi} \geq kA^{1/2} e^{\ln(A/\epsilon)(t_{\max}-t_0)/T} > A^{1/2}.$$

即对于满足 $\xi > \ln(A/\epsilon)/2T$ 的任意常数 ξ , 对于任意初始时刻 $t_0 \in T_0$, 有

$$\rho_{\xi} = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho_0 \lambda_{\max}^{1/2}(Y(t, t_0)) > A^{1/2}.$$

故定理8条件的必要性不满足, 即所举例子为反例.

作者简介:

陈志华 (1990-), 男, 博士研究生, 目前研究方向为基于计算机平台的航天器控制系统分析与设计, E-mail: chenzzhihuahit@126.com;

解永春 (1966-), 女, 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为航天器导航、制导与控制, E-mail: xieyongchun@vip.sina.com.