

非参数不确定系统的双周期重复控制

严求真^{1†}, 柳向斌², 朱 胜³, 蔡建平⁴

(1. 浙江水利水电学院 信息工程学院, 浙江 杭州 310018; 2. 北京交通大学 电子信息工程学院, 北京 100044;

3. 浙江大学城市学院 信息与电气工程学院, 浙江 杭州 310015; 4. 浙江水利水电学院 应用数学研究所, 浙江 杭州 310018)

摘要: 针对一类扰动周期与参考信号周期之间无公共倍数的非参数不确定系统, 为实现系统输出对参考信号的跟踪, 本文提出一种双周期重复控制方法. 基于Lyapunov方法设计控制器, 结合鲁棒方法与双周期重复学习方法处理非参数不确定性与周期性扰动, 利用无限幅学习方法估计时变参数. 经过足够多个周期的重复运行后, 可实现系统输出在整个参考信号重复周期上无误差地跟踪参考信号. 最后, 通过仿真示例验证所提控制方法的有效性. 本文给出了闭环系统中无限幅学习量有界的数学证明, 其结果优于多数现有文献中的 L_2 意义下有界.

关键词: 重复控制; 多周期学习控制; Lyapunov方法; 非参数不确定性

引用格式: 严求真, 柳向斌, 朱胜, 等. 非参数不确定系统的双周期重复控制. 控制理论与应用, 2018, 35(9): 1311 – 1319

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Dual-period repetitive control for nonparametric uncertain systems

YAN Qiu-zhen^{1†}, LIU Xiang-bin², ZHU Sheng³, CAI Jian-ping⁴

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou Zhejiang 310018, China;

2. School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

3. School of Information and Electrical Engineering, Zhejiang University City College, Hangzhou Zhejiang 310015, China;

4. Institute of Applied Mathematics, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

Abstract: In this work, we present a dual-period repetitive control scheme that deals with periodic tracking tasks for a class of nonparametric uncertain systems, with no common multiple between the period of the disturbance and that of the reference signal. The learning controller is designed based on the Lyapunov synthesis, compensating nonparametric uncertainties and the periodic disturbance by both robust mechanism and dual-period repetitive learning mechanism. The unsaturated learning strategy is applied to estimate time-varying parameters. As the repetitive cycle increases, the system output can track its reference signal perfectly over its whole period. In the end, two illustrative examples are provided to demonstrate the efficacy of the proposed dual-period repetitive control scheme. Through rigorous analysis, we prove that the estimations themselves are bounded, indicating an improvement on the boundedness of L_2 -meaning obtained in most similar works existing works.

Key words: repetitive control; multi-period learning control; Lyapunov approach; nonparametric uncertainties

Citation: YAN Qiuzhen, LIU Xiangbin, ZHU Sheng, et al. Dual-period repetitive control for nonparametric uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(9): 1311 – 1319

1 引言(Introduction)

在实际工业系统中, 常常需要完成跟踪周期性信号或抑制周期性扰动等任务. 对于这些任务, 重复控制是一种有效的控制设计方法. 重复控制问世于上世纪70年代末^[1], 与迭代学习控制^[2–8]同属学习控制, 前者适用于有限时间区间上的重复作业系统^[9–14], 而后者适用于无限时间区间上的周期运行受控对象. 迭代

学习控制和重复控制都根据学习方法中的不变性原理开展工作, 即利用学习方法估计在各个重复周期或迭代学习区间中重复出现的不确定性. 目前, 学习控制方法已经广泛应用于机械臂、电力电子逆变器、间歇化工过程、伺服电机、人工肾脏等系统或设备的控制器设计^[15–18].

早期的重复控制结果多以内模原理为理论指导,

收稿日期: 2017–07–16; 录用日期: 2018–04–18.

[†]通信作者. E-mail: zjyqz@126.com; Tel.: +86 571-85290586.

本文责任编辑: 侯忠生.

国家自然科学基金项目(61573322, 61673050), 浙江省教育厅科研项目(Y201635861), 浙江省高等学校访问学者专业发展项目(FX2017078)资助. Supported by the National Natural Science Foundation of China (61573322, 61673050), the Scientific Research Project of Education Department of Zhejiang Province (Y201635861) and the University Visiting Scholars Developing Project of Zhejiang Province (FX2017078).

采用频域分析方法设计控制器. 近年来, 一些学者开展针对非线性系统的重复控制方法研究, 采用Lyapunov时域分析方法设计控制器. 文献[19]在为机械臂设计控制器时, 提出部分限幅差分学习与微分学习相结合的算法来估计周期性的不确定量. 文献[20]采用重复学习策略处理非参数不确定性, 实现系统状态对周期性参考轨迹的精确跟踪. 文献[21]和文献[22]研究非线性参数不确定系统的重复学习控制算法. 文献[23]针对非线性连续系统, 研究基于准滑模的重复学习控制. 文献[24]基于线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)为不确定线性系统设计 H_∞ 状态反馈鲁棒重复控制器, 实现对低通滤波器参数和重复控制器参数的同时优化. 文献[25]考虑输出反馈系统的扰动抑制问题, 采用重复学习方法抑制非匹配的周期性扰动. 文献[26]研究周期时变系统的鲁棒自适应重复控制方法. 文献[27]讨论混合不确定系统的准最优重复学习控制方法. 文献[28]针对非参数不确定连续系统, 提出基于观测器的重复控制算法. 文献[29]研究离散系统的自适应反演重复控制方法. 文献[30]讨论了不确定分数阶多涡卷混沌系统的自适应重复学习同步控制问题.

到目前为止, 相关工作大多以期望轨迹的周期或未知时变参数的周期作为学习的周期长度, 利用单周期学习方法估计在每个周期内呈现相同性状的未知参数或不确定量. 相比之下, 讨论多周期重复控制的文献结果还较少. 文献[31–33]研究线性系统的多周期重复控制问题. 文献[34]考虑参数不确定系统的多周期重复控制问题, 所设计的控制器可保证输出误差收敛于原点的邻域内. 迄今, 针对非参数不确定系统的多周期重复控制方法研究, 仍是一个有待开展的课题.

为了确保闭环系统中的参数估计量有界, 在设计学习控制器时, 在被学习量的界已知时, 可采用饱和函数或投影算子^[35]对学习量进行限幅. 饱和函数的限幅措施可以分为部分限幅^[19]和完全限幅^[27]两类. 在被学习量的界未知时, 可采用无限幅学习算法对其予以估计. 文献[2]和文献[20]分别采用无限幅学习算法估计未知时变参数和理想控制输入, 并给出了学习量在 L_2 意义下有界的理论证明. 迄今, 已有少量文献讨论无限幅学习算法中的被学习量本身的有界性问题^[34], 总体来看, 该方面的研究还处于初步阶段.

本文研究一类非参数不确定系统的重复控制方法, 系统中所含扰动的周期与参考信号周期之间无公倍数, 因此, 扰动在各个参考信号的周期中不呈现相同性状, 不宜采用常规的单周期重复学习方法设计控制器. 为了在补偿扰动和非参数不确定性的基础上, 实现系统输出对参考信号在整个周期上的零误差跟踪, 本文提出一种双周期重复控制设计方案, 基于Lyapunov方法设计控制器, 主要工作及创新之处有: 1) 结合

鲁棒策略与双周期重复学习策略处理非参数不确定性与周期性的扰动, 解决了采用传统单周期学习策略无法解决的扰动在参考信号的各周期内不呈现相同性状问题; 2) 在利用无限幅学习算法估计时变参数时, 已有的多数工作证明了被学习量在 L_2 意义下有界, 本文在此方面开展进一步的研究, 给出了被学习量本身有界的数学证明.

2 问题的提出与准备(Problem formulation)

考虑一类非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = f(\mathbf{x}) + gu + w(t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $g > 0$ 为未知的输入增益, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $y \in \mathbb{R}$ 为系统输出, y_d 是以 T_d 为周期的光滑参考输出信号, $y_d^{(n)}$ 存在; $f(\mathbf{x})$ 为未知函数, $w(t)$ 是以 T_w 为周期的扰动信号, 且 T_d 和 T_w 之间没有或不易找到公共倍数.

不失一般性, 对系统(1)作如下假设:

假设 1 $\forall \xi_1 \in \mathbb{R}^n, \forall \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, 函数 $f(\cdot)$ 满足

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq \alpha_f(\xi_1, \xi_2) \|\xi_1 - \xi_2\|, \quad (2)$$

其中 $\alpha_f(\xi_1, \xi_2)$ 为一非负连续可微函数.

假设 2 存在已知常数 $g_1 > 0$, g 满足条件:

$$g \geq g_1 > 0. \quad (3)$$

本文的控制目标是设计双周期重复控制器, 采用无限幅学习方法估计周期性扰动, 并结合鲁棒方法与无限幅学习方法处理非参数不确定性, 实现系统输出 y 对参考信号 y_d 的渐近跟踪, 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - y_d(t)) = 0, \quad (4)$$

并确保系统重复运行过程中, 所有变量均有界. 令 u_d 为产生 y_d 的理想系统输入, 其满足

$$\begin{cases} \dot{x}_{d,i} = x_{d,i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{d,n} = f(\mathbf{x}_d) + gu_d + w(t), \\ y_d = x_{d,1}, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{x}_d = [x_{d,1} \ x_{d,2} \ \dots \ x_{d,n}]^T$.

由式(5)可得

$$u_d(t) = g^{-1}(y_d^{(n)}(t) - f(\mathbf{x}_d(t)) - w(t)). \quad (6)$$

从式(6)可以看到, 期望输入 $u_d(t)$ 是两部分之和: 第一部分是 $g^{-1}(y_d^{(n)}(t) - f(\mathbf{x}_d(t)))$, 它以 T_d 为周期; 另一部分是 $-g^{-1}w(t)$, 它以 T_w 为周期. 鉴于 T_d 和 T_w 之间无公倍数, 所以期望输入 $u_d(t)$ 不是一个单周期函数, 而是一个双周期函数. 这就是作者对系统(1)采用双周期重复控制的原因.

双周期重复控制属于多周期重复控制范畴. 从已

有的文献结果来看, 研究多周期重复控制的成果还较少. 由于系统(1)是非参数不确定系统, 现有研究成果中的控制方法都无法直接应用. 在本文给出的重复控制设计方案中, 采用无限幅学习算法, 勿需知道被学习量的界. 已有的同类结果大多证明闭环系统中的学习量为 L_2 意义下有界, 我们将证明学习量本身有界.

本文提出的控制方法适用于 T_d 和 T_w 之间没有或不易找到公倍数情形; 同时, 对于 T_d 和 T_w 的公倍数远大于 $\max(T_d, T_w)$ 情形也是有意义的, 表现在可以显著地提高闭环系统的误差收敛速度.

注 1 T_d 和 T_w 之间的倍数关系可以分为3类:

情形 1 T_d 和 T_w 无公倍数, 或不易找到它们的公倍数, 例如 $T_d = 4, T_w = 2\pi$, 或 $T_d = \frac{5\sqrt{2}}{3}, T_w = e^2$.

情形 2 T_d 和 T_w 与它们的最小公倍数 T_{cm} 在数值大小方面相差悬殊, 例如 $T_d = 9, T_w = 11, T_{cm} = 99$;

情形 3 T_d 和 T_w 与它们的最小公倍数 T_{cm} 在数值大小方面比较接近, 例如 $T_d = 1.5, T_w = 2, T_{cm} = 3$.

对于情形1, 不宜将 $f(\mathbf{x}) + w(t)$ 视作单一的非参数不确定量加以处理. 在情形2和情形3中, 既可将 $f(\mathbf{x}) + w(t)$ 视作单一非参数不确定量, 采用以 T_{cm} 为周期长度的单周期学习方式估计 $f(\mathbf{x}_d) + w(t)$, 也可以采用双周期学习方式分别估计 $f(\mathbf{x}_d)$ 和 $w(t)$, 但双周期学习方式的收敛速度较快, 这在情形2中尤为明显. 双周期重复控制与单周期重复控制在情形1-3中的对比情况见表1.

表 1 双周期重复控制与单周期重复控制比较
Table 1 Comparison between dual-period repetitive control and single-periodic repetitive control

情形	双周期重复控制	单周期重复控制
1	可用于设计控制器	不适合使用
2	误差收敛速度较快	误差收敛速度慢
3	收敛速度接近	收敛速度接近

3 控制器设计(Design of controller)

定义系统误差 $\mathbf{e}(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \cdots \ e_n(t)]^T$, 其中 $e_i(t) = x_i(t) - x_{d,i}(t) (i = 1, 2, \dots, n)$, 由式(1)容易推出

$$\begin{cases} \dot{e}_i = e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{e}_n = f(\mathbf{x}) + gu + w - \dot{x}_{d,n}. \end{cases} \quad (7)$$

将上式写成向量的形式, 可得

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{b}(\mathbf{c}^T\mathbf{e} + f(\mathbf{x}) + gu + w - \dot{x}_{d,n}), \quad (8)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \cdots & -c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]^T, c_1, c_2, \dots, c_n$ 为Hurwitz多项式 $p(s) = s^n + c_n s^{n-1} + \cdots + c_2 s + c_1$ 的系数, 于是, 存在 $n \times n$ 维的正定对称矩阵 P 与 Q , 满足

$$PA + A^T P = -Q. \quad (10)$$

选择Lyapunov函数

$$V_1 = \frac{1}{g} \mathbf{e}^T P \mathbf{e}. \quad (11)$$

对 V_1 求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -\frac{1}{g} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \frac{2}{g} \mathbf{e}^T P \mathbf{b} (\mathbf{c}^T \mathbf{e} + f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_d)) + \\ & 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} [u + \frac{1}{g} (f(\mathbf{x}_d) + w - \dot{x}_{d,n})] = \\ & -\frac{1}{g} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \frac{2}{g} \mathbf{e}^T P \mathbf{b} [\mathbf{c}^T \mathbf{e} + f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_d)] + \\ & 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} (u + \eta_1(t) + \eta_2(t)), \end{aligned} \quad (12)$$

其中:

$$\begin{cases} \eta_1(t) = \frac{1}{g} (f(\mathbf{x}_d(t)) - \dot{x}_{d,n}(t)), \\ \eta_2(t) = \frac{1}{g} w(t). \end{cases} \quad (13)$$

容易看到, $\eta_1(t)$ 以 T_d 为周期, $\eta_2(t)$ 以 T_w 为周期. 利用假设1, 可知

$$\begin{aligned} & \frac{2}{g} \mathbf{e}^T P \mathbf{b} (\mathbf{c}^T \mathbf{e} + f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_d)) \leq \\ & \frac{2}{g} \mathbf{e}^T P \mathbf{b} (\mathbf{c}^T \mathbf{e}) + \frac{2}{g} |\mathbf{e}^T P \mathbf{b}| \alpha_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \|\mathbf{e}\| \leq \\ & \frac{1}{\gamma_1 g^2} ((\mathbf{c}^T \mathbf{e})^2 + \|\mathbf{e}\|^2) + \gamma_1 (1 + \alpha_f^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)) (\mathbf{e}^T P \mathbf{b})^2 \end{aligned} \quad (14)$$

成立, 其中的 $\gamma_1 > 1$ 为设计参数. 将式(14)的结果代入式(12), 即有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{1}{g} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \frac{1}{\gamma_1 g^2} ((\mathbf{c}^T \mathbf{e})^2 + \|\mathbf{e}\|^2) + \\ & \gamma_1 (1 + \alpha_f^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)) (\mathbf{e}^T P \mathbf{b})^2 + \\ & 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} (u + \eta_1(t) + \eta_2(t)). \end{aligned} \quad (15)$$

基于式(15), 设计反馈控制律

$$u = -\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2 - \frac{\gamma_1}{2} (1 + \alpha_f^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)) \mathbf{e}^T P \mathbf{b} \quad (16)$$

和学习律

$$\begin{cases} \hat{\eta}_1(t) = \hat{\eta}_1(t - T_d) + \mu \gamma_2(t) \mathbf{e}^T(t) P \mathbf{b}, \quad t > 0, \\ \hat{\eta}_1(t) = 0, \quad t \in [-T_d, 0] \end{cases} \quad (17)$$

及

$$\begin{cases} \hat{\eta}_2(t) = \hat{\eta}_2(t - T_w) + \mu \gamma_2(t) \mathbf{e}^T(t) P \mathbf{b}, \quad t > 0, \\ \hat{\eta}_2(t) = 0, \quad t \in [-T_w, 0]. \end{cases} \quad (18)$$

此处, μ 为正常数, $\gamma_2(t)$ 定义为

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \nu(t), & 0 < t \leq T_m, \\ 1, & t > T_m, \end{cases} \quad (19)$$

其中: $T_m \triangleq \min(T_w, T_d)$, $\gamma_2(t)$ 为过渡函数, 使得 $\hat{\eta}_1(t)$ 和 $\hat{\eta}_2(t)$ 分别是在区间 $[-T_d, +\infty)$ 和 $[-T_w, +\infty)$ 上的连续可微函数^[20]. 可以通过待定系数法构造 $\nu(t)$, 例如, 可取

$$\nu(t) = 1 - \frac{10(T_m - t)^3}{T_m^3} + \frac{15(T_m - t)^4}{T_m^4} - \frac{6(T_m - t)^5}{T_m^5}, \quad t \in [0, T_m]. \quad (20)$$

在本节给出的控制设计方案中, 结合采用双周期学习方法和鲁棒方法处理周期性扰动和非参数不确定性.

4 收敛性分析(Analysis of convergence)

因分析闭环系统的收敛性能需要, 给出如下引理:

引理 1 对于在 $t \in [0, +\infty)$ 上的连续可微函数 $\phi(t) \in \mathbb{R}^m$, 如果存在常数 $T > 0$, 使得 $\int_{t-T}^t \|\phi(\tau)\|^2 d\tau$ 和 $\int_{t-T}^t \|\dot{\phi}(\tau)\|^2 d\tau$ 都在 $t \in [0, +\infty)$ 上有界, 那么 $\phi(t)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上有界.

证 见文献[33]中的引理2.2.

下文分析闭环系统的收敛性能, 总结主要结果为如下定理.

定理 1 将控制律(16)和学习律(17)–(18)施加于满足假设1–2的系统(1), 选择足够大的 γ_1 和合适的对称正定矩阵 P , 使得由 P 和 A 根据式(10)所确定的 Q 与 γ_1 满足不等式

$$\frac{1}{\gamma_1 g_1} ((\mathbf{c}^T \mathbf{e})^2 + \|\mathbf{e}\|^2) \leq \frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e}, \quad (21)$$

则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}(t) = 0, \quad (22)$$

并保证闭环系统所有信号有界.

证 i) 误差的收敛性分析.

将式(16)代入式(15), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{1}{g} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \frac{1}{\gamma_1 g^2} ((\mathbf{c}^T \mathbf{e})^2 + \|\mathbf{e}\|^2) + \\ & 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b}(\tilde{\eta}_1(t) + \tilde{\eta}_2(t)), \end{aligned} \quad (23)$$

其中:

$$\tilde{\eta}_1(t) = \eta_1(t) - \hat{\eta}_1(t), \quad \tilde{\eta}_2(t) = \eta_2(t) - \hat{\eta}_2(t).$$

选取Lyapunov泛函

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{\mu} \int_{t-T_d}^t \tilde{\eta}_1^2(\tau) d\tau + \frac{1}{\mu} \int_{t-T_w}^t \tilde{\eta}_2^2(\tau) d\tau,$$

求 V_2 关于时间的导数, 并结合式(21)与式(23),

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{1}{g} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \frac{1}{g^2 \gamma_1} ((\mathbf{c}^T \mathbf{e})^2 + \|\mathbf{e}\|^2) + \\ & 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b}(\tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2) + \frac{1}{\mu} (\tilde{\eta}_1^2(t) - \tilde{\eta}_1^2(t - T_d)) + \\ & \frac{1}{\mu} (\tilde{\eta}_2^2(t) - \tilde{\eta}_2^2(t - T_w)) \leq \\ & -\frac{1}{2g} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b}(\tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2) + \\ & \frac{1}{\mu} (\tilde{\eta}_1^2(t) - \tilde{\eta}_1^2(t - T_d)) + \\ & \frac{1}{\mu} (\tilde{\eta}_2^2(t) - \tilde{\eta}_2^2(t - T_w)). \end{aligned} \quad (24)$$

当 $t \geq T_m$ 时, $\gamma_2(t) = 1$, 利用学习律(18), 并注意到

$$w(t) = w(t - T_w),$$

可以推出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} (\tilde{\eta}_2^2(t) - \tilde{\eta}_2^2(t - T_w)) + 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} \tilde{\eta}_2(t) = \\ & \frac{1}{\mu} (2\eta_2(t) - 2\hat{\eta}_2(t) + \hat{\eta}_2(t) - \hat{\eta}_2(t - T_w)) \times \\ & (\hat{\eta}_2(t - T_w) - \hat{\eta}_2(t)) + 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} \tilde{\eta}_2(t) \leq \\ & \frac{2}{\mu} \tilde{\eta}_2(t) (\hat{\eta}_2(t - T_w) - \hat{\eta}_2(t)) + 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} \tilde{\eta}_2(t) \leq \\ & \frac{2}{\mu} (\eta_2(t) - \hat{\eta}_2(t)) (\hat{\eta}_2(t - T_w) - \hat{\eta}_2(t)) + \mu \mathbf{e}^T P \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

类似地, 当 $t \geq T_m$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} (\tilde{\eta}_1^2(t) - \tilde{\eta}_1^2(t - T_d)) + 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} \tilde{\eta}_1(t) = \\ & \frac{1}{\mu} (2\eta_1(t) - 2\hat{\eta}_1(t) + \hat{\eta}_1(t) - \hat{\eta}_1(t - T_d)) \times \\ & (\hat{\eta}_1(t - T_d) - \hat{\eta}_1(t)) + 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} \tilde{\eta}_1(t) \leq \\ & \frac{2}{\mu} \tilde{\eta}_1(t) (\hat{\eta}_1(t - T_d) - \hat{\eta}_1(t)) + 2\mathbf{e}^T P \mathbf{b} \tilde{\eta}_1(t) \leq \\ & \frac{2}{\mu} (\eta_1(t) - \hat{\eta}_1(t)) (\hat{\eta}_1(t - T_d) - \hat{\eta}_1(t)) + \mu \mathbf{e}^T P \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

将式(25)–(26)的结果应用于式(24), 可知, 当 $t \geq T_m$ 时, 有

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{2g} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e}. \quad (27)$$

于是, 当 $t \geq T_m$ 时,

$$V_2(t) \leq V_2(T_m) - \frac{1}{2g} \lambda_m(Q) \int_{T_m}^t \|\mathbf{e}(\tau)\|^2 d\tau, \quad (28)$$

其中 $\lambda_m(Q)$ 是矩阵 Q 的最小特征值.

不等式(28)表明 $\int_{t-T_d}^t \tilde{\eta}_1^2(\tau) d\tau$, $\int_{t-T_w}^t \tilde{\eta}_2^2(\tau) d\tau$ 和 $\|\mathbf{e}(t)\|$, 在 $[T_m, +\infty)$ 上有界, 并且 $\mathbf{e}(t)$ 在 $[T_m, +\infty)$ 上

平方可积. 容易证明, 上述有界性结论与平方可积结论在区间 $t \in [0, T_m]$ 上也成立. 因此, 对于任意 $t > 0$, 均有

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}(t)\| < +\infty, \int_{t-T_d}^t \tilde{\eta}_1^2(\tau) d\tau < +\infty, \\ \int_{t-T_w}^t \tilde{\eta}_2^2(\tau) d\tau < +\infty, \int_0^t \|\mathbf{e}(\tau)\|^2 d\tau < +\infty. \end{cases} \quad (29)$$

结合式(8)与式(16), 可以推出闭环系统的误差动态为

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{b}(\mathbf{c}^T \mathbf{e} + f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_d) + g(\tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2)) - \mathbf{b} \frac{\gamma_1 g}{2} (1 + \alpha_f^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)) \mathbf{b}^T P \mathbf{e}. \quad (30)$$

由于 $\mathbf{e}(t)$ 有界, 从方程(30)可以看到, 存在常数 $m_1 > 0, m_2 > 0, m_3 > 0$, 使得

$$\|\dot{\mathbf{e}}(t)\|^2 \leq m_1 \|\mathbf{e}(t)\|^2 + m_2 \tilde{\eta}_1^2(t) + m_3 \tilde{\eta}_2^2(t), \quad t \geq 0. \quad (31)$$

从式(29)看, $\int_{t-T_m}^t \tilde{\eta}_1^2(\tau) d\tau$ 和 $\int_{t-T_m}^t \tilde{\eta}_2^2(\tau) d\tau$ 在 $t \in [T_m, \infty)$ 上有界. 由式(31)可知, 存在正常数 m_4 , 满足

$$\int_{t-T_m}^t \|\dot{\mathbf{e}}(\tau)\|^2 d\tau \leq m_4, \quad t \geq 0. \quad (32)$$

对于 $t_2 \in [t - T_m, t], t_1 \in [t - T_m, t], t \in [T_m, +\infty)$ 及任意正数 ε , 存在 $\delta = \frac{\varepsilon^2}{m_4}$, 当 $|t_2 - t_1| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(t_2) - \mathbf{e}(t_1)\| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\mathbf{e}}(\tau)\| d\tau \leq \\ &\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} 1 d\tau} \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\mathbf{e}}(\tau)\|^2 d\tau} \leq \\ &\sqrt{|t_2 - t_1|} \sqrt{m_4} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (33)$$

这表明, $\mathbf{e}(t)$ 在 $t \in [T_m, +\infty)$ 上一致连续, 结合式(29), 根据Barbalat引理, 可以推出

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}. \quad (34)$$

上式的成立蕴含着 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - y_d(t)) = 0$.

ii) 闭环系统变量的有界性.

上文已经证明了 $\mathbf{e}(t)$ 的有界性, 下面证明 $\tilde{\eta}_1(t)$ 和 $\tilde{\eta}_2(t)$ 的有界性. 对式(30)求导, 得

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{b}[\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{e}} + \frac{d}{dt}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_d))] - \\ &\mathbf{b} \frac{\gamma_1 g}{2} (1 + \alpha_f^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)) \mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}} - \\ &\mathbf{b} \gamma_1 g \alpha_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \mathbf{b}^T P \mathbf{e} \frac{d}{dt}(\alpha_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)) + \mathbf{b}(\dot{\tilde{\eta}}_1 + \dot{\tilde{\eta}}_2). \end{aligned} \quad (35)$$

再对式(17)和式(18)分别求导, 当 $t \geq T_m$ 时, 有

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\eta}}_1(t) = 0, \quad t \in [-T_d, 0], \\ \dot{\tilde{\eta}}_1(t) = \dot{\tilde{\eta}}_1(t - T_d) + \mu \dot{\mathbf{e}}^T(t) P \mathbf{b}, \quad t > 0, \\ \dot{\tilde{\eta}}_2(t) = 0, \quad t \in [-T_w, 0], \\ \dot{\tilde{\eta}}_2(t) = \dot{\tilde{\eta}}_2(t - T_w) + \mu \dot{\mathbf{e}}^T(t) P \mathbf{b}, \quad t > 0. \end{cases} \quad (36)$$

由直接计算, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_d)) &= \\ \dot{\mathbf{x}}_d^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_d} (f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d) - f(\mathbf{x}_d)) &+ \\ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_i} e_{i+1} + \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \dot{e}_n. \end{aligned} \quad (37)$$

分别记

$$h_1(\mathbf{x}_d, \mathbf{e}) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_d + \sigma \mathbf{e})}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}_d} d\sigma,$$

及

$$\mathbf{h}_2(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d) = (0, \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_1}, \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_{n-1}})^T.$$

因为

$$f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d) - f(\mathbf{x}_d) = \int_0^1 \frac{\partial f(\mathbf{x}_d + \sigma \mathbf{e})}{\partial \mathbf{x}^T} d\sigma \mathbf{e},$$

所以

$$\frac{\partial (f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d) - f(\mathbf{x}_d))}{\partial \mathbf{x}_d} = h_1(\mathbf{x}_d, \mathbf{e}) \mathbf{e}. \quad (38)$$

同时, 容易看出

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_i} e_{i+1} = \mathbf{h}_2^T(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d) \mathbf{e}. \quad (39)$$

根据式(37)–(39), 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_d)) &= \\ \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \dot{e}_n + \dot{\mathbf{x}}_d^T h_1(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d) \mathbf{e} + \mathbf{h}_2^T(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (40)$$

对 $\alpha_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)$ 求关于时间的导数, 可以推出

$$\frac{d\alpha_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)}{dt} = \frac{\partial \alpha_f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \dot{e}_n + h_3(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d), \quad (41)$$

其中

$$h_3(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d)}{\partial e_i} e_{i+1} + \frac{\partial \alpha_f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d)}{\partial \mathbf{x}_d^T} \dot{\mathbf{x}}_d.$$

将式(40)–(41)代入式(35), 得

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{b}(\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{e}} - \frac{\gamma_1 g}{2} (1 + \alpha_f^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)) \mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}}) + \\ &\mathbf{b}(\frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \dot{e}_n + h_4(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) \mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}}) + \\ &\mathbf{b}(\mathbf{h}_5^T(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) \mathbf{e} + \dot{\tilde{\eta}}_1 + \dot{\tilde{\eta}}_2), \end{aligned} \quad (42)$$

其中:

$$\begin{aligned} h_4(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d) &= -\gamma_1 g \alpha_f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d) \frac{\partial \alpha_f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d)}{\partial e_n}, \\ \mathbf{h}_5^T(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) &= \\ \dot{\mathbf{x}}_d^T h_1(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d) + \mathbf{h}_2^T(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d) &- \end{aligned}$$

$$\gamma_1 g \alpha_f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d) \mathbf{b}^T P h_3(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d).$$

选择

$$V_3 = \dot{\mathbf{e}}^T P \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{\mu} \int_{t-T_d}^t \dot{\eta}_1^2(\tau) d\tau + \frac{1}{\mu} \int_{t-T_w}^t \dot{\eta}_2^2(\tau) d\tau, \quad t \geq T_m, \quad (43)$$

其中 P 由式(10)定义. 对 V_3 求关于时间的导数, 由式(42)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -\dot{\mathbf{e}}^T Q \dot{\mathbf{e}} + 2\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b} \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{e}} - \gamma_1 g (1 + \alpha_f^2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d)) (\mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}})^2 + \\ & 2 \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \dot{e}_n \mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}} + 2\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b} (h_4(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) \mathbf{b}^T P \mathbf{e} \dot{e}_n + \mathbf{h}_5^T(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) \mathbf{e}) + 2\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b} (\dot{\eta}_1(t) + \dot{\eta}_2(t)) + \\ & \frac{1}{\mu} (\dot{\eta}_1^2(t) - \dot{\eta}_1^2(t - T_d)) + \frac{1}{\mu} (\dot{\eta}_2^2(t) - \dot{\eta}_2^2(t - T_w)). \end{aligned} \quad (44)$$

利用式(36), 采用与式(25)–(26)相似的推导, 当 $t \geq T_m$ 时, 可得

$$\begin{aligned} & 2\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b} (\dot{\eta}_1(t) + \dot{\eta}_2(t)) + \frac{1}{\mu} (\dot{\eta}_1^2(t) - \dot{\eta}_1^2(t - T_d)) + \frac{1}{\mu} (\dot{\eta}_2^2(t) - \dot{\eta}_2^2(t - T_w)) \leq 0. \end{aligned} \quad (45)$$

由式(44)–(45)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -\dot{\mathbf{e}}^T Q \dot{\mathbf{e}} + 2\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b} \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{e}} - \gamma_1 g (1 + \alpha_f^2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d)) (\mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}})^2 + \\ & 2 \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \dot{e}_n \mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}} + 2\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b} [h_4(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) \times \mathbf{b}^T P \mathbf{e} \dot{e}_n + \mathbf{h}_5^T(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) \mathbf{e}]. \end{aligned} \quad (46)$$

通过直接计算, 可得

$$2\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b} \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{e}} \leq \frac{1}{\gamma_1 g} (\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{e}})^2 + \gamma_1 g (\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b})^2, \quad (47)$$

以及

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \dot{e}_n \mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}} \leq \frac{1}{\gamma_1 g} (\dot{e}_n)^2 + \gamma_1 g \left(\frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \right)^2 (\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b})^2. \end{aligned} \quad (48)$$

根据假设1, 由直接计算可知

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \right)^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d + \mathbf{b}\delta) - f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\delta} \right)^2 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha_f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d + \mathbf{b}\delta, \mathbf{e} + \mathbf{x}_d) \|\mathbf{b}\delta\|}{\delta} \right)^2 = \alpha_f^2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{e} + \mathbf{x}_d), \end{aligned} \quad (49)$$

上式中的 \mathbf{b} 由式(9)定义. 由于 $\mathbf{e}(t)$ 有界和连续可微, 有 $\alpha_f^2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{e} + \mathbf{x}_d) \leq \alpha_f^2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d) + m_5 \|\mathbf{e}\|,$

$$(50)$$

其中 m_5 为一正常数. 由式(49)–(50)得

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \right)^2 \leq \alpha_f^2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d) + m_5 \|\mathbf{e}\|. \quad (51)$$

从式(48)和式(51)可知

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial f(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d)}{\partial e_n} \dot{e}_n \mathbf{b}^T P \dot{\mathbf{e}} \leq \frac{1}{\gamma_1 g} (\dot{e}_n)^2 + \gamma_1 g \alpha_f^2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_d) (\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b})^2 + m_5 \gamma_1 g (\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b})^2 \|\mathbf{e}\|. \end{aligned} \quad (52)$$

另外, 由于 $\mathbf{e}(t), \mathbf{x}_d(t)$ 和 $\dot{\mathbf{x}}_d(t)$ 有界, 存在 $m_6 > 0$ 和 $m_7 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & 2\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b} (h_4(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) \mathbf{b}^T P \mathbf{e} \dot{e}_n + \mathbf{h}_5^T(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d) \mathbf{e}) \leq 2|h_4(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d)| |\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b}| |\mathbf{b}^T P \mathbf{e}| |\dot{e}_n| + 2\|\mathbf{h}_5(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d)\| |\dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{b}| \|\mathbf{e}\| \leq m_6 \|\dot{\mathbf{e}}\|^2 \|\mathbf{e}\| + m_7 \|\dot{\mathbf{e}}\| \|\mathbf{e}\|. \end{aligned} \quad (53)$$

将式(47)(52)和(53)代入式(46), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -\dot{\mathbf{e}}^T Q \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{\gamma_1 g} ((\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{e}})^2 + (\dot{e}_n)^2) + m_6 \|\dot{\mathbf{e}}\|^2 \|\mathbf{e}\| + m_7 \|\dot{\mathbf{e}}\| \|\mathbf{e}\|. \end{aligned} \quad (54)$$

由条件(21), 有

$$\frac{1}{\gamma_1 g} ((\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{e}})^2 + (\dot{e}_n)^2) \leq \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T Q \dot{\mathbf{e}}. \quad (55)$$

当 t 趋于 $+\infty$ 时, $\mathbf{e}(t)$ 趋于零, 因此存在 $t^* > T_m$, 使得当 $t \geq t^*$ 时,

$$m_5 \|\dot{\mathbf{e}}\|^2 \|\mathbf{e}\| + m_6 \|\dot{\mathbf{e}}\| \|\mathbf{e}\| \leq \frac{1}{4} \dot{\mathbf{e}}^T Q \dot{\mathbf{e}} + m_8 \|\mathbf{e}\|^2 \quad (56)$$

成立, 其中 $m_8 > 0$ 为一常数. 将式(55)–(56)代入式(54), 得

$$\dot{V}_3(t) \leq -\frac{1}{4} \dot{\mathbf{e}}^T(t) Q \dot{\mathbf{e}}(t) + m_8 \|\mathbf{e}(t)\|^2, \quad t \geq t^*.$$

这意味着

$$V_3(t) \leq V_3(t^*) + m_8 \int_{t^*}^{+\infty} \|\mathbf{e}(\tau)\|^2 d\tau < +\infty, \quad t \geq t^*. \quad (57)$$

由此知 $V_3(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上有界. 这表明, $\int_{t-T_d}^t \dot{\eta}_1^2(\tau) d\tau$ 和 $\int_{t-T_w}^t \dot{\eta}_2^2(\tau) d\tau$ 在 $t \in [T_m, +\infty)$ 上有界. 进一步地, 根据引理1, 可以推出 $\dot{\eta}_1(t)$ 和 $\dot{\eta}_2(t)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上有界. 因此, 闭环系统的所有信号有界. 证毕.

本节对第3节给出的控制设计方案进行收敛性分析. 理论分析表明, 经过足够多周期的重复学习后, 系统误差将收敛于零, 这意味着系统状态将在整个参考

信号周期上零误差跟踪参考信号. 许多已有文献在采用无限幅学习策略设计学习律时, 证明了学习量为 L_2 意义下有界, 本文证明了学习量本身是有界的.

5 仿真算例(Numerical simulation)

考虑如下二阶非线性不确定系统^[2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -0.1x_2 - x_1^3 + w(t) + u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (58)$$

系统初态 $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [0.7 \ 0.2]^T$. 控制目标是设计合适的控制量, 使得系统输出 y 跟踪期望输出 y_d , 仿真时, 视 $f(\mathbf{x}) = -0.1x_2 - x_1^3, g = 1$ 为未知输入增益. 此处分别针对注1中的情形1和情形2进行仿真.

仿真1 考虑注1中的情形1,

$$y_d = \cos(0.5\pi t), \quad w(t) = 12 \cos t, \\ T_d = 4, T_w = 2\pi,$$

T_d 和 T_w 之间没有或很难找到公倍数.

采用控制律(16)及学习律(17)–(18)进行仿真. 取

$$\alpha(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d) = \sqrt{(3(x_1^2 + x_{d,1}^2)^2 + 0.01)}, \quad (59)$$

满足假设1. 仿真中, 取 $\gamma_1 = 4, \mu = 6$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

由式(60)及式(10)确定的

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

根据式(19)构造 γ_2 , 可以检验, γ_1, g_1 和 Q 满足式(21). 仿真结果如图1–3所示. 图1是 $t \in [0, 30]$ 上的系统输出情况, 图2是 $t \in [0, 100]$ 上的输出误差情况, 图3为控制输入随时间的变化情况. 由图1–2可以看出, 经过多周期的重复后, y 可以实现对参考信号 y_d 的零误差渐近跟踪.

仿真2 考虑注1中的情形2,

$$y_d = \cos \frac{2\pi t}{3.5}, \quad w(t) = 12 \cos \frac{2\pi t}{4.6}, \\ T_d = 3.5, T_w = 4.6, T_{cm} = 161,$$

最小公倍数 $T_{cm} \gg \max(T_d, T_w)$. 分别采用本文所提双周期重复控制方法及以129为周期长度的单周期重复控制方法进行仿真, 仿真参数的选取情况同仿真1. 双周期重复策略下的输出误差情况见图4, 单周期重复策略下的输出误差情况见图5.

对比图4–5, 可以看出, 在此情形下, 双周期重复策略与单周期重复策略都可以实现输出误差的渐近收敛, 双周期重复策略的误差收敛速度快于单周期重复策略.

综合以上两个仿真, 可以看出: 在参考轨迹周期与扰动信号周期之间无或不易找到公倍数情形, 本文提出的控制方法解决了传统单周期控制方法无法解决的轨迹跟踪问题; 在参考轨迹周期与扰动信号周期均远小于两者的公倍数情形, 采用双周期重复策略可以获得较单周期重复策略更快的误差收敛速度.

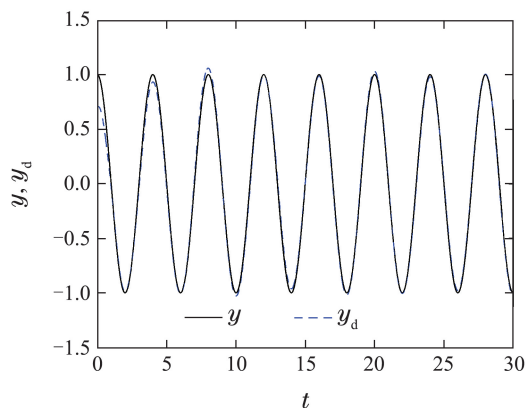


图1 系统输出 y 及其参考轨迹 y_d (情形1)
Fig. 1 System output y and its reference trajectory y_d (Case 1)

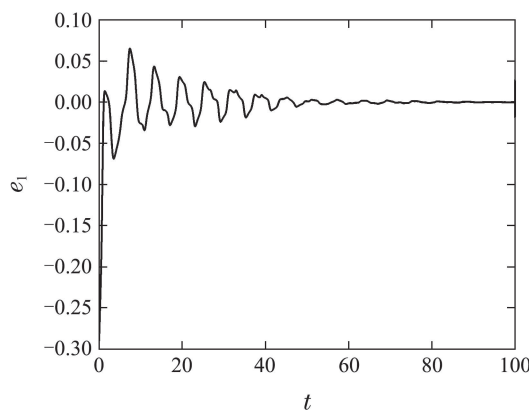


图2 输出误差 e_1 (情形1)
Fig. 2 Output error e_1 (Case 1)

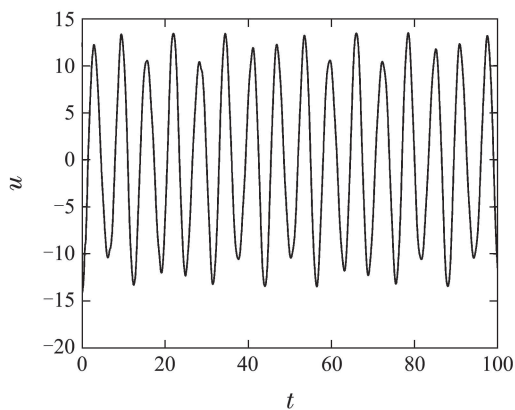
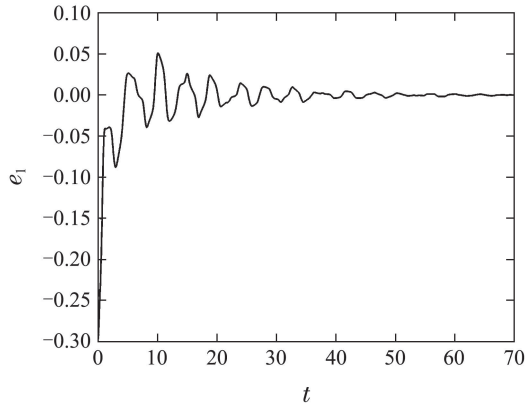
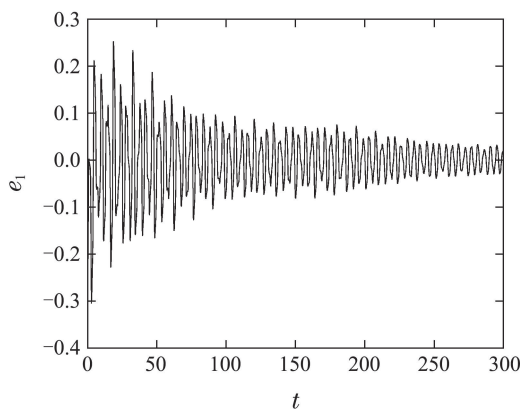


图3 控制输入(情形1)
Fig. 3 Control input (Case 1)

图4 输出误差 e_1 (情形2: 双周期重复策略)Fig. 4 Output error e_1 (Case 2: dual-period repetitive strategy)图5 输出误差 e_1 (情形2: 单周期重复策略)Fig. 5 Output error e_1 (Case 2: single-period strategy)

6 结论(Conclusions)

本文针对一类扰动周期长度与参考轨迹周期长度之间无公倍数的非参数不确定系统, 基于Lyapunov方法设计双周期重复控制器, 结合鲁棒策略与双周期重复学习策略处理非参数不确定性与周期性扰动, 采用无限幅学习算法估计时变参数. 经过足够多个周期的重复运行后, 可实现系统输出以零误差跟踪参考信号. 现有多数相关结果中, 对无限幅学习算法中学习量的收敛性结论为 L_2 意义下有界, 本文则证明了闭环系统中无限幅学习量本身是有界的. 上述双周期重复控制方法也适用于扰动周期与参考轨迹的周期有公倍数场合, 在该公倍数远大于扰动周期和参考轨迹周期中的较大者场合, 双周期重复控制方法可以显著地提高闭环系统的误差收敛速度.

参考文献(References):

[1] UCHIYAMA M. Formation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trail [J]. *Transactions of the Society for Instrumentation and Control Engineering*, 1978, 14(6): 706 – 712.
 [2] XU J X, Tan Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1940 – 1945.

[3] RUAN Xiao'e, ZHAO Jianyong. Pulse compensated iterative learning control to nonlinear systems with initial state uncertainty [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 993 – 1000.
 (阮小娥, 赵建永. 具有初始状态不确定性的非线性系统脉冲补偿迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 993 – 1000.)
 [4] LIU Shan, LIU Jie. Pulse compensated iterative learning control to nonlinear systems with initial state uncertainty [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 985 – 992.
 (刘山, 刘杰. 非最小相位系统的扩展Laguerre基函数迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 985 – 992.)
 [5] CHI Ronghu, HOU Zhongsheng, WANG Danwei, et al. An optimal terminal iterative learning control approach for nonlinear discrete-time systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1025 – 1030.
 (池荣虎, 侯忠生, 王郸维, 等. 非线性离散时间系统的最优终端迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1025 – 1030.)
 [6] BU Xuhui, HOU Zhongsheng, YU Fashan. Iterative learning control for a class of linear continuous-time switched systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1051 – 1056.
 (卜旭辉, 侯忠生, 余发山. 一类线性连续切换系统的迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1051 – 1056.)
 [7] LÜ Qing, FANG Yongchun, REN Xiong. Anti-disturbance iterative learning control for nonlinear systems with time-iteration-varying disturbances [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(9): 1190 – 1197.
 (吕庆, 方勇纯, 任逍. 含非严格重复扰动的抗扰迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(9): 1190 – 1197.)
 [8] DAI Xisheng, GUO Yajun, TIAN Senping, et al. Iterative learning control of nonlinear parabolic partial difference systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(12): 1607 – 1612.
 (戴喜生, 郭亚君, 田森平, 等. 非线性抛物型偏差分系统迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(12): 1607 – 1612.)
 [9] SHEN D, WANG Y. Iterative learning control for networked stochastic systems with random packet losses [J]. *International Journal of Control*, 2015, 88(5): 959 – 968.
 [10] MENG Deyuan, JIA Yingmin, DU Junping, et al. Stability analysis of continuous-time iterative learning control systems with multiple state delays [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(5): 696 – 703.
 (孟德元, 贾英民, 杜军平, 等. 含多状态时滞的连续时间迭代学习控制系统稳定性分析 [J]. 自动化学报, 2010, 36(5): 696 – 703.)
 [11] LI Yan, CHEN Yangquan, AN Xiaosheng. Convergence analysis of fractional-order iterative learning control [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1027 – 1031.
 (李岩, 陈阳泉, 安孝晟. 分数阶迭代学习控制的收敛性分析 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1031 – 1037.)
 [12] YAN Qiuzhen, SUN Mingxuan, LI He. Consensus-error-tracking learning control for nonparametric uncertain multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(6): 793 – 799.
 (严求真, 孙明轩, 李鹤. 非参数不确定多智能体系统一致性误差跟踪学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(6): 793 – 799.)
 [13] LI Xiangyang. Iterative extended state observer and its application in iterative learning control [J]. *Control and Decision*, 2015, 30(3): 473 – 478.
 (李向阳. 迭代扩张状态观测器及其在迭代学习控制中的应用 [J]. 控制与决策, 2015, 30(3): 473 – 478.)
 [14] TAO Hongfeng, DONG Xiaoqi, YANG Huizhong. Optimal algorithm and application for point to point iterative learning control via updating reference trajectory [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(9): 1207 – 1213.
 (陶洪峰, 董晓齐, 杨慧中. 参考轨迹更新的点到点迭代学习控制算法优化及应用 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(9): 1207 – 1213.)
 [15] HU T, LOW K H, SHEN L, et al. Effective phase tracking for bio-inspired undulations of robotic fish models: A learning control ap-

- proach [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2014, 19(1): 191 – 200.
- [16] WANG Jing, WANG Yue, WANG Wei, et al. Adaptive iterative learning control based on unfalsified strategy applied in batch process [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2015, 46(4): 1318 – 1325.
(王晶, 王玥, 王伟, 等. 基于去伪策略的间歇过程自适应迭代学习 [J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2015, 46(4): 1318 – 1325.)
- [17] GAO Feng, LIN Hui. An adaptive repetitive controller based on generic internal model for active power filter in variable-frequency power system [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(6): 725 – 734.
(高峰, 林辉. 基于通用内模的变频电网有源电力滤波器自适应重复控制 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(6): 725 – 734.)
- [18] YANG Yuenan, WANG Youqing. Internal model control-enhanced learning-type model predictive control: Application to artificial pancreas [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1057 – 1062.
(杨跃男, 王友清. 内模强化学习型模型预测控制及其在人工胰脏上的应用 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1057 – 1062.)
- [19] DIXON W E, ZERGEROGLU E, DAWSON D M, et al. Repetitive learning control: A Lyapunov-based approach [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, 32(4): 538 – 544.
- [20] XU J X, YAN R. On repetitive learning control for periodic tracking tasks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(11): 1842 – 1848
- [21] SUN M X, GE S S. Adaptive repetitive control for a class of nonlinearly parametrized systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(10): 1684 – 688.
- [22] SUN Yunping, LI Junmin, LI Jing. Adaptive repetitive learning control for a class of nonlinearly parameterized uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 228 – 232.
(孙云平, 李俊民, 李靖. 一类非线性参数化系统自适应重复学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 228 – 232.)
- [23] LI X D, CHOW T W S, HO J K L, et al. Repetitive learning control of nonlinear continuous-time systems using quasi-sliding mode [J]. *IEEE Transactions on Control Systems and Technology*, 2007, 15(2): 369 – 374.
- [24] WU Min, LAN Yonghong, SHE Jinhua, et al. H-infinity state feedback robust repetitive control for uncertain linear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 427 – 433.
(吴敏, 兰永红, 余锦华, 等. 线性不确定系统的 H_∞ 状态反馈鲁棒重复控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 427 – 433.)
- [25] CHEN P N, SUN M X, YAN Q Z. Adaptive rejection of multi-periodic disturbances for a class of linear systems [J]. *International Journal of Control*, 2016, 89(11): 2250 – 2261.
- [26] ZHU Sheng, WANG Xuejie, LIU Wei. Robust adaptive repetitive control for periodically time-varying systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(11): 2391 – 2403.
(朱胜, 王雪洁, 刘玮. 周期时变系统的鲁棒自适应重复控制 [J]. 自动化学报, 2014, 40(11): 2391 – 2403.)
- [27] YAN Qiuzhen, SUN Mingxuan. Suboptimal learning control for nonlinear systems with both parametric and nonparametric uncertainties [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(9): 1659 – 1668.
(严求真, 孙明轩. 非线性不确定系统准最优学习控制 [J]. 自动化学报, 2015, 41(9): 1659 – 1668.)
- [28] HUANG D, XU J X, YANG S, et al. Observer based repetitive learning control for a class of nonlinear systems with non-parametric uncertainties [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(8): 1214 – 1229.
- [29] ZHU Q, XU J X, YANG S, et al. Adaptive backstepping repetitive learning control design for nonlinear discrete-time systems with periodic uncertainties [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2015, 29(4): 524 – 535.
- [30] SUN Meimei, HU Yunan, WEI Jianming. Adaptive repetitive learning synchronization of uncertain fractional order multi-scroll chaotic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 936 – 944.
(孙美美, 胡云安, 韦建明. 不确定分数阶多涡卷混沌系统自适应重复学习同步控制 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 936 – 944.)
- [31] YAMADA K, SATOH K, ARAKAWA T, et al. A design method for repetitive control systems with a multi-period repetitive compensator [J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, 2002, 69(686): 2691 – 2699.
- [32] OWENS D H, LI L M, BANKS S P. Multi-Periodic repetitive control system: A Lyapunov stability analysis for MIMO systems [J]. *International Journal of Control*, 2004, 77(5): 504 – 515.
- [33] CHEN Pengnian. Multi-periodic repetitive control for linear systems with bounded control variables [J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2014, 34(11): 1306 – 1318.
(陈彭年. 控制变量有界的线性系统多周期重复控制 [J]. 系统科学与数学, 2014, 34(11): 1306 – 1318.)
- [34] YAN R, ER M J, PAN Y J. Multi-period repetitive learning control for a class of unmatched systems with unknown control direction [C] // *Proceeding of 2006 American Control Conference*. Minneapolis, MN, USA: IEEE, 2006: 238 – 143.
- [35] MARINO R, TOMEI P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1991 – 1996.

作者简介:

严求真 (1972–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为自适应学习控制, E-mail: zjyqz@126.com;

柳向斌 (1971–), 男, 博士, 副教授, 研究领域为自适应控制, E-mail: xbliu@bjtu.edu.cn;

朱胜 (1982–), 男, 博士, 讲师, 研究领域为自适应学习控制, E-mail: zhus@zucc.edu.cn;

蔡建平 (1975–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为自适应控制, E-mail: caijianping2001@hotmail.com.