

随机鼠疫病模型的核范数子空间辨识

于淼^{1,2†}, 刘建昌^{1,2}, 赵立纯³

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819;

2. 东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 辽宁 沈阳 110819; 3. 鞍山师范学院 数学与信息科学学院, 辽宁 鞍山 114007)

摘要: 基于连续鼠疫病模型, 通过零阶保持器得到相应的离散模型. 由于随机扰动的存在, 提出相应的随机鼠疫病模型. 设计卡尔曼滤波器, 估计随机模型的状态变量以及降低噪声影响. 采用核范数最小化方法代替奇异值分解, 得到输入输出投影矩阵的低秩矩阵逼近. 通过交替方向乘子法求解此优化问题, 得到输出变量的最优解. 根据世界卫生组织的非洲人类鼠疫病数据, 利用本文提出的方法得到随机鼠疫病模型. 仿真研究表明提出方法的有效性和精确性.

关键词: 子空间辨识; 核范数; 随机模型; 卡尔曼滤波; 鼠疫病

引用格式: 于淼, 刘建昌, 赵立纯. 随机鼠疫病模型的核范数子空间辨识. 控制理论与应用, 2018, 35(8): 1126 – 1132

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Nuclear norm subspace identification of a stochastic model of bubonic plague

YU Miao^{1,2†}, LIU Jian-chang^{1,2}, ZHAO Li-chun³

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China;

2. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China;

3. College of Mathematics and Information Science, Anshan Normal University, Anshan Liaoning 114007, China)

Abstract: Based on the continuous-time model of plague, the discrete-time model is given by the zero-order holder. Due to the fact that the stochastic disturbances are existing, the stochastic model of bubonic plague is proposed corresponding to the discrete-time model. The state estimation and noise reduction of the model are obtained by means of designing a Kalman filter. Nuclear norm minimization is used, instead of the singular value decomposition, to structure the low-rank matrix approximation of the input-output projection matrix. In addition, the nuclear norm optimization problem is solved by the alternating direction method of multipliers and the optimal solution of the output variables of the minimization problem is obtained. According to the data of human plague in Africa from the World Health Organization, the stochastic model of bubonic plague is identified by using the proposed method. The simulation results indicate the efficiency and accuracy of the proposed method.

Key words: subspace identification; nuclear norm; stochastic models; Kalman filters; plague

Citation: YU Miao, LIU Jianchang, ZHAO Lichun. Nuclear norm subspace identification of a stochastic model of bubonic plague. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(8): 1126 – 1132

1 引言(Introduction)

作为系统辨识的重要分支, 子空间辨识方法受到了广泛的关注^[1-3]. 它提供了一种辨识系统状态空间模型的替代方法, 并且综合了系统理论、线性代数和统计学3方面的思想. 此方法是根据测量数据和一些简单的数学工具, 像正交三角分解(QR decomposition, QRD)和奇异值分解(singular value decomposition, SVD)

等来建立数学模型^[4]. 子空间方法具有对模型结构先验知识需求较少, 在数值计算中具有一定的鲁棒性, 以及对多变量系统的广泛适用等特点. 从提出至今, 子空间方法在辨识和控制领域得到了很多的关注和发展.

核范数最小化方法首次由Maryam Fazel提出^[5-6], 它可以作为构造低秩矩阵逼近的替代方法. 此方法最

收稿日期: 2017-07-23; 录用日期: 2018-02-07.

†通信作者. E-mail: yumiaofly@126.com; Tel.: +86 18240322128.

本文责任编辑: 胡德文.

国家自然科学基金项目(61374137, 61773106), 流程工业综合自动化国家重点实验室基础科研业务费(2013ZCX02-03)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61374137, 61773106) and the State Key Laboratory of Integrated Automation of Process Industry Technology and the Research Center of National Metallurgical Automation Fundamental Research Funds (2013ZCX02-03).

重要的优点是不同于子空间辨识过程中的SVD, 它提供了一个线性矩阵结构, 从而使它的应用非常广泛. 文献[7-8]把核范数最小化方法应用到线性与非线性系统的辨识之中. 在此基础上, 文献[9-10]提出了一种加权核范数最小化方法并应用到相应的系统辨识之中. 在文献[11]中, 用核范数启发式方法构建Hankel矩阵, 并且应用到补全矩阵缺失数据的问题之中. 子空间辨识之中最关键的是构建一个由测量输入输出数据构成的低秩矩阵逼近. 引入核范数最小化方法, 可以保证逼近矩阵的秩最小, 从而获得合适合理的模型阶数.

鼠疫病是一种由高致命的细菌(鼠疫耶尔森菌)引起的一种传染性疾病. 这种细菌可以引起3种主要的鼠疫病类型: 黑死病、败血性鼠疫病、肺炎性鼠疫病. 鼠疫病主要通过被感染的老鼠上的跳蚤来传播, 如果被感染的老鼠死亡, 跳蚤就会去寻找其他的老鼠, 并且把鼠疫病传播到老鼠种群. 如果老鼠种群的密度低, 跳蚤寻找其他的寄主(人类), 所以人类的鼠疫病就由此发生. 这是鼠疫病的传播机制^[12]. 它可以通过一些数学模型来描述, 并且可以用在鼠疫病的控制问题之中. 文献[13]通过时空随机场理论和地理信息技术建立了随机鼠疫病模型和分布, 从而比较不同疾病的时空传播模式. 文献[14]利用相同方法建立了随机鼠疫病模型, 利用模型评价种群数量的影响并且研究其传染病病理学. 文献[15]拟合鼠疫病爆发的历史数据提出了鼠疫病的爆发模型, 估计出的模型参数值被应用在其他鼠疫病爆发的模型中. 文献[16]建立了鼠疫病模型, 分析了它对传染病流行病学的重要性. 一般来说, 鼠疫病模型的建立需要一些先验统计知识和大量的数据, 这导致了繁重的统计工作和模型的不精确性.

子空间辨识方法克服了以上建模的不足之处, 并且在数值计算中具有一定的鲁棒性. 又由于实际情况中存在随机扰动的影响, 考虑用卡尔曼滤波器进行降噪处理. 所以本文采用基于卡尔曼滤波器的核范数子空间辨识方法来建立随机鼠疫病的模型. 此方法的主要优点就是噪声的降低以及模型阶数的选择. 应用仿真例子说明改进的方法比传统的辨识方法具有较高的精确性.

2 基于卡尔曼滤波的随机鼠疫病模型的建立(A stochastic model of bubonic plague is built by Kalman filter)

考虑一类传染病, 其特点是感染者康复后对原病毒具有免疫力, 一个人终身最多被一种这样的疾病感染一次. 例如麻疹、水痘、鼠疫病等为此类传染病. 作者将总人口分为易感者、感染者和恢复者3类, 分别用 S 、 I 和 R 表示易感者、感染者和恢复者人数. 易感者一旦被感染就立即变成染病者, 感染者恢复后对此传

染并具有持久免疫力, 这样的模型为SIR模型^[17]. 其流程图如图1所示.

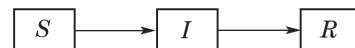


图1 SIR模型的流程图

Fig. 1 Flow chart of the SIR model

下面考虑一个鼠疫病的SIR模型^[12]:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r(S + R) - dS - \beta S\lambda, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S\lambda - (d + m)I, \\ \frac{dR}{dt} = mgI - dR, \end{cases} \quad (1)$$

其中: S 、 I 、 R 分别表示易感者、感染者和恢复者人数, r 是再生率, d 是死亡率, β 转移率, λ 是感染的跳蚤数, m^{-1} 是传染周期, g 是恢复率. 总人数为 $Z = S + I + R$.

模型(1)相应的矩阵形式是

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t), \\ Z(t) = BX(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中:

$$A = \begin{pmatrix} r - d - \beta\lambda & 0 & r \\ \beta\lambda & -(d + m) & 0 \\ 0 & mg & -d \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix}, B = (1 \ 1 \ 1).$$

考虑到随机扰动, 如天气、地理环境、病人的身体素质等影响, 模型(2)相应的带有随机扰动的模型为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + W(t), \\ Z(t) = BX(t) + V(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $W(t)$ 、 $V(t)$ 是零均值、白噪声信号.

$$M[W(t)W^T(t')] = Q(t)\delta(t - t'),$$

$$M[V(t)V^T(t')] = P(t)\delta(t - t'),$$

$M[\cdot]$ 是期望值算子, $Q(t)$ 、 $P(t)$ 是噪声强度, $\delta(\cdot)$ 是delta函数.

根据文献[18], 假设模型(3)的最优滤波器为

$$\dot{\hat{X}}(t) = C\hat{X}(t) + DZ(t), \quad (4)$$

其中 C 、 D 是不确定矩阵.

定义状态误差 $E(t) = \hat{X}(t) - X(t)$ 并且最小化 $M\{[E(t)][E(t)]^T\}$.

从模型(3)和相应的滤波器(4), 可以得到

$$\dot{\hat{X}}(t) - \dot{X}(t) = C\hat{X}(t) - AX(t) + DZ(t) - W(t),$$

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}(t) - \mathbf{W}(t).$$

更进一步, 有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}(t) = (\mathbf{C} - \mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{X}(t) + \mathbf{C}\mathbf{E}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}(t) - \mathbf{W}(t), \\ \mathbf{E}(t_0) = -\mathbf{Z}_0^0, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{Z}_0^0$ 是 $\mathbf{Z}_0$ 的中心化随机变量.

根据方程(5)和滤波器(4)的无偏性,

$$(\mathbf{C} - \mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{M}[\mathbf{X}(t)] = 0.$$

因为 $\mathbf{M}[\mathbf{X}(t)] \neq 0$, 有

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{B}. \quad (6)$$

把式(6)代入滤波器(4), 模型(3)相应的滤波器为

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{B})\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{Z}(t).$$

为了获得矩阵 $\mathbf{D}$, 必须满足以下条件:

$$\min_{\mathbf{D}} \mathbf{M}[\mathbf{E}^T(t)\mathbf{E}(t)] = \min_{\mathbf{D}} \mathbf{R}_E(t), \quad (7)$$

其中 $\mathbf{R}_E(t) = \text{tr}(\mathbf{R}(t))$, $\text{tr}(\cdot)$ 代表矩阵的迹.

条件(7)等价于

$$\max_{\mathbf{D}}(-\dot{\mathbf{R}}_E(t)) = \max_{\mathbf{D}}(-\text{tr}(\dot{\mathbf{R}}(t))). \quad (8)$$

把式(6)代入滤波器(5), 有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{E}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}(t) - \mathbf{W}(t), \\ \mathbf{E}(t_0) = -\mathbf{Z}_0^0. \end{cases} \quad (9)$$

方程(9)的解为

$$\mathbf{E}(t) = -\mathbf{Z}_0^0 \mathbf{g}(t, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(t, \tau)(\mathbf{D}(\tau)\mathbf{V}(\tau) - \mathbf{W}(\tau))d\tau, \quad (10)$$

其中 $\mathbf{g}(t, \tau)$ 是脉冲响应函数矩阵, $\mathbf{g}(t, t) = \mathbf{I}(t)$ 是单位阵.

对于式(8), 定义 $\mathbf{R}(t) = \mathbf{M}[\mathbf{E}(t)\mathbf{E}^T(t)]$. 利用式(10), $\dot{\mathbf{R}}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}(t) &= \frac{d\mathbf{M}[\mathbf{E}(t)\mathbf{E}^T(t)]}{dt} = \\ &\mathbf{M}[\dot{\mathbf{E}}(t)\mathbf{E}^T(t) + \mathbf{E}(t)\dot{\mathbf{E}}^T(t)] = \\ &(\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t)(\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{B})^T + \mathbf{D}\mathbf{Q}\mathbf{D}^T + \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (11)$$

为了得到 $\min_{\mathbf{D}} \mathbf{M}[\mathbf{E}^T(t)\mathbf{E}(t)]$, 必须满足以下条件:

$$\frac{\partial(\text{tr}\dot{\mathbf{R}})}{\partial \mathbf{D}^T} = 0,$$

也就是说,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}^T}(\text{tr}(-\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{B}^T\mathbf{D}^T + \mathbf{D}\mathbf{Q}\mathbf{D}^T)) = 0,$$

$$-\mathbf{B}\mathbf{R} - \mathbf{B}\mathbf{R}^T + \mathbf{Q}\mathbf{D}^T + \mathbf{Q}^T\mathbf{D}^T = 0,$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathbf{B}^T\mathbf{Q}^{-1}. \quad (12)$$

把式(12)代入式(11), 有

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{R}\mathbf{B}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R} + \mathbf{P}.$$

所以, 模型(3)的最优滤波器为

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{B}(t)\hat{\mathbf{X}}(t)),$$

其中: $\mathbf{D}$ 是稳态卡尔曼滤波器增益, $\mathbf{e}(t)$ 为零均值白噪声, 并且

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{Z}(t) - \mathbf{B}\hat{\mathbf{X}}(t).$$

定义 $\mathbf{e}(t)$ 的二阶矩为 $\mathbf{M}[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}(t)^T] = \mathbf{S}\delta(t)$, 其中 $\mathbf{S}$ 是噪声强度, $\delta(t)$ 是delta函数.

所以模型(3)转化为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t), \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{B}\mathbf{X}(t) + \mathbf{e}(t). \end{cases} \quad (13)$$

利用零阶保持器, 模型(13)相应的离散模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}\mathbf{e}(k), \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{B}\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k), \end{cases} \quad (14)$$

其中: $\mathbf{F} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}$, $\mathbf{K} = \int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}T} d\tau \mathbf{D}$, $\mathbf{e}(k)$ 是相应的噪声序列.

通常情况下, 鼠疫病模型是利用连续时间的微分方程来表示. 但实际上, 鼠疫病的染病者和恢复者人数的统计数据是一个离散序列. 所以用离散时间的模型去研究传染病, 能够更准确地反映鼠疫病传播的规律^[19]. 并且离散的鼠疫病模型在系统辨识和数值模拟方面比连续模型更加方便. 所以本文把模型(13)转化为离散形式(14), 再进行辨识. 在下部分中, 模型(14)的系数矩阵将被辨识.

3 核范数最小化子空间辨识 (Subspace identification by nuclear norm minimization)

在子空间辨识过程中, 奇异值分解是确定广义观测性矩阵列空间的基本工具. 去掉较小的奇异值会影响辨识模型的精确性. 换句话说, 确定一个模型合适的阶数常常是很困难的. 并且构造一个秩最优化的问题是非确定性多项式困难(non-deterministic polynomial-hard, NP-hard)问题. 核范数最小化方法是获得低秩矩阵逼近的有力工具, 从而就会获得合适的模型阶数.

3.1 输出序列投影矩阵的推导(The deriving of projection matrix of the output sequences)

根据文献[20-21]的记法, 首先定义模型(14)的广义状态空间模型为

$$\mathbf{Z}_f = \mathbf{F}_f \mathbf{X}_k + \mathbf{L}_f \mathbf{E}_f, \quad (15)$$

其中: 下标“f”表示“将来”, $\mathbf{X}_k$ 是状态序列, $\mathbf{E}_k$ 是

随机扰动矩阵, $\mathbf{F}_f$ 是广义能观矩阵, $\mathbf{L}_f$ 是 Toeplitz 矩阵, 表示如下:

$$\mathbf{X}_k = (\mathbf{x}_k \ \mathbf{x}_{k+1} \ \cdots \ \mathbf{x}_{k+N-1}),$$

其中:

$$\mathbf{F}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{BF} \\ \vdots \\ \mathbf{BF}^{f-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{BK} & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{BF}^{f-2}\mathbf{K} & \mathbf{BF}^{f-3}\mathbf{K} & \cdots & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

输出 Hankel 矩阵为

$$\mathbf{Z}_{0|2i-1} = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{j-1} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{i-1} & z_i & z_{i+1} & \cdots & z_{i+j-2} \\ z_i & z_{i+1} & z_{i+2} & \cdots & z_{i+j-1} \\ z_{i+1} & z_{i+2} & z_{i+3} & \cdots & z_{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{2i-1} & z_{2i} & z_{2i+1} & \cdots & z_{2i+j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0|i-1} \\ \mathbf{Z}_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p \\ \mathbf{Z}_f \end{pmatrix}.$$

对于模型(15), 定义

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{L}_z \mathbf{Z}_p + \mathbf{F}_K^p \mathbf{X}_{k-p}, \quad (16)$$

其中: 下标 “p” 表示 “过去”,

$$\mathbf{F}_K = \mathbf{F} - \mathbf{KB},$$

$$\mathbf{L}_z = [\mathbf{I}_K \ \mathbf{F}_K \mathbf{I}_K \ \cdots \ \mathbf{F}_K^{p-1} \mathbf{I}_K],$$

$$\mathbf{X}_{k-p} = [\mathbf{x}_{k-p} \ \mathbf{x}_{k-p+1} \ \cdots \ \mathbf{x}_{k-p+N-1}].$$

对于一个正数 p , 不论 p 取多大值, 有 $\mathbf{F}_K^p \cong 0$, 并且将式(16)代入式(15), 有

$$\mathbf{Z}_f = \mathbf{F}_f \mathbf{L}_z \mathbf{Z}_p + \mathbf{L}_f \mathbf{E}_f = \Psi \mathbf{Z}_p + \mathbf{L}_f \mathbf{E}_f. \quad (17)$$

由于 $\mathbf{E}_f$, $\mathbf{Z}_p$ 是不相关的, 有

$$\frac{1}{N} \mathbf{E}_f \mathbf{Z}_p^T \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

对于模型(17), 有

$$\mathbf{Z}_f \mathbf{Z}_p^T = \Psi \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T + \mathbf{L}_f \mathbf{E}_f \mathbf{Z}_p^T = \Psi \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T,$$

所以 $\Psi = \mathbf{Z}_f \mathbf{Z}_p^T (\mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T)^{-1}$, 可以得到

$$\Theta = \Psi \mathbf{Z}_p = \mathbf{F}_f \mathbf{L}_z \mathbf{Z}_p = \mathbf{W}_1 \Psi \mathbf{W}_2 \simeq \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T, \quad (18)$$

其中 $\mathbf{W}_1$ 和 $\mathbf{W}_2$ 是加权矩阵,

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{W}_2 = (\mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T)^{\frac{1}{2}}.$$

传统的子空间辨识方法是对式(18)进行奇异值分解, 确定广义能观性矩阵列空间, 从而求得系统(14)的系统矩阵 $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{B}$. 改进的核范数最小化方法是对式(18)构造优化问题, 得到最优输出序列之后进行系统矩阵的辨识. 具体方法见以下部分.

3.2 系统矩阵的辨识(The identifying of the system matrices)

子空间辨识过程中构建低秩矩阵逼近, 但是却不能保证获得模型的最优阶数. 本文设计基于核范数的子空间辨识方法来解决以上问题. 具体步骤如下:

步骤1 构建核范数最小化问题.

构造低秩矩阵逼近优化问题为

$$\min_z \text{rank} \Theta(z), \quad (19)$$

其中 z 是最优变量.

实际上, 秩最小化问题是 NP-hard 问题^[20], 所以问题(19)转化为

$$\min_z \|\Theta\|_* + \beta \|z - z_m\|_2^2, \quad (20)$$

其中: $\|\cdot\|_*$ 是核范数, $\Theta(z)$ 是线性函数, 第2项是二次惩罚, β 是加权参数.

步骤2 求解核范数最小化优化问题.

下面采用交替方法乘子法求解此优化问题. 定义一个新变量 $\mathbf{Y} = -\Theta(z)$, 问题(20)的增广拉格朗日问题为

$$L_\rho(\mathbf{Y}, z, \Delta) = \|\mathbf{Y}\|_* + \frac{1}{2} \|z - z_m\|_2^2 - \langle \Delta, \mathbf{Y} + \Theta(z) \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Y} + \Theta(z)\|_F^2, \quad (21)$$

其中: $\rho > 0$ 是惩罚参数, $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数, Δ 是对偶变量.

这个过程通过多步迭代完成. 并且每步迭代包括 $\mathbf{Y}$ -最小化, z -最小化, 并且更新 Δ .

应用式(21), 给出

$$\begin{cases} (z - z_m) + \Delta \Theta^* + \rho \Theta^*(\Theta(z) - \mathbf{Y}) = 0, \\ z - z_m + \Delta \Theta^* + \rho \Theta^*(\Theta(z) - \rho \Theta^* \mathbf{Y}) = 0, \\ z + \rho N z = \Theta^*(\rho \mathbf{Y} - \Delta) + z_m, \end{cases} \quad (22)$$

其中: Θ^* 是矩阵 Θ 的伴随矩阵, N 是半正定矩阵, 且满足 $Nz = \Theta^*(\Theta(z))$.

从条件(22), 有

$$\begin{cases} z = (\rho N)^{-1} (\Theta^*(\rho \mathbf{Y} - \Delta) + z_m), \\ \mathbf{Y} = \mathbf{U} \mathcal{D}_{\frac{1}{\rho}} (\Theta(z) + \frac{\Delta}{\rho}) \mathbf{V}^T, \\ \Delta = \Delta + \rho (\Theta(z) - \mathbf{Y}), \end{cases} \quad (23)$$

其中: $\mathcal{D}_{\frac{1}{\rho}}(\cdot)$ 是软阈值算子,

$$\mathcal{D}_{\frac{1}{\rho}}(\Theta + \frac{\Delta}{\rho}) = \text{diag}\{\max(0, \sigma - \frac{1}{\rho})\},$$

U, V, σ 可以通过 $\Theta(z) + \frac{\Delta}{\rho} = U \text{diag}\{\sigma\} V^T$ 奇异值分解来得到.

步骤3 终止条件.

得到 z, Y 和 Δ 之后, 改进方法的终止条件定义为

$$\|r^k\| = \Theta(z) - Y,$$

$$\|s^k\| = \rho \Theta^*(Y^p - Y),$$

$$\epsilon^p = \sqrt{pq} \epsilon^a + \epsilon^r \max\{\|\Theta(z)\|_F, \|Y\|_F\},$$

$$\epsilon^d = \sqrt{n} \epsilon^a + \epsilon^r \|\Theta^*(\Delta)\|_2,$$

其中: 矩阵 Y^p 是 Y 的前项迭代值, ϵ^a 是绝对误差, ϵ^r 是相对误差.

在凸优化问题中, 惩罚参数 ρ 经常取一个常数, 这会降低方法达到一致性的速度.

所以, 定义

$$\rho := \begin{cases} \tau \rho, & \|r^k\|_F > \mu \|s^k\|_2, \\ \frac{\rho}{\tau}, & \|s^k\|_2 > \mu \|r^k\|_F, \\ \rho, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\mu > 1$ 并且 $\tau > 1$ 是参数(通常定义 $\mu = 10, \tau = 2$).

所以改进方法的终止条件是 $\|r^k\| \leq \epsilon^p, \|s^k\| \leq \epsilon^d$.

步骤4 辨识系统矩阵.

为了得到式(15)的能观性矩阵 Γ_f , 在计算出 z 之后, 可以对 $\Theta(z)$ 进行奇异值分解:

$$\Theta(z) = \Psi Z_p = \Gamma_f L_z Z_p = W_1 \Psi W_2 \simeq U_n S_n V_n^T. \quad (24)$$

更进一步, 有

$$\Gamma_f = U_n S_n^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

根据式(25), 系统矩阵 $\hat{F}, \hat{B}$ 可以通过 Γ_f 得到

$$\hat{F} = \Gamma_{f-1}^\dagger \Gamma_f^{2:f}, \hat{B} = \Gamma_f(1:n_y, :),$$

其中: Γ_{f-1} 是 Γ_f 的 $(f-1)$ 块行, 上方标注 $\dagger$ 表示相应的广义逆矩阵, $\Gamma_f^{2:f} = \Gamma_{f-1} F$.

系统矩阵 $\hat{K}$ 为

$$\hat{K} = \arg \min \left\{ \sum_{k=1}^N \|x_k - \hat{K} e_k\|^2 \right\}.$$

4 仿真研究(Simulations)

为了证明提出方法的有效性, 利用世界卫生组织从1954年到2010年关于非洲人类鼠疫病的数据, 可参照网址 (<http://www.who.int/gho/publications/world-health-statistics/en/>), 染病者人数和恢复者人数数据长度为 $n = 1000$, 其数据具有非高斯、非线性特点. 通过模型(14), 其中 $e(k)$ 为均值为零, 方差为1的高斯白噪声序列. 用第3.1节中传统的子空间辨识方法N4SID (numerical algorithms for subspace state space system

identification), 利用式(18)对染病者人数和恢复者人数构造投影矩阵 Θ , 确定广义能观性矩阵 Γ_f 列空间, 然后得到系统矩阵为

$$F = \begin{pmatrix} 0.1191 & 0.6749 & -0.0604 \\ -0.0680 & 0.1806 & 0.8216 \\ 0.2957 & -0.0494 & 0.3896 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -0.7609 & 0.0366 & 0.1186 \\ 0.0644 & 0.4182 & 0.1366 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} -1.2281 & -0.6449 \\ -1.0912 & 1.2148 \\ 0.7248 & -0.6299 \end{pmatrix}.$$

用改进的核范数子空间辨识方法, 首先根据式(18)得到染病者人数和恢复者人数投影矩阵 Θ , 对其利用式(19)构建核范数最小化问题, 然后通过第3.2节中式(21)求解此问题, 利用式(23)更新 z, Y, Δ , 得到最优输出序列 z . 最后对式(24)进行奇异值分解, 通过式(25)确定的广义能观性矩阵 Γ_f , 得到系统矩阵为

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0.1211 & 0.7085 & -0.0598 \\ -0.0711 & 0.1775 & 0.8015 \\ 0.3025 & -0.0521 & 0.4120 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -0.7505 & 0.0322 & 0.1098 \\ 0.0599 & 0.4256 & 0.1299 \end{pmatrix},$$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -1.1992 & -0.8950 \\ -1.1003 & 1.1056 \\ 0.7320 & -0.6022 \end{pmatrix}.$$

传统方法与改进方法的最大奇异值指标的比较如图2所示. 可以看出, 改进方法的最大奇异值比经典方法要低, 这说明改进方法得到的投影矩阵(18)秩比经典方法有更低的秩, 所以更容易得到模型(14)的阶数.

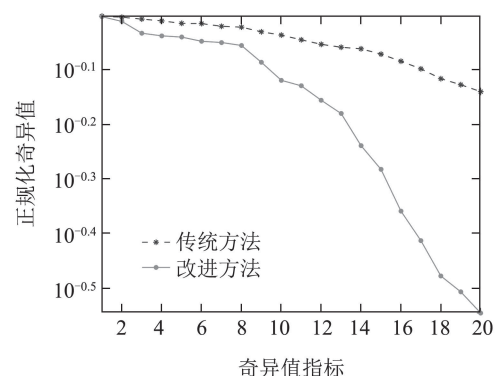


图2 传统方法与改进方法的最大奇异值指标
Fig. 2 The largest singular values index of the traditional method and improved method

真实模型和传统方法以及改进方法辨识模型的伯德图分别如图3-4所示. 比较图3-4, 可以看出图4中真实模型和辨识模型的增益曲线比图3更逼近. 这说明改进的核范数子空间辨识方法比传统的子空间方法辨识的随机鼠疫病模型有更高的精确性.

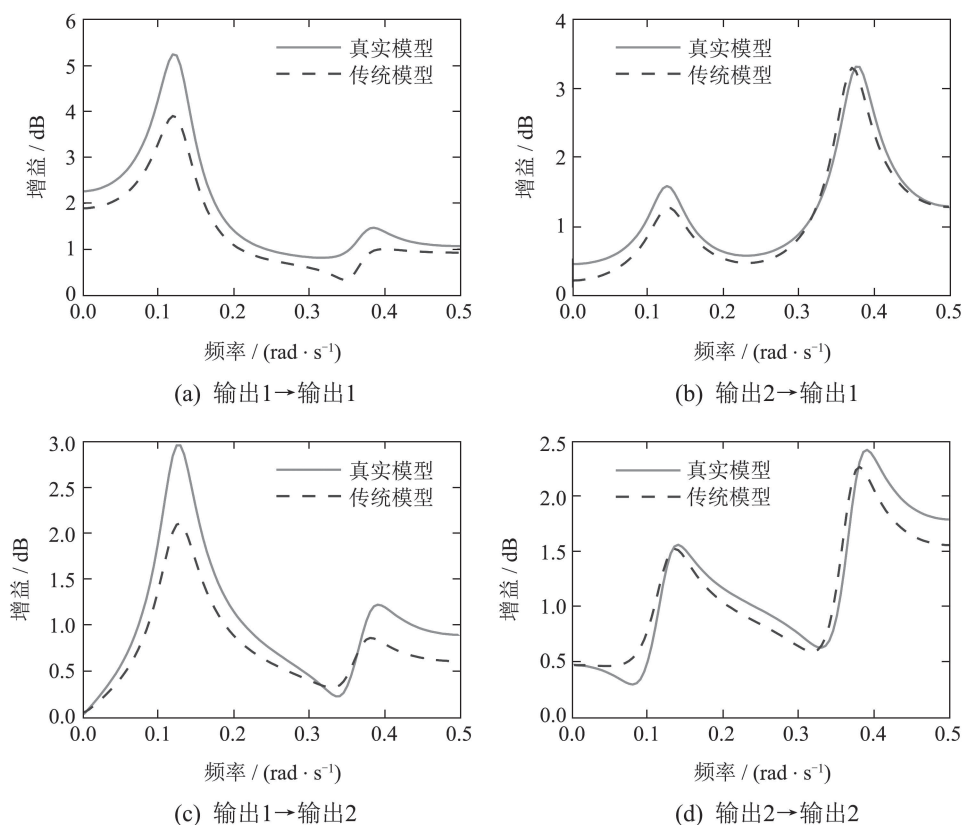


图 3 真实模型和传统方法辨识模型的伯德图

Fig. 3 The Bode Plot of real model and identified model by the traditional method

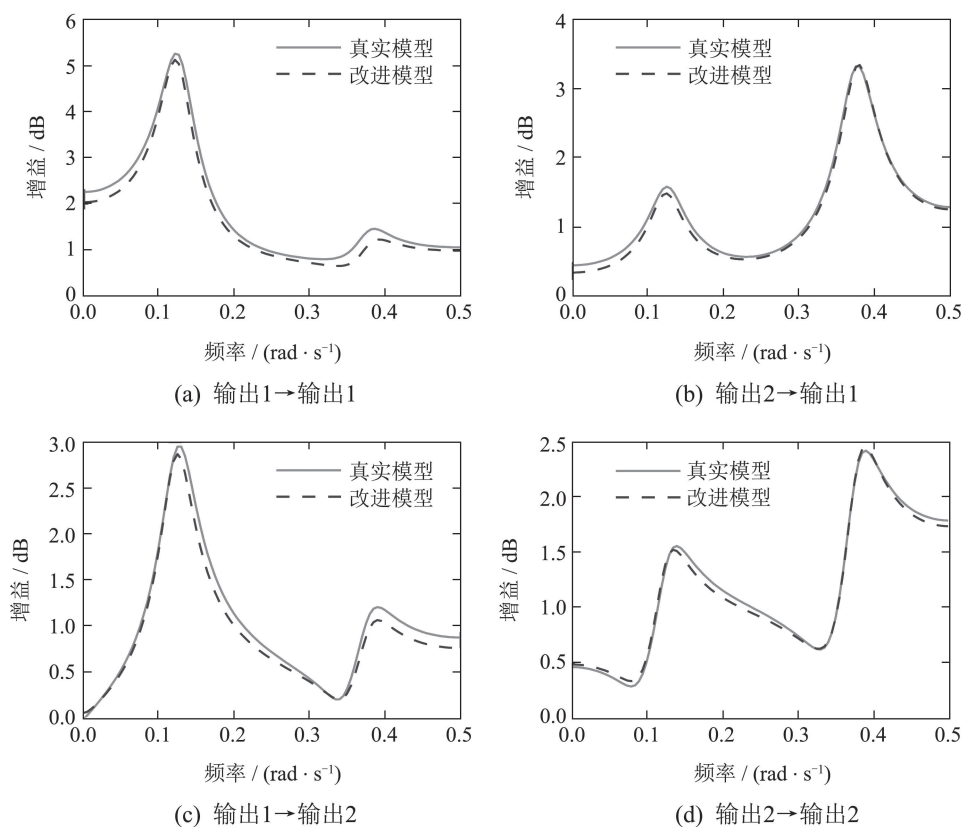


图 4 真实模型和改进方法辨识模型的伯德图

Fig. 4 The Bode Plot of real model and identified model by the improved method

为了评估提出方法的性能,采用均方根误差(root mean squared error, RMSE)和预测误差平方和(sum of squares of the prediction error, SSPE)指标^[22-23],计算公式分别如下:

$$\text{RMSE} = \frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|}{n}, \quad (26)$$

其中: n 是数据长度, $\hat{\mathbf{y}}$ 系统(14)的预测输出.

$$\text{SSPE} = 100 \left(\frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{y}^2\|} \right). \quad (27)$$

传统的N4SID方法和改进的核范数子空间辨识方法的预测误差如表1所示.

表1 传统的N4SID方法和改进的核范数子空间辨识方法模型的预测误差

Table 1 Prediction error of traditional N4SID and improved method models

	传统方法		改进方法	
	RMSE	SSPE	RMSE	SSPE
染病者人数	0.0421	0.0395	0.0356	0.0331
恢复者人数	0.0352	0.0415	0.0235	0.0324

从表1的预测结果可以看出,改进的核范数子空间辨识方法的RMSE和SSPE指标都比传统的N4SID方法要小,这说明改进的子空间辨识方法比传统的辨识方法具有更高的辨识精度.

5 结论(Conclusions)

本文提出了基于卡尔曼滤波器的核范数子空间辨识的改进方法.在辨识过程中设计卡尔曼滤波器,估计系统的状态并降低噪声的影响.通过核范数最小化方法得到了输出投影矩阵的低秩矩阵逼近,从而降低了确定系统阶数的困难.所提出的方法成功地解决了随机鼠疫病模型的建立问题,仿真结果表明提出的方法有更好的辨识性能.

参考文献(References):

- [1] ZHAO Jianyuan, LI Xingfei, TIAN Lingzi. Orthogonal subspace identification in the presence of colored noise [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(1): 43–49.
(赵建远, 李醒飞, 田凌子. 有色噪声背景下的正交子空间辨识 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(1): 43–49.)
- [2] YU C P, VERHAEGEN M. Blind multivariable ARMA subspace identification [J]. *Automatica*, 2016, 66: 3–14.
- [3] GUNES B, WINGERDEN J W V, VERHAEGEN M. Predictor-Based Tensor Regression (PBTR) for LPV subspace identification [J]. *Automatica*, 2017, 79: 235–243.
- [4] YANG Hua, LI Shaoyuan. *Subspace methods for system identification and predictive control design* [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2007.
(杨华, 李少远. 基于子空间方法的系统辨识及预测控制设计 [D]. 上海: 上海交通大学, 2007.)
- [5] FAZEL M, HINDI H, BOYD S P. A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation [C] // *Proceedings of the 2001 American Control Conference*. Arlington, USA: IEEE, 2001, 6: 4734–4739.

- [6] FAZEL M. *Matrix rank minimization with applications* [D]. Palo Alto: Stanford University, 2002.
- [7] LIU Z, VANDENBERGHE L. Interior-point method for nuclear norm approximation with application to system identification [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2009, 31(3): 1235–1256.
- [8] MOHAN K, FAZEL M. Reweighted nuclear norm minimization with application to system identification [C] // *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. Baltimore, USA: IEEE, 2010: 2953–2959.
- [9] LI Y F, ZHANG Y J, HUANG Z H. A reweighted nuclear norm minimization algorithm for low rank matrix recovery [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 263(1): 338–350.
- [10] LIN X F, WEI G. Accelerated reweighted nuclear norm minimization algorithm for low rank matrix recovery [J]. *Signal Processing*, 2015, 114(C): 24–33.
- [11] LIANG D, KRISTIAAN P. On the nuclear norm heuristic for a Hankel matrix completion problem [J]. *Automatica*, 2015, 51: 268–272.
- [12] YU M, LIU J C, ZHAO L C, et al. Subspace identification for a stochastic model of bubonic plague [C] // *Proceedings of the 35th Chinese Control Conference*. Chengdu, China: IEEE, 2016, 2020–2024.
- [13] YU H L, CHRISTAKOS G. Spatiotemporal modelling and mapping of the bubonic plague epidemic in India [J]. *International Journal of Health Geographics*, 2006, 5(1): 1–12.
- [14] CHRISTAKOS G, OLEA R A, YU H L. Recent results on the spatiotemporal modelling and comparative analysis of Black Death and bubonic plague epidemics [J]. *Public Health*, 2007, 121(9): 700–720.
- [15] MONECKE S, MONECKE H, MONECKE J. Modelling the black death. A historical case study and implications for the epidemiology of bubonic plague [J]. *International Journal of Medical Microbiology*, 2009, 299(8): 582–593.
- [16] SKOG L, HAUSKA H. Spatial modeling of the black death in Sweden [J]. *Transactions in GIS*, 2013, 17(4): 589–611.
- [17] MURRAY J D. *Mathematical Biology I: An Introduction* [M]. Third Edition. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [18] FANG Y W. *Optimal Control for Stochastic Systems* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.
- [19] MA Z E, LI J. *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics* [M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2009.
- [20] OVERSCHEE P V, VAN OVERSCHEE M B D P, DE MOOR B. *Subspace identification for linear systems: theory, implementation, applications* [D]. Netherlands: Kluwer Academic, 1996.
- [21] YU M, LIU J C. Subspace identification for a stochastic model of plague [J]. *International Journal of Biomathematics*, 2016, 9(5): 1–21.
- [22] SHANG Liangliang, LIU Jianchang, TAN Shubin, et al. Soft sensor modeling for multimode process based on adaptive efficient recursive canonical variate analysis [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(3): 380–386.
(商亮亮, 刘建昌, 谭树彬, 等. 基于自适应高效递推规范变量分析的多模过程软传感器建模 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(3): 380–386.)
- [23] SHANG L L, LIU J C, TURKSON K. Stable recursive canonical variate state space modeling for time-varying processes [J]. *Control Engineering Practice*, 2015, 36(36): 113–119.

作者简介:

于 淼 (1986–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为系统辨识、预测控制等, E-mail: yumiaofly@126.com;

刘建昌 (1960–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂过程建模、控制与优化等研究, E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn;

赵立纯 (1964–), 女, 博士, 教授, 目前研究方向为生态系统建模、控制等, E-mail: lczhao36@163.com.