

给定环境下稳定开放量子系统的哈密顿量方法

闫家臻, 匡森[†], 陈蒙西, 丛爽

(中国科学技术大学 信息科学技术学院自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 针对耗散已知情况下Lindblad主方程描述的开放量子系统, 本文通过哈密顿量的设计实现了系统对于目标平衡态的稳定化. 借助相干矢量体系, 将矩阵形式下的原始系统模型转换为一个矢量形式的线性系统, 并证明了变换前后系统稳定属性的等价性. 通过保证矢量化线性系统模型的稳定性, 并使系统的唯一平衡态等于期望的目标态, 得到了系统哈密顿量的设计框架. 特别地, 本文讨论了两类条件下系统哈密顿量各元素的范围, 并指出根据它们的交集即可构成所设计的系统哈密顿量. 最后, 在一个两能级系统上进行了数值仿真实验, 验证了本文哈密顿量稳定化方案的有效性.

关键词: 开放量子系统; 模型变换; 哈密顿量设计; 稳定化; 相干矢量

中图分类号: TP13 文献标识码: A

Hamiltonian method for the stabilization of open quantum systems with given dissipations

YAN Jia-zhen, KUANG Sen[†], CHEN Meng-xi, CONG Shuang

(Department of Automation, School of Information Science and Technology, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: For open quantum systems described by the Lindblad master equation under given dissipations, this paper achieves the stabilization of the target equilibrium state by designing the system Hamiltonians. Via the coherence vector framework, the original matrix system model is transformed into a vector linear system and their stability equivalence is proved. By guaranteeing the stability of the vectorized linear model and letting its unique equilibrium state equal the desired target state, a frame for the design of the system Hamiltonian is obtained. In particular, this paper discusses the value range of the elements of the system Hamiltonian under these two conditions and points out that the system Hamiltonian can be obtained from their intersection set. Numerical simulation experiments on a two level system verify the effectiveness of the proposed Hamiltonian stabilization scheme.

Key words: open quantum systems; model transform; Hamiltonian design; stabilization; coherence vector

1 引言(Introduction)

量子态的制备、操纵和测量是量子控制中的重要研究内容^[1-2]. 其中, 量子态的操纵, 也称为量子系统的状态控制, 在量子信息技术中有着重要作用, 是量子计算、量子通信以及量子密码等技术中不可或缺的操作^[3]. 在量子信息工程中, 量子态是信息的载体, 对量子信息的传输与处理本质上是对量子态的操纵过程^[4]. 使用控制场制备或操纵量子态使其达到期望的目标, 也是量子态工程 (quantum state engineering, QSE)的实现方式之一^[5-7].

按是否与外界环境发生相互作用可将量子系统分

为封闭量子系统和开放量子系统. 封闭量子系统的量子态控制已经取得了大量的研究成果, 常见的控制方法有最优控制^[8-9]、滑模控制^[10-11]、李雅普诺夫控制^[12-14]以及不相干控制^[15]等. 近年来, 基于测量的反馈控制^[16-17]、切换反馈控制^[18-20]以及相干反馈控制^[21-23]已被相继提出和研究, 它们均可用于实现量子系统的状态转移. 由于实际系统不能与环境完全隔离, 因此开放量子系统的研究具有重要意义. 近年来, 开放量子系统的状态控制也取得了很大的进展, 很多量子态控制方案已被提出, 例如: 文献[24]通过设计热库来实现Lindblad主方程描述的Markovian开放量子

收稿日期: 2017-08-29; 录用日期: 2017-11-02.

[†]通信作者. E-mail: skuang@ustc.edu.cn.

本文责任编辑: 席在荣.

安徽省自然科学基金项目(1708085MF144), 国家自然科学基金项目(61773370, 61573330)资助.

Supported by Anhui Provincial Natural Science Foundation (1708085MF144) and National Natural Science Foundation of China (61773370, 61573330).

系统的状态稳定化. 文献[25–26]利用专门的最优控制策略和优化算法实现量子态驱动和量子逻辑门的制备. 绝热控制(adiabatic control)是开放系统的控制方案之一, 它通过保证开放量子系统的哈密顿量在一个绝热的环境中变化, 使得相干控制场不受环境波动的影响, 因此具有较强的鲁棒性^[27]. 文献[28]通过设计一个时变无消相干子空间(time-dependent decoherence-free subspace)来操控开放系统的量子态严格跟随该时变无消相干子空间的演化, 以便使得系统能够抵御消相干的影响并演化到目标态, 此方法是绝热控制的一个实现. 此外, 逆控制(inverse control)通过分析已知初始态与目标态以及系统的动力学不变算子之间的数学关系, 设计得到了一个时变哈密顿量来引导系统向目标态演化, 最终稳定在期望的目标态上^[29].

本文研究Lindblad主方程模型下开放量子系统的状态控制问题, 提出一种通过设计系统的哈密顿量实现开放量子系统对于目标平衡态收敛性的控制方法. 特别地, 本文借助相干矢量体系, 将原开放量子系统进行矢量化变换, 继而证明变换前后系统的稳定属性具有等价性. 通过对矢量化线性方程的稳定性进行分析, 并基于给定的期望目标态来构造系统哈密顿量, 使得系统渐近稳定到目标态.

2 问题描述(Problem description)

2.1 系统模型(System model)

本文考虑Lindblad主方程描述的马尔科夫开放量子系统, 其形式如下:

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \mathcal{L}_D \rho(t), \quad (1)$$

其中 ρ 是描述系统状态的密度矩阵, 它是一个正定、么迹的厄米算子; $i^2 = -1$; H 是系统哈密顿量, 是一个厄米矩阵; $\mathcal{L}_D \rho(t)$ 是系统演化的非么正部分, 用于描述由系统自发辐射或与环境耦合所引起的耗散、跃迁和消相干作用, 即

$$\mathcal{L}_D \rho(t) = \sum_d D[V_d] \rho(t), \quad (2)$$

$$D[V_d] \rho(t) = V_d \rho(t) V_d^\dagger - \frac{1}{2} \{V_d^\dagger V_d, \rho(t)\}. \quad (3)$$

这里: V_d 是Lindblad算子, 表征能级间的耗散通道; 常数 $d > 0$ 表示系统所处环境中包含的耗散通道数量.

设 ρ_1, ρ_2 为 N 维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中任意两个密度算子, 利用Hilbert-Schmidt距离(简称HS距离)来描述两个量子态之间的距离^[30]:

$$d_{\text{HS}}(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{\text{tr}((\rho_1 - \rho_2)^\dagger (\rho_1 - \rho_2))}. \quad (4)$$

在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中选取一组正交基 $\{\sigma_k\} (k = 1, \dots, N^2)$, 其中 $\sigma_{N^2} = \frac{1}{\sqrt{N}} I$, 而对于 $k \neq N^2$, 令 $k \triangleq k(r, s) \triangleq r + (s-1)N$, $1 \leq r \leq N-1$, $r < s \leq N$,

则有

$$\sigma_{rs} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}(|r\rangle\langle s| + |s\rangle\langle r|),$$

$$\sigma_{sr} \triangleq i \frac{1}{\sqrt{2}}(-|r\rangle\langle s| + |s\rangle\langle r|),$$

$$\sigma_{rr} \triangleq \frac{1}{\sqrt{r+r^2}} \left(\sum_{k=1}^r |k\rangle\langle k| - r|r+1\rangle\langle r+1| \right).$$

以 $\{\sigma_k\}_{k=1}^{N^2}$ 为基底, 则任一密度算子 ρ 可以表示为

$\rho = \sum_{k=1}^{N^2} r_k \sigma_k$. 其中列向量 $\mathbf{r} = (r_k)_{k=1}^{N^2} \in \mathbb{R}^{N^2}$ 称为 ρ 的相干矢量, 且 $r_k = \text{tr}(\sigma_k \rho)$. 此外, 定义 $\mathbf{r}$ 的 $N^2 - 1$ 维降维列向量为 $\mathbf{s}$, 即 $\mathbf{r} = (\mathbf{s}^T, 1/\sqrt{N})^T$.

命题 1 系统状态 ρ_1 与 ρ_2 之间的HS距离同其相应的降维列向量 $\mathbf{s}_1$ 与 $\mathbf{s}_2$ 之间的欧几里德距离相等, 即 $d_{\text{HS}}(\rho_1, \rho_2) = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|$.

证 由于 ρ_1 与 ρ_2 均为厄米算子, 所以

$$d_{\text{HS}}(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{\text{tr}(\rho_1 - \rho_2)^2}.$$

注意到 $\text{tr}(\sigma_k \sigma_l) = \delta_{kl}$, 有

$$\begin{aligned} d_{\text{HS}}(\rho_1, \rho_2) &= \sqrt{\text{tr}(\rho_1 - \rho_2)^2} = \\ &= \sqrt{\text{tr}(\rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{N^2} r_{1k}^2 - 2 \sum_{k=1}^{N^2} r_{1k} r_{2k} + \sum_{k=1}^{N^2} r_{2k}^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{N^2} (r_{1k} - r_{2k})^2}. \end{aligned}$$

因为 $\sigma_{N^2} = \frac{1}{\sqrt{N}} I$, $r_{N^2} = \text{tr}(\sigma_{N^2} \rho) = \frac{1}{\sqrt{N}}$, 所以

$$r_{1N^2}^2 - 2r_{1N^2}r_{2N^2} + r_{2N^2}^2 = \frac{1}{N} - \frac{2}{N} + \frac{1}{N} = 0.$$

进而

$$\begin{aligned} d_{\text{HS}}(\rho_1, \rho_2) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{N^2} (r_{1k} - r_{2k})^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{N^2-1} (s_{1k} - s_{2k})^2} = \\ &= \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|. \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)表明, 系统状态 ρ_1 与 ρ_2 之间的HS距离同其相应的降维列向量 $\mathbf{s}_1$ 与 $\mathbf{s}_2$ 之间的欧几里德距离相等, 即 $d_{\text{HS}}(\rho_1, \rho_2) = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|$.

命题1意味着, 降维列向量之间的距离可以用来表征系统状态之间的距离. 当变量 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0$ 时, 对应 $\rho(t) \rightarrow \rho_0$.

2.2 系统模型的矢量化 (Vectorization of system model)

本文的控制目标是实现开放量子系统(1)对于其目

标平衡态的稳定化. 为了方便分析, 本节借助相干矢量体系将原系统模型进行矢量化变换. 由命题1可知, 若将系统主方程(1)经正交变换转化为关于 $\mathbf{s}$ 的方程, 那么考察系统状态 ρ 的稳定性问题就可以转化为考察 $\mathbf{s}$ 的稳定性问题. 下面将系统主方程转化为关于 $\mathbf{s}$ 的方程.

命题2 以 $\{\sigma_k\}_{k=1}^{N^2}$ 为基底对 ρ 展开, 则系统主方程(1)可变换为关于 $\mathbf{s}$ 的如下方程:

$$\dot{\mathbf{s}} = A\mathbf{s} + \mathbf{c}, \quad (6)$$

其中: A 是一个 $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ 的方阵, 其第 m 行第 n 列的元素为

$$A_{mn} = \text{tr}(\text{i}H[\sigma_m, \sigma_n]) + \sum_d (\text{tr}(V_d^\dagger \sigma_m V_d \sigma_n) - \frac{1}{2} \text{tr}(V_d^\dagger V_d \{\sigma_m, \sigma_n\}));$$

$\mathbf{c}$ 为一个 $N^2 - 1$ 维的列向量, 其第 m 个元素为

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_d \text{tr}([V_d, V_d^\dagger] \sigma_m), \quad 1 \leq m \leq N^2 - 1.$$

证 首先将主方程(1)转换为关于 $\mathbf{r}$ 的方程. 对 $\mathbf{r}$ 求导, 可得向量 $\dot{\mathbf{r}}$ 的第 m 个元素 $\dot{r}_m$ 为

$$\begin{aligned} \dot{r}_m &= \text{tr}(\sigma_m \dot{\rho}) = \\ &= \text{tr}(\sigma_m (-\text{i}[H, \rho] + \mathcal{L}_D \rho)) = \\ &= \text{tr}(\sigma_m (-\text{i}[H, \rho])) + \text{tr}(\sigma_m \mathcal{L}_D \rho), \end{aligned} \quad (7)$$

分别计算式(7)最后一个等式右边的两个求迹运算, 有:

$$\begin{aligned} &\text{tr}(\sigma_m (-\text{i}[H, \rho])) = \\ &\text{tr}(\text{i}H[\sigma_m, \rho]) = \\ &\text{tr}(\text{i}H[\sigma_m, r_1 \sigma_1 + \cdots + r_n \sigma_n + \cdots + r_{N^2} \sigma_{N^2}]) = \\ &\text{tr}(\text{i}H[\sigma_m, \sigma_1]) r_1 + \cdots + \text{tr}(\text{i}H[\sigma_m, \sigma_n]) r_n + \cdots + \\ &\text{tr}(\text{i}H[\sigma_m, \sigma_{N^2}]) r_{N^2} = \\ &(L_{m1}, \cdots, L_{mn}, \cdots, L_{mN^2}) \cdot \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $L_{mn} = \text{tr}(\text{i}H[\sigma_m, \sigma_n]), 1 \leq n \leq N^2$.

$$\begin{aligned} &\text{tr}(\sigma_m \mathcal{L}_D \rho) = \\ &\text{tr}(\sigma_m \sum_d (V_d \rho V_d^\dagger - \frac{1}{2} \{V_d^\dagger V_d, \rho\})) = \\ &\sum_d (\text{tr}(\sigma_m V_d \rho V_d^\dagger - \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_m \{V_d^\dagger V_d, \rho\}))) = \\ &\sum_d (\text{tr}(V_d^\dagger \sigma_m V_d \rho - \frac{1}{2} \text{tr}(V_d^\dagger V_d \{\sigma_m, \rho\}))). \end{aligned} \quad (9)$$

将 $\rho = r_1 \sigma_1 + \cdots + r_n \sigma_n + \cdots + r_{N^2} \sigma_{N^2}$ 代入式(9)得

$$\text{tr}(\sigma_m \mathcal{L}_D \rho) = (D_{m1}, \cdots, D_{mn}, \cdots, D_{mN^2}) \cdot \mathbf{r}, \quad (10)$$

其中

$$D_{mn} = \sum_d (\text{tr}(V_d^\dagger \sigma_m V_d \sigma_n) - \frac{1}{2} \text{tr}(V_d^\dagger V_d \{\sigma_m, \sigma_n\})).$$

将式(8)(10)代入式(7), 可以得到关于 $\mathbf{r}$ 的矩阵微分方程为

$$\dot{\mathbf{r}} = \tilde{A}\mathbf{r}, \quad (11)$$

其中 $\tilde{A}$ 的第 (m, n) 个元素为

$$\tilde{A}_{mn} = L_{mn} + D_{mn}, \quad 1 \leq m, n \leq N^2. \quad (12)$$

对于正交基 $\{\sigma_k\}_{k=1}^{N^2}$, 已取 $\sigma_{N^2} = \frac{1}{\sqrt{N}} I$. 由于 $r_{N^2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{tr}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{N}}$ 为常数, 因此 $\dot{r}_{N^2} = 0$. 下面, 分3种情况考查矩阵 $\tilde{A}$ 的第 N^2 行元素与第 N^2 列元素.

1) 当 $m = N^2$ 且 $n \neq N^2$ 时,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{N^2 n} &= L_{N^2 n} + D_{N^2 n} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \text{tr}(\text{i}H[I, \sigma_n]) + \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_d (\text{tr}(V_d^\dagger V_d \sigma_n) - \text{tr}(V_d^\dagger V_d \sigma_n)) = 0. \end{aligned}$$

2) 当 $m \neq N^2$ 且 $n = N^2$ 时,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{m N^2} &= L_{m N^2} + D_{m N^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \text{tr}(\text{i}H[\sigma_m, I]) + \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_d (\text{tr}(V_d^\dagger \sigma_m V_d) - \text{tr}(V_d^\dagger V_d \sigma_m)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_d (\text{tr}([V_d, V_d^\dagger] \sigma_m)). \end{aligned}$$

3) 当 $m = N^2$ 且 $n = N^2$ 时,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{N^2 N^2} &= L_{N^2 N^2} + D_{N^2 N^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \text{tr}(\text{i}H[I, I]) + \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_d (\text{tr}(V_d^\dagger V_d) - \text{tr}(V_d^\dagger V_d)) = 0. \end{aligned}$$

这样, 可以得到如下方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \sqrt{N} \mathbf{c} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} \end{bmatrix},$$

即

$$\dot{\mathbf{s}} = A\mathbf{s} + \mathbf{c}, \quad (13)$$

其中: A 为 $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ 矩阵, 且

$$A_{mn} = L_{mn} + D_{mn} (1 \leq m, n \leq N^2 - 1);$$

$\mathbf{c}$ 为 $(N^2 - 1) \times 1$ 维列向量, 且

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_d (\text{tr}([V_d, V_d^\dagger] \sigma_m)), \quad 1 \leq m \leq N^2 - 1.$$

证毕.

下面, 考查系统(6)的稳定性, 以便分析系统(1)的

稳定性.

3 主要结果(Main results)

本节, 首先分析系统(6)的稳定性, 然后借助所得到的稳定性结果获取系统(1)的稳定性条件, 最后根据所得到的稳定性条件构造系统的哈密顿量. 若一个系统的状态演化方程满足 $\dot{\rho} = 0$, 那么称 ρ 为系统的一个稳态或平衡态^[24]. 记 $\mathcal{E}_{ss} = \{\rho : \dot{\rho} = 0\}$ 为系统(1)的稳态集合. 应该说明, 对于一些特殊的系统, 容易找出系统的稳态集合. 例如, 对于无耗散项的系统($\mathcal{L}_D(\rho) \equiv 0$), 容易看出系统的稳态就是与系统哈密顿量对易的状态, 即 $\mathcal{E}_{ss} = \{\rho : [H, \rho] = 0\}$; 对于一个纯耗散系统($H = 0$), 其主方程可以写成 $\dot{\rho} = D(V)\rho = -\frac{1}{2}[V, [V, \rho]]$, 因此系统的稳态集合是 $\mathcal{E}_{ss} = \{\rho : [V, \rho] = 0\}$.

对于一般的系统, 设 s_0 是与系统(1)的一个稳态相对应的降维列向量. 由命题1可知, 当变量 $s(t) \rightarrow s_0$ 时, $\rho(t) \rightarrow \rho_0$. 因此, 系统(1)的稳态集合 $\mathcal{E}_{ss}$ 可以表示为 $\mathcal{E}_{ss} = \{s_0 : As_0 + c = 0\}$. 这样, 为了考察系统(1)的稳定性, 可以首先考察仿射线性系统 $\dot{s} = As + c$ 的稳定性.

定理 1 当且仅当矩阵 A 的全部特征根都具有负实部时, 系统(6)存在唯一的平衡态 $s_s = -A^{-1}c$, 且该平衡态是渐近稳定的.

证 若 A 的全部特征根都具有负实部, 则 $\det(A) \neq 0$, 即矩阵 A 是可逆的. 令 $y = s + A^{-1}c$, 则 $s = y - A^{-1}c$. 代入式(6)得

$$\frac{d}{dt}(y - A^{-1}c) = A(y - A^{-1}c) + c,$$

即

$$\dot{y} = Ay. \quad (14)$$

由此可知, 系统(6)转化成了一个关于 y 的齐次线性系统. 由于矩阵 A 可逆, 因此 $y = 0$ 是系统(6)的唯一平衡态. 考虑到 A 为定常矩阵, 可知: 当且仅当矩阵 A 的全部特征根都有负实部时, $y = 0$ 是渐近稳定的. 等价地, $s_s = -A^{-1}c$ 是系统(6)的唯一平衡态, 并且是渐近稳定的. 证毕.

推论 1 当且仅当矩阵 A 的全部特征根都具有负实部时, 系统(1)具有唯一的平衡态

$$\rho_s = \sum_{k=1}^{N^2-1} s_{sk} \sigma_k + r_{N^2} \sigma_{N^2} = \sum_{k=1}^{N^2-1} s_{sk} \sigma_k + \frac{1}{N} I,$$

并且该平衡态是渐近稳定的.

由定理1和推论1可知, 系统(1)的平衡态 ρ_s 只与矩阵 A 和向量 c 有关. 根据 A 和 c 的表达式易知, ρ_s 仅仅由系统哈密顿量 H 以及耗散算子 V_d 决定. 因此, 可以借助 H 和 V_d 的设计来实现系统对于某一目标态的稳

定化. 实际中, 耗散算子一般由系统所处的自然环境决定, 受到温度、噪声等多种因素影响. 当量子系统处于某个特定环境中时, 即可假设耗散算子是已知的. 此时, 可以将系统的唯一平衡点设置为期望的目标态 ρ_{sD} , 并据此设计系统的哈密顿量 H .

在命题2的基底下, 记 s_{sD} 为对应于目标态 ρ_{sD} 的相干矢量. 根据定理1, 令 $s_s = -A^{-1}c = s_{sD}$, 则有

$$As_{sD} = -c. \quad (15)$$

由于系统的哈密顿量 H 包含在矩阵 A 中, 因此有必要考查(15)中矩阵 A 的存在性和具体形式. 对方程(15)矢量化有

$$(I_{N^2-1} \otimes s_{sD}^T) \text{Vec}(A) = -c, \quad (16)$$

其中: I_{N^2-1} 是 $N^2 - 1$ 阶单位阵; $\otimes$ 表示Kronecker积; $\text{Vec}(A)$ 表示将矩阵 A 按行拉直构成的列矢量. 根据矩阵的基本理论, 可以直接给出如下结论.

定理 2 关于 $\text{Vec}(A)$ 的线性方程组(16)有解的充要条件是 $(I_{N^2-1} \otimes s_{sD}^T)(I_{N^2-1} \otimes s_{sD}^T)^+ c = c$, 其中“ M^+ ”表示矩阵 M 的Penrose-Moore广义逆.

定理 3 若关于 $\text{Vec}(A)$ 的线性方程组(16)有解, 则其通解可以写为

$$\text{Vec}(A) = -(I_{N^2-1} \otimes s_{sD}^T)^+ c + [I_{(N^2-1)^2} - (I_{N^2-1} \otimes s_{sD}^T)^+ (I_{N^2-1} \otimes s_{sD}^T)] Y,$$

其中 $I_{(N^2-1)^2}$ 是 $(N^2 - 1)^2$ 阶单位阵, $Y \in \mathbb{R}^{N^2-1}$.

现在讨论本文系统哈密顿量 H 的设计过程. 根据定理1-3, 为了设计哈密顿量 H 以便实现系统对于目标态 ρ_{sD} 的稳定化, 下列条件必须得到满足:

1) 矩阵 A 是Hurwitz矩阵;

2) 关于 $\text{Vec}(A)$ 的线性方程组(16)有解, 即定理2成立.

对于此处的条件2), 由于定理2中的充要条件完全由实际系统的耗散算子和目标态决定而不受人为控制, 因此在设计系统的哈密顿量时本文假定该条件成立. 对于条件1), 尽管哈密顿量 H 具有厄米性, 但由于耗散算子 V_d 在数学上形式并不固定, 可以是实矩阵, 也可以是复矩阵^[24], 因此难以找到确保 A 是稳定矩阵的解析条件. 此时, 为了保证条件1)成立, 针对实际系统可以首先计算行列式 $\det(\lambda I - A) = 0$ 的值, 并使用劳斯稳定判据得到一个关于哈密顿量 H 的各元素的非线性不等式组; 然后借助非线性不等式组的一些经典数值解法^[31-33]来得到使得 A 是稳定矩阵的系统哈密顿量各元素的一个取值范围. 此外, 定理3给出了当系统平衡态等于目标态时矩阵 A 的取值范围, 结合命题2中矩阵 A 的定义, 容易得到系统哈密顿量各元素的另一个取值范围. 这样, 系统哈密顿量各元素的这两个取值范围的交集即构成了所设计的系统哈密

顿量.

应该指出,上述设计过程涉及系统耗散算子和目标态的具体形式,因此仅给出了设计系统哈密顿量的框架.当考虑简单的低能级系统时,也可以直接通过定理1和推论1算出系统平衡态的表达式,并在基于数值法找到的使得矩阵 A 是稳定矩阵的系统哈密顿量各元素的取值范围内,通过令平衡态等于目标态来得到系统的哈密顿量.

例1 记所考虑的二能级开放量子系统的两个本征态为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$,且规定 $|0\rangle$ 为基态, $|1\rangle$ 为激发态.假设系统只存在从高能级到低能级的耗散,即 $d=1$,令耗散算子为

$$V_1 = |0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

设哈密顿量的形式为

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix},$$

其中 $h_3 = h_2^\dagger$.

下面推导系统具有唯一平衡态时 H 所需满足的条件以及唯一平衡态 ρ_s 的表达式.

1) 计算正交变换基 $\{\sigma_k\}_{k=1}^4$.

对于两能级系统,有 $\sigma_k = \sigma_{k(j,t)}$,其中 $k = j + 2 \times (t - 1)$,且 $\sigma_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}I$.当 $j = 1, t = 2$ 时,有:

$$\sigma_{jt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle t| + |t\rangle\langle j|),$$

$$\sigma_{tj} = i\frac{1}{\sqrt{2}}(-|j\rangle\langle t| + |t\rangle\langle j|),$$

$$\sigma_{jj} = \frac{1}{\sqrt{j^2 + j^2}}\left(\sum_{k=1}^j |k\rangle\langle k| - j|j+1\rangle\langle j+1|\right),$$

即

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) 求系统具有唯一平衡态时 H 满足的条件.

将系统模型转换成 $\dot{s} = As + c$ 的形式,根据命题2中矩阵 A 和向量 c 的表达式,可以得到矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & h_2 + h_3 & -ih_2 + ih_3 \\ -h_2 - h_3 & -\frac{1}{2} & h_1 - h_4 \\ ih_2 - ih_3 & h_4 - h_1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

向量 c 为

$$c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由推论1知,当且仅当矩阵 A 的全部特征根都有负

实部时,系统(1)具有唯一的平衡态.由于系数矩阵含未知参数,因此特征根的求解比较困难.为此,利用劳斯稳定判据来判定系统的稳定性,它不需要对方程求解,只利用特征方程中的系数所组成的行列式来判定系统的稳定性.

将系统的特征方程 $\det(\lambda I - A) = 0$ 写成 $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ 的标准形式,即

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + [(h_1 - h_4)^2 + 4h_2h_3 + \frac{5}{4}]\lambda + (h_1 - h_4)^2 + 2h_2h_3 + \frac{1}{4} = 0,$$

其中:

$$a_0 = 1, a_1 = 2,$$

$$a_2 = (h_1 - h_4)^2 + 4h_2h_3 + \frac{5}{4},$$

$$a_3 = (h_1 - h_4)^2 + 2h_2h_3 + \frac{1}{4}.$$

根据劳斯判据可得系统稳定的充分必要条件是 $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.代入求得矩阵 H 中各元素应当满足的条件为

$$\begin{cases} (h_1 - h_4)^2 + 4h_2h_3 + \frac{5}{4} > 0, \\ (h_1 - h_4)^2 + 2h_2h_3 + \frac{1}{4} > 0, \\ (h_1 - h_4)^2 + 6h_2h_3 + \frac{9}{4} > 0. \end{cases} \quad (17)$$

3) 令平衡态 ρ_s 等于目标平衡态 ρ_{sD} ,求解 H .

方程 $\dot{s} = As + c$ 的平衡态为

$$s_s = -A^{-1}c = (s_{s1} \ s_{s2} \ s_{s3})^T,$$

即

$$\begin{aligned} \rho_s &= \sum_{k=1}^3 s_{sk}\sigma_k + r_4\sigma_4 = \\ &= \sum_{k=1}^3 s_{sk}\sigma_k + \frac{1}{2}I = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 4(h_1 - h_4)^2 + 4h_2h_3 + 1 & -2ih_3 + 4h_1h_3 - 4h_3h_4 \\ 2ih_2 + 4h_1h_2 - 4h_2h_4 & 4h_2h_3 \end{bmatrix}}{4(h_1 - h_4)^2 + 8h_2h_3 + 1}. \end{aligned} \quad (18)$$

由此可见,当给定目标平衡态 ρ_{sD} 时,令 $\rho_s = \rho_{sD}$,即可求出所需要的系统哈密顿量.

4 数值仿真(Numerical simulations)

本节,针对例1中的两能级开放量子系统进行数值仿真实验,以验证所提出的设计方法的有效性.在给定目标平衡态和系统耗散算子的情况下,设计系统的哈密顿量以实现系统对于目标平衡态的渐近收敛性,仿真中分别使用两组不同的耗散算子.

1) 系统只存在从高能级到低能级的耗散,此时

$d = 1$, 对应的耗散算子为

$$V_1 = |0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

假设目标态给定为

$$\rho_{sD} = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

代入式(18)得

$$\begin{cases} \frac{4(h_1 - h_4)^2 + 4h_2h_3 + 1}{4(h_1 - h_4)^2 + 8h_2h_3 + 1} = 1, \\ -2ih_3 + 4h_1h_3 - 4h_3h_4 = 0, \\ 2ih_2 + 4h_1h_2 - 4h_2h_4 = 0, \\ 4h_2h_3 = 0. \end{cases}$$

此方程组的解不唯一, 选取满足条件的一组解如下:

$$\begin{cases} h_1 = 0, \\ h_2 = 0, \\ h_3 = 0, \\ h_4 = 1, \end{cases}$$

即

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

容易验证, 这里的 H 保证了式(17)成立, 因此 ρ_{sD} 是系统的唯一平衡态. 现在, 任给一个初始态为

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i \\ -0.5i & 0.5 \end{bmatrix},$$

则系统状态对于目标态的转移概率 $\text{tr}(\rho\rho_{sD})$ 以及系统的布居数的演化曲线分别如图1和图2所示. 可以看出系统状态最终收敛到了目标平衡态.

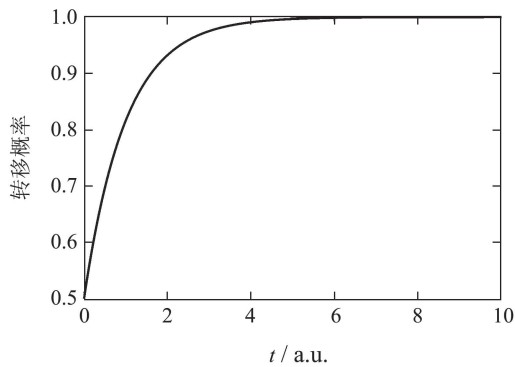


图 1 耗散算子为 V_1 时两能级量子系统转移概率 $\text{tr}(\rho\rho_{sD})$ 的演化曲线

Fig. 1 The evolution curve of the transfer probability $\text{tr}(\rho\rho_{sD})$ of the two-level quantum system with the dissipation operator V_1

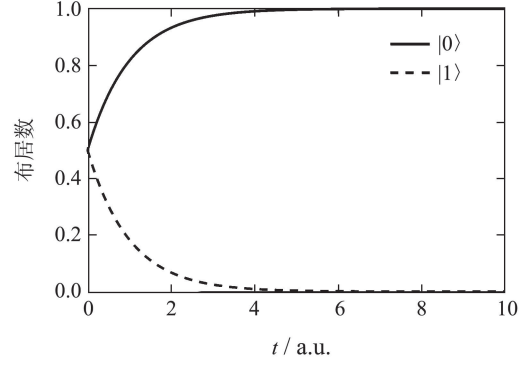


图 2 耗散算子为 V_1 时, 两能级量子系统的布居数演化曲线
Fig. 2 The evolution curves of the populations of the two-level quantum system with the dissipation operator V_1

2) 耗散算子为 $V'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

假设目标态被给定为

$$\rho_{sD} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

通过将系统模型转换成 $\dot{s} = As + c$ 的形式, 根据命题 2 可以得到矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & h_2 + h_3 & 1 - ih_2 + ih_3 \\ -h_2 - h_3 & -1 & h_1 - h_4 \\ ih_2 - ih_3 & h_4 - h_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

进一步, 根据劳斯判据可求得系统稳定的充分必要条件是

$$\begin{cases} h_4^2 - 2h_1h_4 + 4h_2h_3 + (h_3 - h_2)i + 3 > 0, \\ (h_1 - h_4)^2 - h_1h_2 - h_1h_3 - 2h_1h_4 + 4h_2h_3 + \\ h_2h_4 + h_3h_4 + (h_3 - h_2)i + 1 > 0, \\ 2h_4^2 - h_1^2 + h_1h_2 + h_1h_3 - 4h_1h_4 + 8h_2h_3 - \\ h_2h_4 - h_3h_4 + 2(h_3 - h_2)i + 8 > 0. \end{cases}$$

令

$$\rho_s = \sum_{k=1}^3 s_{sk} \sigma_k + \frac{1}{2}I = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

可得 H 的一组解为

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

容易验证, H 满足系统的稳定性要求. 任给系统的初始态为

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

则系统状态对于目标平衡态的转移概率和系统的布居数的演化曲线分别如图3和图4所示. 由图3可看出, 系统状态最终也收敛到了目标态上. 图4表明, 系统最

终演化到达的状态与目标平衡态的布居数相等。

由此可见, 数值仿真结果与理论分析结果相一致。

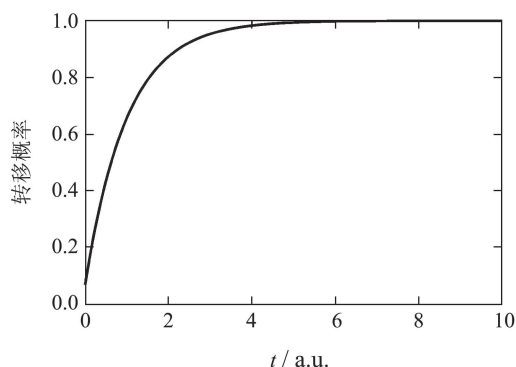


图3 耗散算子为 V_1' 时两能级量子系统转移概率的演化曲线

Fig. 3 The evolution curve of the transfer probability of the two-level quantum system with the dissipation operator V_1'

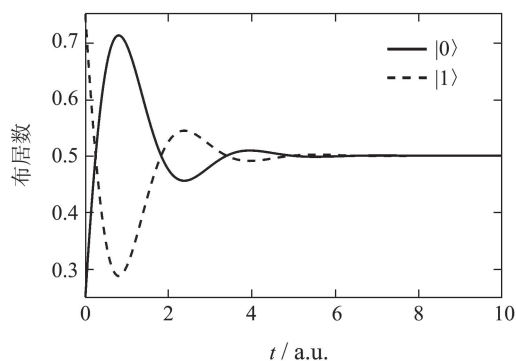


图4 耗散算子为 V_1' 时两能级量子系统的布居数演化曲线

Fig. 4 The evolution curves of the populations of the two-level quantum system with the dissipation operator V_1'

5 结论(Conclusions)

针对耗散已知情况下Lindblad型主方程描述的 N 能级开放量子系统, 本文研究了通过哈密顿量的设计实现系统对目标平衡态的稳定化问题。通过将原系统进行矢量化, 并借助矢量化后系统的稳定性结果, 得到了原系统的稳定性条件, 即: 当且仅当线性系统的系数矩阵的全部特征根都具有负实部时, 系统有唯一的平衡态, 且该平衡态是渐近稳定的。通过将系统的平衡点设计为期望的目标态, 给出了哈密顿量的设计框架。需要指出, 确保矢量化线性系统的稳定性以及系统平衡态等于目标态时系统哈密顿量的取值范围需要借助适当的数值算法, 因此寻找高效的数值算法需要进一步研究。此外, 本文假设了系统所处的环境不变。实际中, 当系统模型中的耗散项可变时, 如何进一步设计控制方案以及在设计哈密顿量时加入控制场能否取得更好的控制效果也值得进一步探索。

参考文献(References):

- [1] DONG D, PETERSEN I R. Quantum control theory and applications: a survey [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(12): 2651 – 2671.
- [2] WISEMAN H M, MILBURN G J. *Quantum Measurement and Control* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [3] NIELSEN M A, CHUANG I. *Quantum Computation and Quantum Information* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [4] FU S, SHI G, PROUTIERE A, et al. Feedback policies for measurement-based quantum state manipulation [J]. *Physical Review A*, 2014, 90(6): 062328.
- [5] DELL'ANNO F, DE SIENA S, ILLUMINATI F. Multiphoton quantum optics and quantum state engineering [J]. *Physics Reports*, 2006, 428(2): 53 – 168.
- [6] VERSTRAETE F, WOLF M M, CIRAC J I. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation [J]. *Nature Physics*, 2009, 5(9): 633.
- [7] SHANG Yan, WANG Haitao, SUI Yan, et al. Two control methods for the maximum entangled states preparations of a double quantum system [J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(7): 965 – 973. (商燕, 王海涛, 隋岩, 等. 双量子系统最大纠缠态制备的两种控制方法 [J]. 控制理论与应用, 2017, 34(7): 965 – 973.)
- [8] DOLDE F, BERGHOLM V, WANG Y, et al. High-fidelity spin entanglement using optimal control [J]. *Nature Communications*, 2014, 5: 4371.
- [9] CHEN Q M, WU R B, ZHANG T M, et al. Near-time-optimal control for quantum systems [J]. *Physical Review A*, 2015, 92(6): 063415.
- [10] DONG D, PETERSEN I R. Sliding mode control of quantum systems [J]. *New Journal of Physics*, 2009, 11(10): 105033.
- [11] DONG D, PETERSEN I R. Sliding mode control of two-level quantum systems [J]. *Automatica*, 2012, 48(5): 725 – 735.
- [12] KUANG S, DONG D, PETERSEN I R. Rapid Lyapunov control of finite-dimensional quantum systems [J]. *Automatica*, 2017, 81: 164 – 175.
- [13] KUANG S, CONG S. Lyapunov control methods of closed quantum systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 98 – 108.
- [14] ZHAO S, LIN H, XUE Z. Switching control of closed quantum systems via the Lyapunov method [J]. *Automatica*, 2012, 48(8): 1833 – 1838.
- [15] DONG D, CHEN C, TARN T J, et al. Incoherent control of quantum systems with wavefunction-controllable subspaces via quantum reinforcement learning [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, 38(4): 957 – 962.
- [16] ZHANG J, LIU Y, WU R B, et al. Quantum feedback: theory, experiments, and applications [J]. *Physics Reports*, 2017, 679: 1 – 60.
- [17] QI B, PAN H, GUO L. Further results on stabilizing control of quantum systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(5): 1349 – 1354.
- [18] MIRRAHIMI M, VAN HANDEL R. Stabilizing feedback controls for quantum systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, 46(2): 445 – 467.
- [19] WEI J H, QI B, DAI H Y, et al. Deterministic generation of symmetric multi-qubit Dicke states: an application of quantum feedback control [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(17): 2500 – 2505.
- [20] LIU Y, KUANG S, CONG S. Lyapunov-based feedback preparation of GHZ entanglement of N -qubit systems [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(11): 3827 – 3839.

- [21] ZHANG G, JAMES M R. Direct and indirect couplings in coherent feedback control of linear quantum systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(7): 1535 – 1550.
- [22] ZHANG J, WU R B, LIU Y X, et al. Quantum coherent nonlinear feedback with applications to quantum optics on chip [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 1997 – 2008.
- [23] LLOYD S. Coherent quantum feedback [J]. *Physical Review A*, 2000, 62(2): 022108.
- [24] SCHIRMER S G, WANG X. Stabilizing open quantum systems by Markovian reservoir engineering [J]. *Physical Review A*, 2010, 81(6): 062306.
- [25] SCHMIDT R, NEGRETTI A, ANKERHOLD J, et al. Optimal control of open quantum systems: cooperative effects of driving and dissipation [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(13): 130404.
- [26] SCHULTE-HERBRÜGGEN T, SPÖRL A, KHANEJA N, et al. Optimal control for generating quantum gates in open dissipative systems [J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2011, 44(15): 154013.
- [27] BACON D, FLAMMIA S T. Adiabatic gate teleportation [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(12): 120504.
- [28] WU S L. Engineering of a quantum state by time-dependent decoherence-free subspaces [J]. *Physical Review A*, 2015, 91(3): 032104.
- [29] JING J, WU L A, SARANDY M S, et al. Inverse engineering control in open quantum systems [J]. *Physical Review A*, 2013, 88(5): 053422.
- [30] WANG X, SCHIRMER S G. Contractivity of the Hilbert-Schmidt distance under open-system dynamics [J]. *Physical Review A*, 2009, 79(5): 052326.
- [31] DANIEL J W. Newton's method for nonlinear inequalities [J]. *Numerische Mathematik*, 1973, 21(5): 381 – 387.
- [32] POLAK E, MAYNE D. On the finite solution of nonlinear inequalities [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 24(3): 443 – 445.
- [33] MAYNE D Q, POLAK E, HEUNIS A J. Solving nonlinear inequalities in a finite number of iterations [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1981, 33(2): 207 – 221.

作者简介:

闫家臻 (1994–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为量子系统控制,

E-mail: yjz1994@mail.ustc.edu.cn;

匡 森 (1976–), 男, 副教授, 目前研究方向为量子系统控制,

E-mail: skuang@ustc.edu.cn;

陈蒙西 (1991–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为量子系统控制,

E-mail: chenmx@mail.ustc.edu.cn;

丛 爽 (1961–), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为量子系统控制、神经模糊系统、运动控制、机器人控制等, E-mail: scong@ustc.edu.cn.