DOI: 10.7641/CTA.2017.70613

弱测量在提高量子参数估计精度中的应用

刘丽君†

(山西师范大学 数学与计算机科学学院, 山西 临汾 041000)

摘要: 量子参数估计理论主要研究如何利用量子资源来提高经典参数的估计精度, 其应用非常广泛. 对于封闭的量子系统, 采用纠缠的量子探针测量未知的经典参数, 其估计精度可以大幅地超越经典探针所能达到的精度. 然而, 当退相干效应存在时, 量子探针的优越性就会受到限制. 本文引入弱测量的方法提高噪声环境下参数估计的精度, 并证明了当退振幅噪声存在时, 这一方法可以使得参数估计的精度恢复到海森堡极限, 尽管实现的概率会随着探针个数的增加呈指数地减少. 本文进一步考察了当辅助系统存在时, 弱测量的方法对提高参数估计精度的有效性.

关键词: 量子参数估计; 弱测量; 精度极限

中图分类号: O562 **文献标识码**: A

Usefulness of weak measurements in improving the precision of quantum parameter estimation

LIU Li-jun†

(College of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen Shanxi 041000, China)

Abstract: Quantum metrology concerns how to achieve the highest precision of physical parameters by quantum resources, which has broad applications in many fields. For closed quantum systems, the accuracy attained with entangled quantum probes can significantly surmount that of classical strategies. However, when noises such as decoherence are taken into account, the quantum gain may be jeopardized. In this paper, weak measurement is adopted to improve estimation precision in the presence of amplitude-damping decoherence, and it is demonstrated that the method of weak measurement can recover estimation precision to the Heisenberg limit, even though the success probability is in a exponential attenuation. Furthermore, the effectiveness of weak measurement in improving the estimation precision is investigated when ancillary systems are implemented.

Key words: quantum parameter estimation; weak measurement; precision limit

1 引言(Introduction)

量子参数估计理论, 即利用量子资源提高经典参数的估计精度, 在实际中的应用非常广泛, 如引力波探测[1–2]、原子钟[3–5]、原子磁强计[6–8]以及原子自旋陀螺仪[9–10]等. 典型的量子参数估计过程主要分为4个部分: 1) 制备初态已知的量子系统作为探针; 2) 探针与参数系统进行相互作用; 3) 对含有未知参数的量子系统进行测量; 4) 利用测量数据以及适当的方法构造待测参数的估计值. 由于估计值和真实值之间会存在误差, 量子参数估计理论(也称为量子度量学)的主要任务是从理论上刻画估计误差的界以及达到误差下界的具体操作方法.

对于量子参数估计, 参数的真实值与估计值之间的误差依赖于实验过程中制备的初态. 已有的文献[11–12]已经证明, 对于封闭的量子系统, 利用纠缠的量子资源, 参数估计的精度可以超越经典探针所达到的标准量子极限(即估计误差的下界与$1/\sqrt{N}$成正比), 实现海森堡极限(即估计误差的下界与$1/N$成正比), 其中N为实验中探针的个数. 当非线性的相互作用存在时，参数估计的精度甚至可以超越海森堡极限[13]. 然而, 当量子系统在演化过程中不可避免地与环境发生相互作用时, 参数估计的精度最终会退化到标准量子极限[14–16]. 因此, 如何采取有效的方法等效地抑制量子系统的退相干、提高参数估计的精度极限成为进一步迫切需要解决的问题.

针对量子系统的退相干效应, 目前已经提出了很多有效的方法进行抑制, 例如量子纠错码(quantum error correction)[17–19]、消相干子空间(decoherence-

收稿日期: 2017−08−30; 录用日期: 2017−11−07.
†通信作者. E-mail: lljcelia@126.com.
本文责任编委: 崔巍.
国家自然科学基金项目(61703254)资助.
Supported by National Natural Science Foundation of China (61703254).

free subspace)[20–21]、动态解耦(dynamical decoupling)[22]以及量子反馈控制(quantum feedback control)[23]等, 这些方法为研究如何提高参数估计的精度极限提供了重要的理论参考. 一些方法在提高参数估计精度方面的有效性已经被证明. 例如, 文献[24]中证明了当退相位噪声存在时, 量子纠错码可以使得频率(以及相位)估计的精度极限恢复到海森堡极限. 事实上, 退相干效应的存在之所以会抑制量子参数的估计精度, 其主要原因在于这一效应破坏了探针之间的量子关联. 文献[25–28]中证明了采用弱测量的方法可以有效地抑制单比特的退振幅(amplitude-damping)噪声, 保护量子态的纠缠, 而且其有效性已经在超导相位比特以及光子比特中得到了实验验证. 本文将这一方法应用到参数估计中, 考察当退振幅噪声存在时, 这一方法在提高参数估计精度方面的有效性.

在本文的方法中, 两个弱测量过程会被加入到典型的估计过程中: 第1个弱测量加在步骤2之前, 这一过程可视为对初态做了一个选择; 第2个弱测量加在步骤2之后, 即对演化后的态再进行一次选择. 经过这两次的选择, 可选出仍然保持高度纠缠的态来进行进一步的参数估计. 本文将会证明, 利用这一方法, 参数估计的精度可以恢复到海森堡极限. 然而, 经过两次弱测量过程, 最终选择出来的满足要求的态的概率较低, 且初态探针个数越多, 成功概率就越低.

在典型的量子参数估计过程中加入辅助的量子系统, 这一方法也被证明了可以用来提高含退相干影响的参数估计精度[29]. 具体过程为: 首先, 探针与辅助系统处于一个纠缠的初态; 其次, 探针和系统共同经历动态演化. 在此过程中, 只有探针在待测参数的影响下进行演化, 辅助系统不与参数系统相互作用. 最后, 对探针和辅助系统进行一个联合的测量, 并根据测量数据以及适当的方法对待测参数进行估计. 本文将引入辅助系统并与弱测量过程相结合, 考察当辅助系统存在时, 采用弱测量的方法是否能够进一步提高退振幅噪声影响下的参数估计的精度.

2 参数估计的一般理论(General parameter estimation theory)

本节主要介绍一般的参数估计理论, 从而根据这一理论来进一步分析当退振幅噪声存在时, 弱测量过程对参数估计精度的影响.

假设实验中未知的参数为x, 其估计值x_{est}与真实值之间的误差可由均方根误差δx来刻画:

$$\delta x=\sqrt{\langle (x_{\text{est}}-x)^2\rangle},$$

其中$\langle\cdot\rangle$是对所有的测量结果取平均. 对于任意的局部无偏估计方法, 均方根误差 δx 满足量子 Cramér-Rao 不等式:

$$\delta x\geqslant\frac{1}{\sqrt{\nu F_{\mathrm{Q}}(\rho(x))}},\tag{1}$$

其中: $\rho(x)$为以ρ_0为初态的探针在参数系统的作用下演化后的末态, ν为实验独立重复的次数, F_{Q}为量子Fisher信息量, 刻画了在最优的测量策略下, 从实验中可提取的关于未知参数的最大信息量, 通常定义为

$$F_{\mathrm{Q}}(\rho)=\mathrm{tr}(\rho' L_\rho)=\mathrm{tr}(\rho L_\rho^2),$$

其中: 厄密算子L_ρ称为密度算子 ρ 的对称对数导数(symmetric logarithmic derivative), 算子ρ'为密度算子ρ关于参数x求导数, 且满足方程

$$\rho'=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}(\rho L_\rho+L_\rho\rho).$$

特别地, 如果将 ρ 做谱分解, 记为 $\rho=\sum\limits_i p_i|\varPhi_i\rangle\langle\varPhi_i|$, 则量子Fisher信息量可以表示为[29]

$$F_{\mathrm{Q}}(\rho)=\sum_{i,j:p_i+p_j\neq 0}\frac{2}{p_i+p_j}\,|\,\langle\varPhi_i|\rho'|\varPhi_j\rangle\,|^2\,.\tag{2}$$

由方程(1)可知, 通过计算具体的量子Fisher信息量F_{Q}的值, 可以详细地分析不同的初态以及演化过程对参数估计精度的影响.

首先考虑无噪声影响的频率估计情形. 假设待估计的频率为ω, 系统演化的哈密顿量为H. 此时初态为ρ_0的量子系统在参数及哈密顿量联合驱动下的演化是幺正的, 可记为

$$\rho(t)=U_\omega\rho_0U_\omega^\dagger,$$

其中$U_\omega=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega Ht}$. 根据典型的度量学方法, 可以证明

$$F_{\mathrm{Q}}(\rho)=4t^2\langle\Delta H^2\rangle_0,$$

其中$\langle\cdot\rangle_0\equiv\mathrm{Tr}(\rho_0\cdot)$. 特别地, 考虑局部哈密顿量$H=\frac{1}{2}\sum\limits_i^N\sigma_z^i$, 其中$\sigma_z^i$为仅作用在第$i$个粒子上的Pauli$\sigma_z$算子. 如果$N$个探针的初态为直积态, 如$(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}})^{\otimes N}$, 其中$|0\rangle$和$|1\rangle$为$\sigma_z$的本征态. 此时, 参数估计的误差满足

$$\delta\omega\geqslant\frac{1}{t\sqrt{\nu N}},$$

即所谓的标准量子极限. 如果N个探针的初态为纠缠态, 例如GHZ态:

$$|\mathrm{GHZ}\rangle=\frac{|0\rangle^{\otimes N}+|1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}},$$

则参数估计的误差满足

$$\delta\omega\geqslant\frac{1}{tN\sqrt{\nu}},$$

即所谓的海森堡极限. 由此可知, 对于完全封闭的系统, 采用量子资源作为探针, 参数估计的精度可以大幅地超越经典探针(直积态)所能达到的精度.

事实上, 对于一个实际的量子系统, 总会不可避免

地与环境发生相互作用, 从而导致量子系统的退相干. 大量的文献[15–16]已经证明, 当退相干效应存在时, 无论如何选择探针的初态, 参数估计的精度都只能实现标准量子极限. 量子效应仅使得参数估计的精度增强了一个常数倍. 因此, 如何有效地抑制退相干效应, 恢复海森堡极限是一个亟待解决的问题. 在下文中, 将分析退振幅噪声对参数估计的影响, 并证明弱测量可以提高参数估计精度的极限.

3 退振幅噪声下的精度极限 (Precision limit in the presence of amplitude damping noise)

考虑典型的参数估计过程. 初始的量子系综中包含N个二能级量子系统, 整个系综演化的哈密顿量为$H = \omega/2 \sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_{\mathrm{z}}^{i}$, 其中$\omega$为待估计的频率. 当退振幅噪声以相同的比率$\gamma$局部地作用在每个量子系统上时, 整个系综的演化可以描述为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -i[H,\rho] + 2\gamma \sum_{i=1}^{N} \mathcal{D}[\sigma_{-}^{i}]\rho, \tag{3}$$

其中σ_{-}^{i}为 Pauli 阶梯算子(Pauli ladder operator), 只作用在第i个二能级系统上.

根据量子Cramér-Rao不等式(1), 为了分析ω的估计精度极限, 需要求解末态$\rho(t)$来计算量子Fisher信息量. 由于密度矩阵$\rho(t)$的维数随着探针个数N的增加呈指数增长, 因此直接根据方程(3)求解末态$\rho(t)$是非常困难的, 本文中将利用算子和的方法来表示$\rho(t)$. 由方程(3)可知, 每个粒子的演化都是独立且相同的, 其演化可由一个量子操作$\mathcal{E}$来表示. 若包含N个二能级量子系统的系综的初态为ρ_0, 则整个系综的末态$\rho(t)$可解析地表示为

$$\rho(t) = \mathcal{E}^{\otimes N}(\rho_0). \tag{4}$$

量子操作$\mathcal{E}$的表达式可由方程(3)在$N = 1$时得到, 具体可以表示为

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{k=1}^{2} \varPi_k \rho \varPi_k^{\dagger}.$$

上式为单个二能级系统演化的算子和表示, 每个算子分别为

$$\varPi_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}\sigma_z} E_1,\ \varPi_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}\sigma_z} E_2,$$

其中算子$\exp(-\mathrm{i}\dfrac{\omega t}{2}\sigma_{\mathrm{z}})$与哈密顿量驱动下的动态演化相关. 算子$E_1$与$E_2$与退振幅噪声有关, 具体形式为

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$b = \mathrm{e}^{-2\gamma t}$.

在第2节中已经证明, 对于无噪声影响的频率估计(即$\gamma = 0$), 若初态为GHZ态, 则参数估计的精度可以实现海森堡极限. 然而, 当存在退振幅噪声时(即$\gamma \neq 0$), 参数估计的精度会由海森堡极限退化到标准量子极限. 具体地, 当初态为GHZ态时, 式(4)中密度矩阵对应的量子Fisher信息量可由式(2)计算且可以表示为

$$F_{\mathrm{Q}}^{(1)} = \frac{2N^2 t^2 b^N}{b^N + 1 + (1-b)^N}. \tag{5}$$

经过一些简单的运算, 可以证明

$$F_{\mathrm{Q}}^{(1)} \leqslant 2N^2 t \cdot \max_{t} \frac{t b^N}{b^N + 1} \leqslant \frac{Nt}{\gamma e},$$

因此

$$\delta\omega \geqslant \sqrt{\frac{\gamma e}{\nu N t}},$$

这就意味着参数估计的精度退化到了标准量子极限. 因此, 为了保持量子资源在参数估计中的优越性, 需要应用有效的方法等效地抑制量子系统的退相干.

4 量子弱测量(Quantum weak measurement)

退振幅噪声的存在, 之所以会降低参数估计的精度, 是因为它破坏了量子探针之间的量子关联. 因此, 提高参数估计精度的一个可能的方法是维持量子探针之间的纠缠. 文献[26]中证明了, 利用弱测量的方法可以保护量子态的纠缠. 本文将这一方法引入到参数估计中, 即在典型的参数估计方法中加入两个额外的弱测量过程, 整个的操作过程如图1所示. 前弱测量M_1作用在探针进行动态演化之前, 后弱测量M_2作用在探针进行动态演化之后, 每个弱测量以相同的强度作用到每个探针上. 弱测量算子M_1和M_2分别取为

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_{\mathrm{a}}} \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p_{\mathrm{c}}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其中p_{a}和p_{c}分别表示两个弱测量的强度. 如果$p_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{c}} = 0$, 则$M_1$和$M_2$退化为单位矩阵, 对整个的测量过程没有影响. 此时, 视为没有弱测量过程, 即为典型的参数估计过程. 为了下文中书写方便, 记$1 - p_{\mathrm{a}} = a$以及$1 - p_{\mathrm{c}} = c$, 且有$0 < a, c < 1$.

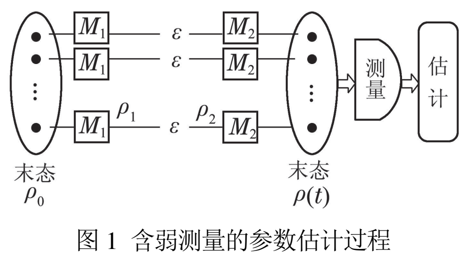

图 1 含弱测量的参数估计过程

Fig. 1 Parameter estimation protocol with weak measurements

假定整个系综的初始状态为ρ_0, 下面将具体地分析每个阶段系统的状态. 首先, 对系综做前弱测量, 即测量算子M_1独立地作用到每个探针上. 如果所有探针都得到对应M_1的测量结果, 则整个系综的状态变为

$$\rho_1 = \frac{M_1^{\otimes N} \rho_0 M_1^{\otimes N\dagger}}{\mathrm{tr}(M_1^{\otimes N} \rho_0 M_1^{\otimes N\dagger})},$$

然后, 系统以状态ρ_1进入到动态演化阶段. 在哈密顿量驱动以及退振幅的作用下演化t时间后, 系统的状态变为

$$\rho_2 = \mathcal{E}^{\otimes N}(\rho_1),$$

接下来, 对系统的态 ρ_2 进行后弱测量. 如果所有探针都得到对应M_2的测量结果, 则整个系综的态$\rho(t)$可以记为

$$\rho(t) = \frac{M_2^{\otimes N}\mathcal{E}^{\otimes N}(M_1^{\otimes N}\rho_0 M_1^{\otimes N\dagger})M_2^{\otimes N\dagger}}{\mathrm{tr}(M_2^{\otimes N}\mathcal{E}^{\otimes N}(M_1^{\otimes N}\rho_0 M_1^{\otimes N\dagger})M_2^{\otimes N\dagger})}. \quad (6)$$

注意到在整个测量过程中, 进一步的演化(或测量)依赖弱测量得到的测量结果. 如果测量结果是对应弱测量算子的, 这样的态会被保留, 否则将被丢弃. 因此, 整个过程的成功概率是小于1的. 在实际的实验中, 得到目标态(6)的概率为

$$P = \mathrm{tr}(M_2^{\otimes N}\mathcal{E}^{\otimes N}(M_1^{\otimes N}\rho_0 M_1^{\otimes N\dagger})M_2^{\otimes N\dagger}). \quad (7)$$

假设实验过程中成功地得到了末态(6), 下面将证明这一态对应的参数估计精度可达到海森堡极限. 具体地, 取原子系综的初态为 GHZ 态, 则对于末态 (6), 量子Fisher信息量可以表示为

$$F_{\mathrm{Q}}^{(2)} = \frac{4N^2t^2b^N}{(b^N + \frac{c^N}{a^N} + c^N(1-b)^N)(1 + \frac{a^N}{c^N}(c - cb + b)^N)}. \quad (8)$$

由方程(8), 可以得到两个特殊的结果. 首先, 考虑$a = c = 1$的情况, 即不考虑弱测量方法. 此时, 量子Fisher信息$F_{\mathrm{Q}}^{(2)}$可以退化为方程(5)中的$F_{\mathrm{Q}}^{(1)}$. 其次, 考虑$c/a = 1$情形, 即前弱测量与后弱测量的测量强度相同. 此时量子Fisher信息$F_{\mathrm{Q}}^{(2)}$可以简化为

$$F_{\mathrm{Q}}^{(2)'} = \frac{4N^2t^2b^N}{(b^N + 1 + c^N(1-b)^N))(1 + (c - cb + b)^N)}. \quad (9)$$

当$c < 1$时, 显然有$F_{\mathrm{Q}}^{(2)'} > F_{\mathrm{Q}}^{(1)}$. 由此说明利用弱测量确实可以提高参数估计的精度.

为了进一步分析弱测量方法可以提高参数估计精度的程度, 本文对式(8)中的$F_{\mathrm{Q}}^{(2)}$进行详细的分析. 为了书写方便, 记$c^N/a^N = x, c(1-b) = y$. 在实际实验中, 显然有$x, y > 0$. 从而, $F_{\mathrm{Q}}^{(2)}$可以简写为

$$F_{\mathrm{Q}}^{(2)} = 4N^2t^2/f,$$

其中函数f表示为

$$f = \frac{1}{b^N}(b^N + y^N + (y+b)^N + x + \frac{(b^N + y^N)(y+b)^N}{x}). \quad (10)$$

函数f依赖变量x和y. 因此, 要得到$F_{\mathrm{Q}}^{(2)}$的最大值需要求解f关于x和y的最小值.

在实际的实验中, 测量强度p_{a}和p_{c}是独立的, 即a和c是独立的, 因此可以将f关于x和y独立地进行优化. 本文中首先对x进行优化, 其次对y进行优化. 由式(10)知, 函数f在

$$x = \sqrt{(b^N + y^N)(y+b)^N}$$

处取得最小值, 且最小值为

$$f(k) = (\sqrt{1 + k^N} + \sqrt{(1+k)^N})^2. \quad (11)$$

其中$k = y/b$, 且k是大于0的. 易知$f(k)$是随着k增加的函数, k越小, $f(k)$的值越小. 当k足够小时, 可以将$f(k)$近似为

$$f(k) \approx (2 + \frac{k^N}{2} + \frac{Nk}{2})^2 \approx 4 + 2k^N + 2Nk.$$

特别地, 当$2Nk \ll 1$时, 即$k \ll 1/(2N)$, 则近似地有$f(k) \approx 4$. 因此, 可知

$$F_{\mathrm{Q}}^{(2)} \approx N^2t^2.$$

由此说明利用弱测量的方法, 可以将参数估计的精度由标准量子极限恢复到海森堡极限. 两个弱测量的测量强度也都与k有关, 当k给定时, 测量强度

$$a = \frac{k}{(1-b)\sqrt{k+1}\,\sqrt[2N]{1+k^N}},\ \ c = \frac{kb}{1-b}.$$

值得注意的是, 在整个测量过程中加入的两个弱测量过程, 会限制精度恢复到海森堡极限的概率. 由方程(7)计算可知, 成功概率为

$$P = \frac{c^N + a^N(c - cb + b)^N}{2}. \quad (12)$$

成功概率依赖于探针个数以及弱测量的强度. 由于弱测量强度$0 < a, c < 1$, 成功概率会随着比特数N增加呈指数衰减. 当N足够大时, 成功概率P趋近于0. 事实上, 如果将k看做是一个可调的变量, 量子Fisher信息$F_{\mathrm{Q}}^{(2)}$关于变量k是单调递减的(因为$f(k)$是随着k增加的函数), 而成功概率P是随着k单调增加的(由于a和c是关于k单调增加的), 可以在二者之间取一个折中, 既可以减小噪声对参数估计精度的影响, 又可以提高成功的概率. 无论如何, 尽管以牺牲成功概率为代价, 但是确实得到了参数估计的一个更好的精度, 为抑制退相干提高参数估计的精度提供了一个切实可行的方法.

5 辅助系统(Ancillary systems)

在典型的量子参数估计过程中加入辅助的量子系统, 这一方法已经在文献[29]中被证明对提高含退相干影响的参数估计精度是有帮助的. 本文这一部分的内容将具体地分析当辅助系统存在时, 弱测量过程能否进一步提高退振幅噪声影响下的参数估计的精度. 具体操作过程如图2所示, 在图(a)中, 只对原系统进行弱测量操作; 在图(b)中, 辅助系统与原系统同时经过

弱测量过程.

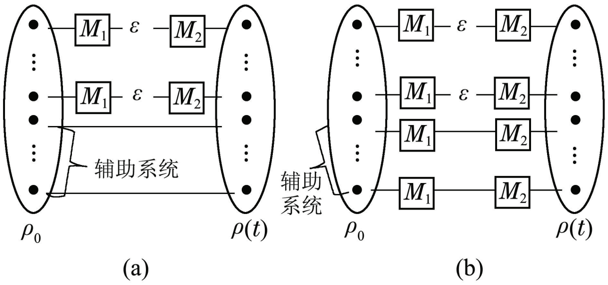

图 2 包含辅助系统和弱测量的参数估计过程

Fig. 2 Parameter estimation protocol with ancillary systems and weak measurements

假定N个原系统的二能级量子系统与M个辅助的二能级量子系统构成初始的状态为$\rho_{\rm SA}$. 整个系统经过图2(a)中的操作过程后, 如果每次弱测量的结果都恰好对应弱测量算子, 则整个系统的末态为

$$\rho_{\rm SA}(t)=\frac{M_2^{\otimes N}\mathcal{E}^{\otimes N}(M_1^{\otimes N}\rho_{\rm SA}M_1^{\otimes N\dagger})M_2^{\otimes N\dagger}}{{\rm tr}(M_2^{\otimes N}\mathcal{E}^{\otimes N}(M_1^{\otimes N}\rho_{\rm SA}M_1^{\otimes N\dagger})M_2^{\otimes N\dagger})}. \tag{13}$$

其中算子$M_1, M_2, \mathcal{E}$仅作用在原系统的N个粒子上. 由于弱测量操作的存在, 得到这个末态的成功概率也是小于1的.

引入辅助的量子系统后, 原则上, 辅助系统与原系统可构成任意形式的初态, 本文只考虑初态为GHZ态的情形, 即

$$|{\rm GHZ}\rangle_{\rm SA}=\frac{|0\rangle^{\otimes n}+|1\rangle^{\otimes n}}{\sqrt{2}},$$

其中$n=N+M$为系统中所有量子子系统的总数. 当整个系统的初态为GHZ态时, 对于末态(13), 量子Fisher信息量可以表示为

$$F_{\rm Q}^{(3)}=\frac{4N^2t^2b^N}{(b^N+\dfrac{c^N}{a^N})(1+\dfrac{a^N}{c^N}(c-cb+b)^N)}. \tag{14}$$

特别地, 当$a=c=1$时, 即不加入弱测量过程时, 量子Fisher信息量$F_{\rm Q}^{(3)}$退化为

$$F_{\rm Q}^{(3)'}=\frac{2N^2t^2b^N}{b^N+1}. \tag{15}$$

显然有$F_{\rm Q}^{(3)'}$大于$F_{\rm Q}^{(1)}$, 说明引入辅助系统确实可以增强退振幅噪声影响下的参数估计的精度. 这一结果与文献[29]中的结果是一致的. 此外, $F_{\rm Q}^{(3)'}$的表达式中并不包含M的值, 由此说明, 只要辅助系统存在, 参数估计的精度就可以提高, 但增加辅助的个数并不能进一步提高参数估计的精度. 当$0<a,c<1$时, 比较方程(8)和(14)可知, $F_{\rm Q}^{(3)}>F_{\rm Q}^{(2)}$, 即证明了当辅助系统存在时, 加入弱测量过程可以进一步提高参数估计的精度.

如果M个辅助的二能级量子系统与原系统一起经历弱测量过程, 整个系统经过图2(b)中操作过程后, 如果每次弱测量的结果都恰好对应弱测量算子, 则以$\rho_{\rm SA}$为初态的整个系统的末态为

$$\rho_{\rm SA}(t)=\frac{M_2^{\otimes n}\mathcal{E}^{\otimes N}(M_1^{\otimes n}\rho_{\rm SA}M_1^{\otimes n\dagger})M_2^{\otimes n\dagger}}{{\rm tr}(M_2^{\otimes n}\mathcal{E}^{\otimes N}(M_1^{\otimes n}\rho_{\rm SA}M_1^{\otimes n\dagger})M_2^{\otimes n\dagger})}. \tag{16}$$

当整个系统的初态为GHZ态, 则对应的量子Fisher信息量可以表示为

$$F_{\rm Q}^{(4)}=\frac{2N^2t^2b^N}{(b^N+\dfrac{c^n}{a^n})(1+\dfrac{a^n}{c^n}(c-cb+b)^N)}. \tag{17}$$

比较$F_{\rm Q}^{(3)}$和$F_{\rm Q}^{(4)}$可知, 若取c/a作为一个独立的变量, 则对于这一变量, $F_{\rm Q}^{(3)}$和$F_{\rm Q}^{(4)}$可达到的最大值是相同的. 然而, $F_{\rm Q}^{(4)}$的结果可以通过调节c/a的值, 在$F_{\rm Q}^{(3)}$对应的操作过程中实现且$F_{\rm Q}^{(3)}$更易实验实现. 因此, 将辅助系统同时经历弱测量过程, 对进一步提高参数估计的精度没有任何的帮助. 总之, 利用辅助系统与加入弱测量过程相结合, 是可以进一步提高参数估计的精度, 尽管这一提高也是概率性的.

6 结论(Conclusions)

本文主要证明了量子弱测量在提高参数估计精度方面的有效性. 对于退振幅噪声, 这一方法甚至可以将参数估计精度由标准量子极限恢复到海森堡极限. 但是, 弱测量过程对态的选取是概率性的, 因此利用文中的方法提高参数估计精度的成功概率比较低, 且随着探针个数的增加, 成功概率呈指数地衰减. 因此, 为了将这一方法更好地应用到实际中, 需要研究一些有效的方法来进一步提高成功概率, 例如选取其他更一般的弱测量算子或者将量子弱测量与其他方法(如动态解耦[30]或量子反馈[31])相结合等. 此外, 我们还证明了当辅助系统存在时, 利用弱测量方法可以进一步提高参数估计的精度. 本文中选取的辅助系统和原系统耦合的初态为GHZ态, 然而这个态并不一定是使得量子Fisher信息量达到最大的初态. 对于更一般的初态, 辅助系统及弱测量方法对提高参数估计精度的有效性, 还需要进一步的证明.

参考文献(References):

[1] ZHAN C, JU L, DEGALLAIX J, et al. Parametric instabilities and their control in advanced interferometer gravitational-wave detectors [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(12): 121102.

[2] AASI J, ABADIE J, ABBOTT B P, et al. Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light [J]. *Nature Photonics*, 2013, 7(8): 613 – 619.

[3] BAUCH A. Caesium atomic clocks: function, performance and applications [J]. *Measurement Science and Technology*, 2003, 14(8): 1159.

[4] BORREGAARD J, SØRENSEN A S. Near-Heisenberg-limited atomic clocks in the presence of decoherence [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(9): 090801.

[5] HUNTEMANN N, LIPPHARDT B, TAMM CHR, et al. Improved limit on a temporal variation of m_p/m_e from comparisons of Yb^+ and Cs atomic clocks [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(21): 210802.

[6] BUDKER D, ROMALIS M. Optical magnetometry [J]. *Nature Physics*, 2007, 3(4): 227 – 234.

[7] DANG H B, MALOOF A C, ROMALIS M V. Ultrahigh sensitivity magnetic field and magnetization measurements with an atomic magnetometer [J]. *Applied Physics Letters*, 2010, 97(15): 151110.

[8] WICKENBROCK A, TRIÇOT F, RENZONI F. Magnetic induction measurements using an all-optical 87Rb atomic magnetometer [J]. *Applied Physics Letters*, 2013, 103(24): 243503.

[9] COOPER J J, HALLWOOD D W, DUNNINGHAM J A. Entanglement-enhanced atomic gyroscope [J]. *Physical Review A*, 2010, 81(4): 043624.

[10] FANG J, QIN J. Advances in atomic gyroscopes: a view from inertial navigation applications [J]. *Sensors*, 2012, 12(5): 6331 – 6346.

[11] GIOVANNETTI V, LLOYD S, MACCONE L. Quantum metrology [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(1): 010401.

[12] GIOVANNETTI V, LLOYD S, MACCONE L. Advances in quantum metrology [J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(4): 222 – 229.

[13] NAPOLITANO M, KOSCHORRECK M, DUBOST B, et al. Interaction-based quantum metrology showing scaling beyond the Heisenberg limit [J] //*Nature*, 2011, 471(7339): 486 – 489.

[14] ESCHER B M, DE MATOS FILHO R L, DAVIDOVICH L. General framework for estimating the ultimate precision limit in noisy quantum-enhanced metrology [J]. *Nature Physics*, 2011, 7(5): 406 – 411.

[15] KOŁODYŃSKI J, DEMKOWICZ-DOBRZAŃSKI R. Efficient tools for quantum metrology with uncorrelated noise [J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15(7): 073043.

[16] LIU L, CHENG S, QI B, et al. Precision limit of atomic magnetometers in the presence of spin-destruction collisions [J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2015, 48: 035502.

[17] KNILL E, LAFLAMME R, VIOLA L. Theory of quantum error correction for general noise [J]. *Physical Review Letters*, 2000, 84(11): 2525.

[18] REED M D, DICARLO L, NIGG S E, et al. Realization of three-qubit quantum error correction with superconducting circuits [J]. *Nature*, 2012, 482(7385): 382 – 385.

[19] NIGG S E, GIRVIN S M. Stabilizer quantum error correction toolbox for superconducting qubits [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(24): 243604.

[20] XUE P, XIAO Y F. Universal quantum computation in decoherence-free subspace with neutral atoms [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 97(14): 140501.

[21] LIANG Z T, DU Y X, HUANG W, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation in decoherence-free subspaces with trapped ions [J]. *Physical Review A*, 2014, 89(6): 062312.

[22] KHODJASTEH K, LIDAR D A, VIOLA L. Arbitrarily accurate dynamical control in open quantum systems [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(9): 090501.

[23] YUAN H, FUNG C H F. Optimal feedback scheme and universal time scaling for Hamiltonian parameter estimation [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(11): 110401.

[24] DÜR W, SKOTINIOTIS M, FRÖWIS F, et al. Improved quantum metrology using quantum error correction [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(8): 080801.

[25] KOROTKOV A N, KEANE K. Decoherence suppression by quantum measurement reversal [J]. *Physical Review A*, 2010, 81(4): 040103.

[26] KIM Y S, LEE J C, KWON O, et al. Protecting entanglement from decoherence using weak measurement and quantum measurement reversal [J]. *Nature Physics*, 2012, 8(2): 117 – 120.

[27] HE Z, YAO C, ZOU J. Improvement of entanglement transfer by weak measurement and quantum measurement reversal in two parallel Heisenberg spin chains [J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2014, 47(4): 045505.

[28] LI W, HE Z, WANG Q. Protecting distribution entanglement for two-qubit state using weak measurement and reversal [J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2017, 56: 2813 – 2824.

[29] HUANG Z, MACCHIAVELLO C, MACCONE L. Usefulness of entanglement-assisted quantum metrology [J]. *Physical Review A*, 2016, 94(1): 012101.

[30] XU K, LINPENG X Y, WANG Z L. Decoherence suppression combining quantum uncollapsing and dynamical decoupling [J]. *Applied Physics Letters*, 2014, 104(26): 263509.

[31] WANG C Q, XU B M, ZOU J, et al. Feed-forward control for quantum state protection against decoherence [J]. *Physical Review A*, 2014, 89(3): 032303.

作者简介:

刘丽君 (1988–), 女, 讲师, 目前主要研究方向为量子参数估计, E-mail: lljcelia@126.com.