第 35 卷第 5 期
2018 年 5 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 35 No. 5
May 2018

DOI: 10.7641/CTA.2017.70617

非光滑聚合博弈纳什均衡的分布式连续时间算法

梁银山[1], 梁 舒[2], 洪奕光[3†]

(1. 长春工业大学 信息传播工程学院, 吉林 长春 130012;

2. 北京科技大学 自动化学院 工业过程知识自动化教育部重点实验室, 北京 100083;

3. 中国科学院数学与系统科学研究院 系统科学研究所, 北京 100190)

摘要: 本文研究多智能体聚合博弈的分布式算法设计. 其中, 个体的成本函数具有非光滑性. 提出一个连续时间分布式算法, 使得每个个体仅利用本地数据及局部的信息交互就能达到纳什均衡. 利用李雅普诺夫方法, 证明了算法的收敛性. 在此基础上, 进一步研究了带有耦合不等式约束博弈的广义纳什均衡求解. 仿真结果验证了方法的有效性.

关键词: 博弈论; 纳什均衡; 分布式算法; 连续时间算法; 非光滑

引用格式: 梁银山, 梁舒, 洪奕光. 非光滑聚合博弈纳什均衡的分布式连续时间算法. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 593 – 600

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Distributed continuous-time algorithm for Nash equilibrium seeking of nonsmooth aggregative games

LIANG Yin-shan[1], LIANG Shu[2], HONG Yi-guang[3†]

(1. Institute of Information Spreading Engineering, Changchun University of Technology, Changchun Jilin 130012, China;

2. Key Laboratory of Knowledge Automation for Industrial Processes of Ministry of Education, School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

3. Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China)

Abstract: This paper studies distributed algorithm design for multi-agent aggregative games, where the cost functions of agents are nonsmooth. A distributed continuous-time algorithm is proposed whereby each agent can reach the Nash equilibrium by using local data and local information exchange. The convergence of the algorithm is proved by virtue of Lyapunov method. Furthermore, the generalized Nash equilibrium seeking problem for games with coupled inequality constraints is investigated. Simulations illustrate the effectiveness of our method.

Key words: game theory; Nash equilibrium; distributed algorithm; continuous-time algorithm; nonsmoothness

Citation: LIANG Yinshan, LIANG Shu, HONG Yiguang. Distributed continuous-time algorithm for Nash equilibrium seeking of nonsmooth aggregative games. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 593 – 600

1 引言(Introduction)

近年来, 多智能体系统的分布式算法备受关注. 一方面, 多智能体系统在众多研究领域中广泛存在, 如网络计算、电力系统、金融经济和人工智能等[1–3]. 另一方面, 分布式算法能够使每个个体仅通过本地数据及与邻居的信息交互就可以实现特定目标, 具有不依赖中心节点、对通信噪声和环境不确定具有鲁棒性、适合于大规模问题、较低的计算与通信复杂度等许多优点. 事实上, 分布式算法早在20世纪80年代互联网兴起之初就被提出, 并取得了丰富的研究成果[4–5]. 主要的应用场景是计算机网络. 现如今, 具备一定感知、存储、计算及(无线)通信能力, 可以灵活移动的智能物理对象(多智能体)联网后形成的信息物理融合系统, 对分布式算法提出了更高的要求, 比如尽量降低对通信的依赖、适当考虑物理对象的动力学特性[6]等等.

收稿日期: 2017−08−31; 录用日期: 2017−12−30.

†通信作者. E-mail: yghong@iss.ac.cn; Tel.: +86 10-82541824.

本文责任编委: 梅生伟.

国家自然科学基金项目(61333001, 61573344), 北京市重点学科共建项目(XK100080537), 北京科技大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(FRF–TP–17–088A1)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61333001, 61573344), the Beijing Key Discipline Development Program (XK100080537) and the Fundamental Research Funds for the China Central Universities of USTB (FRF–TP–17–088A1).

在分布式算法的研究领域中, 分布式凸优化是最活跃的研究分支之一, 如文献[7–8]. 而且, 连续时间的算法得到越来越多研究者的青睐[9–13]. 一方面, 连续时间算法形式比较简洁、结构清晰, 且可以借助微分方程、微分包含和控制论中关于稳定性、收敛性的分析和证明方法. 另一方面, 连续时间算法更适合在物理对象中实现, 还可以利用廉价而高效的模拟电路来实现[14]. 此外, 许多重要的分布式优化背景(如机器学习[15])都涉及到非光滑的目标函数, 因此非光滑分布式算法也是重要的研究分支, 如文献[7, 10–13]. 文献[16]对近年来国内外分布式优化算法研究及应用进行了较详细的综述.

博弈论是研究多个决策者行为的工具, 在社会学、经济学、工程等领域中具有广泛应用. 实际问题中, 个体(或决策者)的目标函数往往相互制约(如存在竞争关系), 且由于网络带宽、稀缺资源或供需平衡等因素的限制, 个体的决策变量是相互耦合的. 博弈论指出, 纳什均衡或广义纳什均衡是这一大类问题的较恰当的解. 事实上, 博弈论的一个重要研究分支, 就是针对各种耦合与冲突及所产生的现象, 提供理论依据, 并给出有效的分析和预测, 设计可以达到均衡的学习算法. 将博弈论引入到多智能体系统中, 能够借助其理论体系解决一些不可避免的矛盾, 同时也极大丰富了系统设计思路, 有利于进一步提高系统性能.

由此可见, 运用博弈论对多智能体系统要完成的任务进行建模, 设计分布式算法求解相应的纳什均衡, 是目前分布式控制与优化的进一步扩展, 亦在博弈论的基础上考虑了工程方面的因素(即分布式), 因而是工程博弈论的重要课题之一. 目前, 国内外的相关研究处于起步阶段. 文献[17–18]考虑了一类零和博弈纳什均衡分布式求解, 而文献[19–20]针对聚合博弈, 给出了求解纳什均衡的分布式算法. 文献[21] 对于较一般的非合作博弈问题, 给出了基于Gossip方法的分布式算法. 对于既有耦合目标函数, 又有耦合约束的情况, 属于博弈论中的广义纳什均衡问题. 文献[22]在目标函数和约束信息已知的情况下, 给出了分布式求解算法. 而文献[23]考虑了具有二次型目标函数与线性约束的聚合博弈, 给出了分布式算法, 但算法依赖于特定的具有中心节点的网络拓扑. 文献[24]在不考虑局部约束的情况下, 给出了具有半全局收敛的连续时间分布式算法. 文献[25]考虑了具有非线性聚合项的聚合博弈问题, 同时考虑了耦合的等式约束, 提出了不依赖于中心节点的分布式算法.

本文旨在设计分布式算法求解聚合博弈的纳什均衡. 聚合博弈[26–27]是一类重要的博弈模型, 包括著名的纳什——古诺博弈. 这里考虑较一般的情况, 与文献[25]类似, 允许非二次型的成本函数和非线性的聚合项. 而且, 成本函数可以具有一定的非光滑性. 文献[19, 25]给出的算法不能解决本文所考虑的问题, 因为这些算法都要求成本函数是光滑的. 本文的主要贡献归结如下:

- 考虑了一类较一般的聚合博弈问题, 其成本函数可以是非二次型的, 而聚合项可以是非线性的, 并且成本函数可以是非光滑的.
- 提出一个连续时间的分布式算法, 结合次梯度下降、投影方法以及李雅普诺夫函数, 证明了即使在非光滑的情况下算法仍收敛到博弈问题的纳什均衡. 因此, 本文的方法也推广了已有工作[19, 25]中的成果.
- 进一步考虑了带有耦合不等式约束的聚合博弈问题, 给出分布式算法求解广义纳什均衡问题.

本文的结构如下: 第2节给出必要的预备知识; 第3节给出问题描述; 第4节给出分布式算法的设计与分析; 第5节进一步讨论并求解广义纳什均衡问题; 第6节给出仿真算例; 最后, 第7节总结本文.

2 预备知识(Preliminaries)

本节给出符号说明和预备知识: $\mathbb{R}$和$\mathbb{R}_+$分别表示实数集和非负实数集; $\mathbb{R}^n$表示n维欧式空间; 对于向量$v\in\mathbb{R}^n$, v^{T}表示其转置, 用$\|v\|$表示v的2–范数, 而用$|v|$表示v的1–范数; 对于列向量$z_1, z_2, \cdots, z_N$, 用$\mathrm{col}(z_1, \cdots, z_N)$表示由它们依次排成的列向量; 对于矩阵$A, B$, 用$A\otimes B$表示它们的克罗内克积; 用$\mathrm{sgn}(\cdot)$表示集值符号映射, 它的每个分量是一个集值符号函数, 也用sgn表示, 定义为

$$\mathrm{sgn}(y)\triangleq\begin{cases}\{1\}, & y>0,\\ \{-1\}, & y<0,\\ [-1,1], & y=0.\end{cases}$$

集合$C\subseteq\mathbb{R}^n$称为凸集, 如果$z_1, z_2\in C$, $0\leqslant\lambda\leqslant1\Rightarrow\lambda z_1+(1-\lambda)z_2\in C$. 对于闭凸集$C\subseteq\mathbb{R}^n$, 投影映射$P_C:\mathbb{R}^n\to C$定义为

$$P_C(x)\triangleq\underset{y\in C}{\mathrm{argmin}}\,\|x-y\|.$$

关于投影映射, 下面3个性质成立[28]:

$$(x-P_C(x))^{\mathrm{T}}(P_C(x)-y)\geqslant0,\ \forall\, y\in C, \tag{1}$$

$$\|P_C(x)-P_C(y)\|\leqslant\|x-y\|,\ \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\|x-P_C(x)\|^2=2(x-P_C(x)),\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

设$x\in C$, 集合C在x处的法锥定义为

$$\mathcal{N}_C(x)\triangleq\{v\in\mathbb{R}^n\,|\,v^{\mathrm{T}}(y-x)\leqslant0,\ \forall\, y\in C\}.$$

集值映射$F:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^n$表示将$\mathbb{R}^n$中的点映射到$\mathbb{R}^n$中的集合[29]. 称$F$在集合$\Omega$上严格单调, 如果

$$(x_1-x_2)^{\mathrm{T}}(y_1-y_2)>0,$$
$$\forall\, x_1\neq x_2\in\Omega,\ y_1\in F(x_1),\ y_2\in F(x_2),$$

称F在集合Ω上是上半连续的, 如果对于任意$x\in\Omega$和任意包含$F(x)$的开邻域N, 都存在x的邻域M满足$F(M)\subset N$. 称F是紧值的, 如果集合$F(x)$是紧集. 称

F是凸值的, 如果集合$F(x)$是凸集.

一个微分包含具有如下形式:

$$\dot{x} \in F(x),\ x(0) = x_0, \tag{4}$$

其中: F是一个集值映射. 称$x(t), t \in [0, +\infty)$是式(4)的解或轨迹, 如果$x(t)$是绝对连续的, 且几乎处处满足式(4).

多智能体网络中的信息交互关系可以用图论中的图来描述[30]. 一个图由节点集$\mathcal{V}$和边集$\mathcal{E}$描述, 记作$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$. 若个体$i$能向个体$j$发送信息, 则$(i,j) \in \mathcal{E}$且个体$j$属于个体$i$的邻居集合$\mathcal{N}_i = \{j|i,j \in \mathcal{E}\}$. 图$\mathcal{G}$称为无向的, 如果$(i,j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (j,\ i) \in \mathcal{E}$. 图$\mathcal{G}$称为连通的, 如果任何两个节点之间存在由边组成的路径. 无向图$\mathcal{G}$的邻接矩阵$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N\times N}$满足$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in \mathcal{E}$, $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow (i,j) \notin \mathcal{E}$. $\mathcal{G}$的拉普拉斯矩阵定义为$L = D - A$. 其中: $D = \mathrm{diag}\{d_1, \cdots, d_N\}$, $d_i = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij}$.

3　问题描述(Problem formulation)

多人聚合博弈可以用参与人、策略集合、成本函数这3个基本要素进行描述. 用$\mathcal{V} \triangleq \{1, \cdots, N\}$表示参与人的标签集合. 用$\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$表示第$i$个参与人的策略集合, 而用$x_i$表示该参与人的决策变量. 用$J_i(x_i, x_{-i}) : \Omega \to \mathbb{R}$表示第$i$个参与人的成本函数, 其中

$$x_{-i} \triangleq \mathrm{col}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_N), \tag{5}$$

$$\Omega \triangleq \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N \subset \mathbb{R}^n \tag{6}$$

分别表示除x_i之外的所有决策变量和所有策略组合$x \triangleq \mathrm{col}(x_1, \cdots, x_N)$构成的集合($n = n_1 + \cdots + n_N$). 对于每个$i \in \mathcal{V}$, 第$i$个参与人的目标是, 针对当前的$x_{-i}$, 选择决策变量$x_i \in \Omega_i$, 使得成本函数$J_i(\cdot, x_{-i})$达到最小. 此外, 对于聚合博弈, 还有一个聚合映射$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 定义为

$$\sigma(x) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x_i), \tag{7}$$

其中$\varphi : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^m$将局部决策变量映射到聚合项. 而且, 成本函数满足

$$J_i(x_i, x_{-i}) = f_i(x_i) + g_i(x_i, \sigma(x)), \tag{8}$$

其中: $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

注 1　对所考虑的聚合博弈, 这里给出一些说明.

- 虽然聚合博弈的成本函数具有较特殊的形式, 但它并不失一般性. 这是因为, 总可以选取映射$\sigma(x) = x$将一个博弈问题变换成聚合博弈的形式.
- 在许多聚合博弈问题中, m很小. 因此, 采用聚合博弈模型通常能够大大简化问题的描述. 另外, 聚合项通常具有重要的实际意义, 如公共资源、市场价格、选举投票等[26–27].

下面给出博弈论中十分重要的纳什均衡的定义.

定义 1　称一个策略组合$x^* \in \Omega$为纳什均衡, 如果对于任意的$i \in \mathcal{V}$, 都有

$$J_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leqslant J_i(y, x_{-i}^*),\ \forall\, y \in \Omega_i. \tag{9}$$

条件(9)表明, 在纳什均衡点处, 每个参与人的成本函数都在当前状态下达到最小. 单独改变某个参与人的策略不会使其成本函数降低. 因此, 纳什均衡点是所有参与人都能接受的解. 工程上, 希望给出分布式算法, 使得所有的参与人能够达到纳什均衡.

下面给出基本的假设条件:

假设 1　对于每个$i \in \mathcal{V}$, Ω_i是紧凸集, $\sup\limits_{y\in\Omega_i} \|y\| \leqslant \delta_i$. f_i, g_i, φ_i是利普希茨连续的, 从而J_i也是利普希茨连续的, 设其利普希茨常数为$\kappa_i > 0$, 而φ_i的利普希茨常数为$\nu_i > 0$. 此外, g_i和φ_i是可微的, $\|\nabla g_i\| \leqslant \gamma_i$, 且$\nabla_\sigma g_i(x_i, \sigma)$关于变量$\sigma$是利普希茨连续, 其利普希茨常数为$\mu_i > 0$.

假设1的限制性不强, 它要求所考虑的集合与函数具有"有界性", 通常在工程中都成立. 此外, 假设1不要求成本函数J_i可微, 即J_i可以是非光滑函数, 因此它比文献[19, 25]中的假设更弱.

定义集值映射

$$F(x) \triangleq \mathrm{col}\{F_1(x), \cdots, F_N(x)\}, \tag{10}$$

$$G(x,y) \triangleq \mathrm{col}\{G_1(x_1, y_1), \cdots, G_N(x_N, y_N)\}, \tag{11}$$

其中:

$$F_i(x) \triangleq \partial_{x_i} f_i(x_i) + \nabla_{x_i} g_i(x_i, \sigma(x)) + \frac{1}{N} \nabla_\sigma g_i(x_i, \sigma(x))^{\mathrm{T}} \nabla\varphi_i(x_i),$$

$$G_i(x_i, y_i) \triangleq \partial_{x_i} f_i(x_i) + \nabla_{x_i} g_i(x_i, y_i) + \frac{1}{N} \nabla_\sigma g_i(x_i, y_i)^{\mathrm{T}} \nabla\varphi_i(x_i).$$

容易看出, 若$y_i = \sigma(x)$, 则$G_i(x_i, y_i) = F_i(x)$.

下面进一步给出关于映射$F(x)$的假设条件.

假设 2　映射$F(x)$在集合Ω上是严格单调的.

由于本文考虑分布式算法设计, 参与人之间的信息交互可以由一个网络拓扑图$\mathcal{G}$来描述, 这里给出关于它的假设条件.

假设 3　图$\mathcal{G}$是无向的连通图(这里允许$\mathcal{G}$是定常或时变的).

假设2–3的限制性也不强, 它们出现在[19, 25]等文献中. 注意到, 假设3允许$\mathcal{G}$是时变的, 因此它比文献[24]中的假设更弱.

于是, 本文要解决的问题是: 在假设1–3的前提条件下, 设计分布式算法求解聚合博弈的纳什均衡.

4　算法设计和分析(Algorithm design and analysis)

本节首先给出分布式算法. 然后对算法进行分析, 给出收敛性证明.

本文设计的分布式算法如下:

$$\forall i\in\mathcal{V}:\begin{cases}\dot{z}_i\in -z_i+x_i-G_i(x_i,\eta_i),\\ \dot{\zeta}_i\in\alpha\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_i}\operatorname{sgn}(\eta_j-\eta_i),\\ x_i=P_{\Omega_i}(z_i),\\ \eta_i=\zeta_i+\varphi_i(x_i).\end{cases}\tag{12}$$

算法的初始值设置为

$$z_i(0)=0,\ \zeta_i(0)=0.\tag{13}$$

算法的参数α满足

$$\alpha>2\max_{i\in\mathcal{V}}\nu_i(\delta_i+\kappa_i),\tag{14}$$

其中ν_i,δ_i,κ_i是假设1中的上界值.

注 2 算法(12)给出了决策变量x_i的更新律. 其中: z_i, ζ_i是算法的内部状态, x_i,η_i是算法的输出量. 可以看出, 该算法仅要求第i个参与人利用本地变量与数据z_i,x_i,G_i,η_i及邻居的变量$\eta_j,j\in\mathcal{N}_i$进行策略的更新. 因此, 该算法是分布式的, 且不依赖于具有中心节点的网络拓扑. 与传统的(集中式)算法相比, 该算法中的每个个体不需要获取全局信息, 降低了对通信的依赖, 更适合在多智能体系统中应用.

下面对给出的算法进行分析. 为此, 首先给出在分析过程中要用到的两个引理.

引理 1[25] 在假设3的前提条件下, 如果

$$\alpha>(N-1)\bar{f},\ \bar{f}\geqslant\sup_{t\in[0,\infty)}\|\dot{r}_i(t)\|,\ \forall\, i\in\mathcal{V},$$

则系统

$$\begin{cases}\dot{\mu}_i(t)\in\alpha\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_i(t)}\operatorname{sgn}[\nu_j(t)-\nu_i(t)],\\ \nu_i(t)=\mu_i(t)+r_i(t),\ \mu_i(0)=0,\end{cases}\tag{15}$$

满足$\lim\limits_{t\to+\infty}\nu_i(t)-\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}r_k(t)=0$, 且是指数收敛的.

引理 2 在假设1和假设2的前提条件下, 博弈问题的纳什均衡点存在且唯一. 而且, 策略组合$x^*\in\Omega$是纳什均衡点的充分必要条件是

$$\mathbf{0}\in F(x^*)+\mathcal{N}_\Omega(x^*).\tag{16}$$

证 若$x^*\in\Omega$是纳什均衡点, 即满足式(9), 则x_i^*是$J_i(\cdot,x_{-i}^*)$在Ω_i上的极小点. 根据一阶最优条件[28], $\mathbf{0}\in F_i(x^*)+\mathcal{N}_{\Omega_i}(x_i^*)$. 剩下的部分仅需证明方程(16)的解是存在唯一的. 存在性由角谷静夫(Kakutani)不动点定理[29]得出, 而唯一性由$F(x)$的严格单调性得出. 证毕.

接下来, 证明算法(12)收敛到纳什均衡.

定理 1 在假设1–3的前提条件下, 存在状态轨迹$(z_i(t),\zeta_i(t))$和输出轨迹$(x_i(t),\eta_i(t))$满足算法(12)描述的动力学, 并且它们都是有界的. 进一步,

$$\lim_{t\to+\infty}x_i(t)=x_i^*,\tag{17}$$

其中x^*是所考虑的聚合博弈问题的纳什均衡点.

证 方程(12)中, 右端的集值映射是上半连续的, 且具有紧、凸值. 根据文献[29], 存在轨迹$(z_i(t),\zeta_i(t))$以及$(x_i(t),\eta_i(t))$. 此外, 根据引理2, 存在纳什均衡$x^*\in\Omega$.

选取李雅普诺夫函数如下:

$$V(z)\triangleq\frac{1}{2}(\|z-x^*\|^2-\|z-P_\Omega(z)\|^2),\tag{18}$$

其中$z\triangleq\operatorname{col}(z_1,\cdots,z_N)$. 一方面, 根据式(1), 并注意到$P_\Omega(z)=x$, 有

$$\begin{aligned}\|z-x^*\|^2=&\|z-P_\Omega(z)+P_\Omega(z)-x^*\|^2=\\&\|z-P_\Omega(z)\|^2+\|P_\Omega(z)-x^*\|^2+\\&2(z-P_\Omega(z))^{\mathrm{T}}(P_\Omega(z)-x^*)\geqslant\\&\|z-P_\Omega(z)\|^2+\|P_\Omega(z)-x^*\|^2=\\&\|z-P_\Omega(z)\|^2+\|x-x^*\|^2,\end{aligned}$$

因此,

$$V(z)\geqslant\frac{1}{2}\|x-x^*\|^2.\tag{19}$$

另一方面, 根据式(3), 有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}=z-x^*-(z-P_\Omega(z))=x-x^*,\tag{20}$$

因此, 对于几乎所有的$t\in[0,+\infty)$,

$$\dot{V}=\sum_{i=1}^{N}(x_i-x_i^*)^{\mathrm{T}}(-z_i+x_i-\varpi_i),\tag{21}$$

其中$\varpi_i\in G_i(x_i,\eta_i)$. 由式(10)和式(11)可知, 对于每个$\varpi_i\in G_i(x_i,\eta_i)$, 都存在一个相应的$\omega_i\in F_i(x)$, 使得

$$\|\varpi_i-\omega_i\|\leqslant(\gamma_i+\frac{\mu_i\nu_i}{N})\|\eta_i-\sigma(x)\|.\tag{22}$$

令

$$W\triangleq\sum_{i=1}^{N}(x_i-x_i^*)^{\mathrm{T}}(z_i-x_i+\omega_i),\tag{23}$$

$$e\triangleq\operatorname{col}(e_1,\cdots,e_N),\ e_i\triangleq\eta_i-\sigma(x).\tag{24}$$

根据式(1),

$$(x_i^*-x_i)^{\mathrm{T}}(x_i-z_i)\geqslant 0.\tag{25}$$

根据$F(x)$的单调性,

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i^*-x_i)^{\mathrm{T}}(\omega_i^*-\omega_i)>0,\tag{26}$$

其中: $\omega_i^*\in F_i(x^*)$, $\omega_i\in F_i(x)$. 这里, 选取特殊的$\omega^*\in F(x^*)$使其还满足$-\omega^*\in\mathcal{N}_\Omega(x^*)$. 由式(16), 总能找到这样的$\omega^*$. 于是, 根据法锥$N_\Omega(x^*)$的定义, 对于任意$x\in\Omega$, 有

$$-\sum_{i=1}^{N}(x_i^*-x_i)^{\mathrm{T}}\omega_i^*\geqslant 0.\tag{27}$$

从而, 根据式(25)–(27), $W\geqslant 0$, 且等号成立当且仅当$x=x^*$.

另一方面, 由于$\dot{z}_i\in -z_i+x_i-G_i(x_i,\eta_i)$且$\|x_i$

$-\, G_i(x_i, \eta_i)\| \leqslant \delta_i + \kappa_i$, 有

$$\|z_i(t)\| \leqslant \delta_i + \kappa_i,\ \|\dot{z}_i(t)\| \leqslant 2(\delta_i + \kappa_i). \quad (28)$$

注意到 φ_i 是利普希茨连续的, 又根据式 (2), $x_i = P_{\Omega_i}(z_i)$关于z_i是利普希茨连续的. 从而, $\varphi(x_i(t))$关于t 是几乎处处可微的, 且满足

$$\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_i(x_i(t))\| \leqslant \nu_i\|\dot{z}_i(t)\| \leqslant 2\nu_i(\delta_i + \kappa_i). \quad (29)$$

于是, 根据引理1, $e(t)$指数收敛到零. 注意到, 存在常数$k_0 = 2\max\limits_{i\in\mathcal{V}} \delta_i(\gamma_i + \dfrac{\mu_i\nu_i}{N})$, 使得

$$\dot{V} \leqslant -W(t) + k_0\|e(t)\|, \quad (30)$$

所以

$$\int_0^{+\infty} W(t)\mathrm{d}t \leqslant V(0) + k_0\int_0^{+\infty}\|e(t)\|\mathrm{d}t < +\infty. \quad (31)$$

注意到, 前面已经证明了$W(t) \geqslant 0$且等号成立当且仅当$x = x^*$. 并且, 由W的定义, $W(t)$关于时间t一致连续. 根据式(31)和巴尔巴拉引理[31], 有

$$\lim_{t\to+\infty} W(t) = 0, \quad (32)$$

进而

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^*. \quad (33)$$

证毕.

注 3 对于具有非光滑成本函数的聚合博弈问题, 不能应用文献[25]的算法进行求解, 即使将其中的梯度换成次梯度. 因为, 在这种情况下, 文献[25]中的算法涉及到一个由次梯度的投影导致的非凸微分包含, 关于其轨迹的存在性及收敛性分析目前仍是较困难的问题[32]. 算法(12)引入了内部状态z_i, 对z_i的更新用到次梯度, 对决策变量x_i的获取用到投影. 但投影与次梯度是分开的, 避免了上述困难. 换句话说, 即使退化为光滑情况, 本文的算法也和已有算法相比具有不同结构.

注 4 式(14)给出了参数α需满足的条件. 进一步可分布式地求出α. 首先, 每个个体根据本地数据给出$\alpha_i(0)$使其满足$\alpha_i(0)>2\nu_i(\delta_i+\kappa_i)$. 然后, 按照$\alpha_i(k+1) = \max\{\alpha_i(k), \alpha_j(k), j\in\mathcal{N}_i\}$对变量$\alpha_i$进行更新. 容易证明, 每个$\alpha_i(k)$在$N-1$步之内就能够趋同到$\alpha \triangleq \max\{\alpha_i(0), i = 1,\cdots,N\}$. 另外, 对于算法的收敛性, 式(14)仅是选取α的一个充分条件, 具有一定的较保性. 事实上, 对于任何$\alpha > 0$, 算法在均衡点附近有一定的吸引域. 因此, 结合实际中的具体问题, 可能存在保守性更弱的参数选取.

5 广义纳什均衡问题(Generalized Nash equilibrium problem)

本节进一步将算法推广到带有耦合不等式约束的广义纳什均衡问题. 在这类问题中, 个体的决策变量不仅具有局部约束$x_i \in \Omega_i$, 还要满足如下的耦合约束:

$$h(x) \triangleq h_1(x_1) + h_2(x_2) + \cdots + h_N(x_N) \leqslant \mathbf{0}, \quad (34)$$

其中$h_i: \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^l$. 这里, 考虑凸约束情况, 每个$h_i$都是可微凸函数. 并且, 假定存在策略组合$x \in \Omega$, 使得$h(x) < 0$. 耦合约束通常用来刻画个体之间因稀缺资源等因素导致的相互限制, 具有重要的实际意义. 此时, 定义1中的纳什均衡不再适用, 因为该定义没有考虑耦合约束. 一种有效的修正方法是考虑所谓的变分均衡[33–34], 其定义如下.

定 义 2 记$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \leqslant 0\}$和$\mathcal{K} = \mathcal{X} \cap \Omega$. 称一个策略组合$x^* \in \mathcal{K}$为变分均衡, 如果

$$\mathbf{0} \in F(x^*) + \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(x^*). \quad (35)$$

容易看出, 与式(9)相比, 式(35)考虑了局部约束与耦合约束的交集$\mathcal{K}$. 注意到, 虽然式(9)和式(35)在形式上类似, 但不能将算法(12)直接推广到后者. 这是因为, 每个个体仅知道局部信息 $h_i(x_i)$ 而非整体信息 $h(x)$, 无法进行投影运算$P_{\mathcal{K}}(\cdot)$. 受文献[2, 12]启发, 本文给出与式(35)等价的条件, 且适合于分布式算法设计. 为此, 首先定义

$$\begin{aligned}
&\lambda \triangleq \mathrm{col}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N),\ \lambda_i \in \mathbb{R}^l,\\
&\mu \triangleq \mathrm{col}(\mu_1,\cdots,\mu_N),\ \mu_i \in \mathbb{R}^l,\\
&H_1(x,\lambda) \triangleq \mathrm{col}(\lambda^{\mathrm{T}}\nabla h_1(x_1),\cdots,\lambda_N^{\mathrm{T}}\nabla h_N(x_N)),\\
&H_2(x) \triangleq \mathrm{col}(h_1(x_1),\cdots,h_N(x_N)),\\
&X \triangleq \mathrm{col}(x,\lambda,\mu),\\
&\hat{F}(X) \triangleq \begin{bmatrix} F(x) + H_1(x,\lambda) \\ -H_2(x) + (L\otimes I_l)\lambda + (L\otimes I_l)\mu \\ -(L\otimes I_l)\lambda \end{bmatrix},\\
&\hat{\Omega} \triangleq \Omega \times \mathbb{R}_+^{lN} \times \mathbb{R}^{lN}.
\end{aligned}$$

然后, 给出下面结果.

引理 3 在假设1–2的前提条件下, 存在$X^* = \mathrm{col}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \hat{\Omega}$满足广义方程

$$\mathbf{0} \in \hat{F}(X^*) + \mathcal{N}_{\hat{\Omega}}(X^*), \quad (36)$$

此时, $x^* \in \mathcal{K}$, 且它是满足式(35)的变分均衡.

引理3的证明与文献[2, 12]的证明过程类似, 这里仅给出简要说明. 首先, 满足式(35)的变分均衡是存在的. 这是因为, $\mathcal{K} = \Omega \cap \mathcal{X}$是紧集, 而其他部分与引理2类似. 然后, 证明式(36)的解存在(注意到$\hat{\Omega}$不是紧集). 选取变分均衡$x^* \in \mathcal{K}$. 由于$\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(x^*) = \mathcal{N}_{\Omega}(x^*) + \mathcal{N}_{\mathcal{X}}(x^*)$[28] 以及法锥$\mathcal{N}_{\mathcal{X}}$的乘子坐标表示[28], 存在$\lambda^* = \mathrm{col}(\lambda_0^*,\cdots,\lambda_0^*) \in \mathbb{R}_+^{lN}$, 使得

$$\mathbf{0} \in F(x^*) + H_1(x^*,\lambda^*) + \mathcal{N}_{\Omega}(x^*).$$

再根据$h(x^*) = (\mathbf{1}_N \otimes I_l)^{\mathrm{T}} H_2(x^*) \leqslant \mathbf{0}$以及$\lambda^* \geqslant \mathbf{0}$, 可

以得出存在μ^*, 使得$X^*=\mathrm{col}(x^*,\lambda^*,\mu^*)$满足式(36), 即式(36)的解集非空. 最后, 可以证明对于式(36)的任何一个解X^*, 都有$x^*\in\mathcal{K}$且它是满足式(35)的变分均衡.

类似于算法(12), 设计如下分布式算法求解变分均衡:

$$\forall i\in\mathcal{V}:\\ \begin{cases}\dot{z}_i\in -z_i+x_i-G_i(x_i,\eta_i)-\lambda_i^{\mathrm{T}}\nabla h_i(x_i),\\ \dot{\tilde{\lambda}}_i=-\tilde{\lambda}_i+\lambda_i+h_i(x_i)-\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_i}(\lambda_i-\lambda_j)-\\ \qquad\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_i}(\mu_i-\mu_j),\\ \dot{\mu}_i=\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_i}(\lambda_i-\lambda_j),\\ \dot{\zeta}_i\in\alpha\sum\limits_{j\in\mathcal{N}_i}\mathrm{sgn}(\eta_j-\eta_i),\\ x_i=P_{\Omega_i}(z_i),\\ \lambda_i=P_{\mathbb{R}^l_+}(\tilde{\lambda}_i),\\ \eta_i=\zeta_i+\varphi_i(x_i).\end{cases}\tag{37}$$

关于算法(37)的收敛性, 有如下结果:

定理 2 在假设1–3的前提条件下, 且图$\mathcal{G}$是定常的. 则算法(37)的轨迹$(z_i(t),\tilde{\lambda}_i(t),\mu_i(t),x_i(t),\lambda_i(t))$存在且有界. 并且

$$\lim_{t\to+\infty}x_i(t)=x_i^*,\tag{38}$$

其中x^*是所考虑的带有耦合不等式约束聚合博弈问题的变分均衡.

定理2的证明与定理1类似, 不同之处是, 证明过程中需要将$F(x)$和Ω替换为$\hat{F}(X)$和$\hat{\Omega}$. 不难证明$\hat{F}(X)$是单调的, 且关于X中的x分量是严格单调的. 从而仍然可以得出式(38)的收敛结果. 为避免重复, 这里略去详细证明.

注 5 算法(37)的设计借鉴了文献[12]的输出反馈算法. 注意到文献[12]仅考虑了分布式优化问题. 这里, 进一步考虑带有耦合约束的聚合博弈问题, 给出了求解广义纳什均衡问题的分布式算法(37).

6 仿真算例(Simulation examples)

本节考虑工程中的需求响应管理, 其案例也出现在文献[22,24–25]中. 设有N个电力用户需要从供电商购买并使用电能. 对于每个$i\in\mathcal{V}$, $x_i\in[\underline{r}_i,\bar{r}_i]$是需求量, 相应的成本函数为

$$J_i(x_i,\sigma(x))=k_i(x_i-\chi_i)^2+P(\sigma(x))x_i,$$

其中: k_i是常数, χ_i是标称用电量,

$$P(\sigma(x))=aN\sigma(x)+p_0$$

是为了调整电力需求而设置的电价. 其中$\sigma(x)=\dfrac{1}{N}\cdot\sum\limits_{i\in\mathcal{V}}x_i$. 仿真中, 问题和算法的参数如下:

- $N=5,\ k_i=1,\ a=0.04,\ p_0=5.$
- $$\chi_1=50,\ [\underline{r}_1,\bar{r}_1]=[45,55],\\ \chi_2=55,\ [\underline{r}_2,\bar{r}_2]=[44,66],\\ \chi_3=60,\ [\underline{r}_3,\bar{r}_3]=[46,72],\\ \chi_4=65,\ [\underline{r}_4,\bar{r}_4]=[52,78],\\ \chi_5=70,\ [\underline{r}_5,\bar{r}_5]=[56,84].$$
- $\alpha=10.$

得到的仿真结果如图1–3所示. 图1表明, 每个用户的决策变量最终收敛到纳什均衡的相应分量. 在初始的一段时间内($t\in[0,1]$), $x(t)$没有变化, 表现出一定的“时延”. 这是因为, 算法的初始状态与纳什均衡相差较大, 变量z在这段时间内进行快速调整, 如图2所示. 而在下一个阶段, 算法根据成本函数之间的制约关系进行变量的更新, 并最终达到纳什均衡. 图3给出了每个η_i的轨迹, 它们经过有限时间调整后, 一致地得到对$\sigma(x)$的估计. 选取不同的参数α, 并将相应算法的稳态值$x(10)$与纳什均衡x^*做比较, 图4给出了该误差曲线. 可见, 对于该算例, 取$\alpha\geqslant 1$即可. 最后, 进一步考虑具有耦合的不等式约束$x_1+\cdots+x_5\leqslant 250$, 算法(37)给出的策略组合轨迹如图5所示. 这些结果验证了本文给出的方法的有效性.

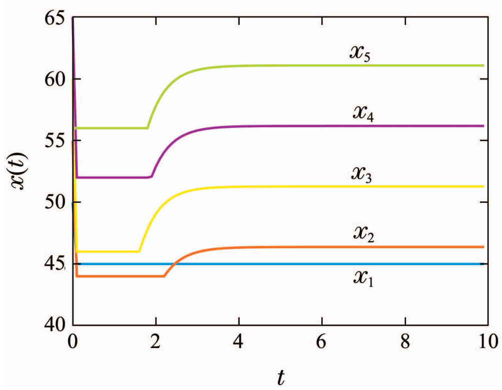

图 1 策略组合x的轨迹

Fig. 1 Trajectories of strategy profile x

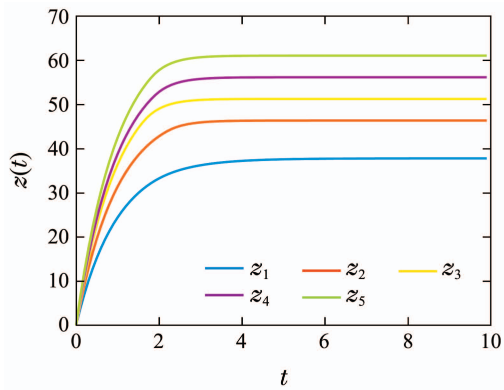

图 2 状态z的轨迹

Fig. 2 Trajectories of state z

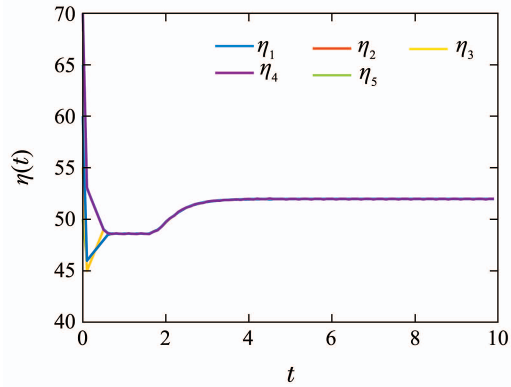

图 3　对聚合量进行估计的变量η的轨迹

Fig. 3　Trajectories of variable η for estimation of the aggregate

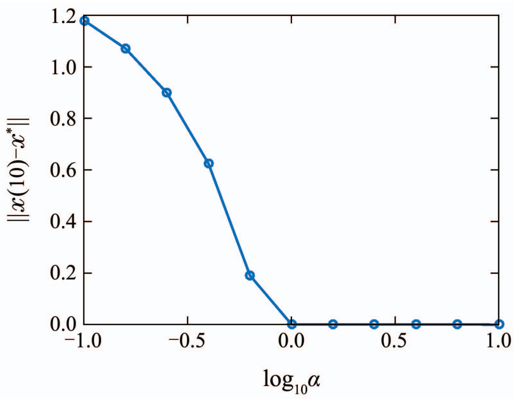

图 4　不同参数α对应的稳态误差曲线

Fig. 4　Steady error curve with respect to different values of parameter α

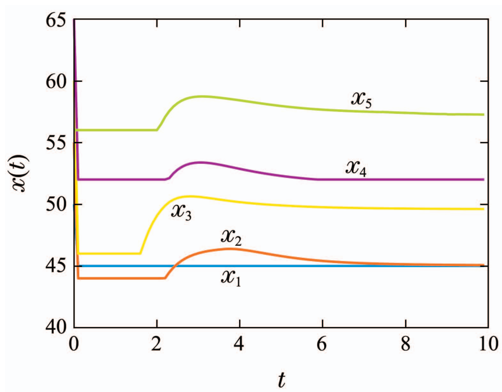

图 5　具有耦合不等式约束时策略组合x的轨迹

Fig. 5　Trajectories of strategy profile x with coupled inequality constraints

7　结论(Conclusions)

本文研究了聚合博弈的分布式算法设计问题, 提出一个分布式连续时间算法, 证明了算法收敛到博弈的纳什均衡. 又进一步研究了带有耦合不等式约束博弈的广义纳什均衡求解. 仿真算例证实了方法的有效性. 下一步的研究方向包括: 考虑当网络拓扑为有向图时, 相应的算法分析与设计; 工程上, 有时允许放宽对精确度的要求, 从而可以进一步考虑“次优”、“ϵ–纳什均衡”或“ϵ–广义纳什均衡”的分布式求解问题.

参考文献(References):

[1] MEI Shengwei, LIU Feng, WEI Wei. *Foundations of Engineering Game Theory and its Applications in Power Systems* [M]. Beijing: Science Press, 2016.
(梅生伟, 刘锋, 魏韡. 工程博弈论基础及电力系统应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.)

[2] YI P, HONG Y, LIU F. Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and its application to economic dispatch of power systems [J]. *Automatica*, 2016, 74(12): 259 – 269.

[3] PARKES D C, WELLMAN M P. Economic reasoning and artificial intelligence [J]. *Science*, 2015, 349(6245): 267 – 272.

[4] BERTSEKAS D P. Distributed asynchronous computation of fixed points [J]. *Mathematical Programming*, 1983, 27(1): 107 – 120.

[5] TSITSIKLIS J, BERTSEKAS D, ATHANS M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(9): 803 – 812.

[6] ZHANG Y, DENG Z, HONG Y. Distributed optimal coordination for multiple heterogeneous Euler–Lagrangian systems [J]. *Automatica*, 2017, 79(5): 207 – 213.

[7] NEDIĆ A, OZDAGLAR A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48 – 61.

[8] NESTEROV Y, SHIKHMAN V. Distributed price adjustment based on convex analysis [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2017, 172(2): 594 – 622.

[9] SHI G, JOHANSSON K H, HONG Y. Reaching an optimal consensus: dynamical systems that compute intersections of convex sets [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(3): 610 – 622.

[10] CHERUKURI A, CORTÉS. Distributed generator coordination for initialization and anytime optimization in economic dispatch [J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2015, 2(3): 226 – 237.

[11] ZENG X, YI P, HONG Y. Distributed continuous-time algorithm for constrained convex optimizations via nonsmooth analysis approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(10): 5227 – 5233.

[12] ZENG X, YI P, HONG Y. Distributed continuous-time algorithm for robust resource allocation problems using output feedback [C] //*American Control Conference*. Seattle, WA, USA: IEEE, 2017: 4643 – 4648.

[13] LIU Q, YANG S, WAN J. A collective neurodynamic approach to distributed constrained optimization [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(8): 1747 – 1758.

[14] FORTI M, NISTRI P, QUINCAMPOIX M. Generalized neural network for nonsmooth nonlinear programming problems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2004, 51(9): 1741 – 1754.

[15] CORTES C, VAPNIK V. Support-vector networks [J]. *Machine Learning*, 1995, 20(3): 273 – 297.

[16] YI Peng, HONG Yiguang. Distributed cooperative optimization and its applications [J]. *Scientia Sinica Mathematica*, 2016, 46(10): 1547 –1564.
(衣鹏, 洪奕光. 分布式合作优化及其应用 [J]. 中国科学, 2016, 46(10): 1547 – 1564.)

[17] GHARESIFARD B, CORTÉS J. Distributed convergence to Nash equilibria in two-network zero-sum games [J]. *Automatica*, 2013, 49(6): 1683 – 1692.

[18] LOU Y, HONG Y H, XIE L, et al. Nash equilibrium computation in subnetwork zero-sum games with switching communications [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(10): 2920 – 2935.

[19] KOSHAL J, NEDIĆ A, SHANBHAG U V. Distributed algorithms for aggregative games on graphs [J]. *Operations Research*, 2016, 63(3): 680 – 704.

[20] GHARESIFARD B, BASAR T, DOMINGUEZ-GARCIA A D. Price-based coordinated aggregation of networked distributed energy resources [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(10): 2936 – 2946.

[21] SALEHISADAGHIANI F, PAVEL L. Distributed Nash equilibrium seeking: a gossip-based algorithm [J]. *Automatica*, 2016, 72(10): 209 – 216.

[22] ZHU M, FRAZZOLI E. Distributed robust adaptive equilibrium computation for generalized convex games [J]. *Automatica*, 2016, 63(1): 82 – 91.

[23] DACCAGNAN D, GENTILE B, PARISE F, et al. Distributed computation of generalized Nash equilibria in quadratic aggregative games with affine coupling constraints [C] //*The 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2016: 6123 – 6128.

[24] YE M, HU G. Game design and analysis for price-based demand response: an aggregate game approach [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(3): 720 – 730.

[25] LIANG S, YI P, HONG Y. Distributed Nash equilibrium seeking for aggregative games with coupled constraints [J]. *Automatica*, 2017, 85(11): 179 – 185.

[26] CORNES R, HARTLEY R. Fully aggregative games [J]. *Economics Letters*, 2012, 116(3): 631 – 633.

[27] CORNES R. Aggregative environmental games [J]. *Environmental & Resource Economics*, 2016, 63(2): 339 – 365.

[28] ROCKAFELLAR R T，WETS R J B. *Variational Analysis* [M]. New York: Springer, 1998.

[29] AUBIN J P, CELLINA A. *Differential Inclusions* [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984.

[30] GODSIL C, ROYLE G F. *Algebraic Graph Theory* [M]. New York: Springer, 2001.

[31] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. New Jersey, USA: Prentice Hall, 2002.

[32] LIANG S, ZENG X, HONG Y. Lyapunov stability and generalized invariance principle for nonconvex differential inclusions [J]. *Control Theory and Technology*, 2016, 14(2): 140 – 150.

[33] KULKARNI A A, SHANBHAG U V. On the variational equilibrium as a refinement of the generalized Nash equilibrium [J]. *Automatica*, 2012, 48(1): 45 – 55.

[34] FACCHINEI F, KANZOW C. Generalized Nash equilibrium problems [J]. *Annals of Operations Research*, 2010, 175(1): 177 – 211.

作者简介:

梁银山 (1959–), 男, 副教授, 主要从事计算机仿真与算法研究, E-mail: liangyinshan@mail.ccut.edu.cn;

梁 舒 (1987–), 男, 讲师, 主要从事非光滑系统与控制、分布式优化、分数阶系统研究, E-mail: sliang@amss.ac.cn;

洪奕光 (1966–), 男, 研究员, 主要从事多智能体系统、分布式优化、博弈论、社会网络研究, E-mail: yghong@iss.ac.cn.