有限频域约束下串联弹性驱动器的刚度控制

于宁波†, 邹武林

(南开大学 机器人与信息自动化研究所, 天津 300350; 南开大学 天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300350)

摘要: 工程实际中的被控对象都具有明显的有限频域特性, 但目前的物理人机交互研究大多是针对全频域性能指标 来设计阻抗控制器, 由此得到的控制器往往失之保守. 本文针对绳牵引串联弹性驱动下的人机物理交互问题, 采用有限 频域性能约束方法来提升系统在设定频段的刚度控制性能. 首先, 分析绳牵引串联弹性驱动的刚度控制目标并将其转化 成有限频域性能约束下的H_∞控制问题. 其次, 根据广义Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)引理, 将有限频域性能约束转 化成矩阵不等式条件, 进而分解变换成有关全信息控制器和待求的静态输出反馈控制器的条件. 然后, 求解出一个满足 条件的全信息控制器, 并迭代优化得到输出反馈控制器. 仿真和实验结果都表明, 本文方法在设定频段取得了更加精确 的刚度控制效果.

关键词:人机交互;串联弹性驱动;阻抗匹配;频域分析;广义KYP引理 引用格式:于宁波,邹武林.有限频域约束下串联弹性驱动器的刚度控制.控制理论与应用,2019,36(5):711-719 DOI:10.7641/CTA.2018.70675

Stiffness control of a series elastic actuator with restricted frequency domain specifications

YU Ning-bo[†], ZOU Wu-lin

(Institute of Robotics and Automatic Information Systems, Nankai University, Tianjin 300350, China; Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics, Nankai University, Tianjin 300350, China)

Abstract: Despite the fact that the controlled objects in practical applications generally possess restricted frequency domain characteristics, the impedance controllers in physical human robot interaction are usually designed with respect to performance constraints over the entire frequency domain, which inevitably brings conservatism. In this work, a restricted frequency domain control method has been established to augment the stiffness control performance at the desired frequency band for physical human-robot interaction with a cable-driven series elastic actuator. Firstly, the stiffness control problem was analyzed and reformulated as an H_{∞} synthesis problem with restricted frequency domain specifications. Secondly, these specifications were transformed to linear matrix inequalities with the generalized Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) lemma, and then, converted to conditions regarding a full information controller and the desired static output-feedback controller. Thirdly, a full information controller satisfying the specifications was obtained, which was used to calculate the desired controller by iterative optimization. Finally, both simulations and experiments were conducted to verify the efficacy of the proposed method, and more precise stiffness control performance has been achieved at the desired frequency range.

Key words: human-robot interaction; series elastic actuator; impedance matching; frequency domain analysis; generalized KYP lemma

Citation: YU Ningbo, ZOU Wulin. Stiffness control of a series elastic actuator with restricted frequency domain specifications. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 711–719

1 引言

物理人机交互(physical human-robot interaction, pHRI)的研究在机器人领域十分重要.为了提升人机 交互的安全性和柔顺性,在电机与负载输出端之间串 入弹性元件形成串联弹性驱动(series elastic actuator,

SEA)^[1].相对于传统的刚性驱动,串联弹性驱动具有 柔顺性强、阻抗低、输出稳定、能量密度高、抗冲击、 安全、能量缓冲及贮存等优点^[2],已经被广泛应用于 物理人机交互应用中,如康复训练系统^[3]、柔性机械 臂^[4]、多关节SEA机器人^[5]、主动减重系统^[6]等.绳牵

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61720106012, 61403215), the Foundation of State Key Laboratory of Robotics (2016–003) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities.

收稿日期: 2017-09-16; 录用日期: 2018-06-22.

[†]通信作者. E-mail: nyu@nankai.edu.cn; Tel.: +86 22-23503960-801.

本文责任编委:段志生.

国家自然科学基金(61720106012, 61403215), 机器人学国家重点实验室开放课题(2016-003), 中央高校基本科研业务费资助.

引串联弹性驱动器可以将驱动电机和机器人末端执 行器隔离开来,实现远距离力传输,使系统安装布局 更加方便灵活^[7-9].

机器人在与人或外界环境交互时,需要根据不同的任务需求来改变交互的柔顺度,即改变其阻抗大小来调节交互力与位移之间的动态关系. Hogan提出了阻抗控制策略来调节机器人操作臂与外界环境之间的动态交互^[10].随后,一大批学者基于级联PID的阻抗控制方法对SEA的性能分析和参数选取等做了大量研究^[3,8,11-13]. PID 控制方法结构简单,便于分析,目前已被广泛应用于SEA的力矩控制和阻抗控制中.为了进一步提升系统的跟踪性能和鲁棒性能,扰动观测器(disturbance observer, DOB)^[14]、鲁棒内环补偿器(robust internal-loop compensator, RIC)^[15]等控制策略被应用到SEA的阻抗控制中来.

 H_2/H_∞ 控制理论已经取得了突破性进展^[16–20],并 逐渐运用于SEA的控制.在文献[21]中,基于H₂的最 优控制方法被应用到SEA的力矩控制中来最小化力 矩跟踪误差.在文献[9,22–24]中,SEA的阻抗控制问 题被转化成H_∞或混合H₂/H_∞控制问题,从而直接合 成阻抗控制器来最小化阻抗匹配误差.在控制器的设 计过程中,系统的性能和物理约束可以量化成对信号 的H₂或H_∞范数约束,可以合成更高阶次和维数的反 馈控制器以取得更好的动态响应效果,并实现跟踪性 能和鲁棒性能等多目标优化.

值得注意的是,已有的绝大多数的阻抗控制方法 都是针对全频域的性能指标来设计控制器的,即全 频域性能约束 (full frequency domain specification, FFDS). 然而,工程实际中的被控对象往往具有明显的 有限频域特性.对于物理人机交互来说,运动都集中 在低频段.因此,可以采用有限频域性能约束(restricted frequency domain specification, RFDS)方法来提升 SEA阻抗控制的低频段跟踪性能.常用的有限频域方 法主要是频域加权法(间接法),如文献[9,22–25]通过 设计频域权重函数或滤波器来间接地改善SEA的有 限频域性能,但这类方法无法直接提供有限频域性能 的定量评价和约束信息^[26].

Iwasaki等人在经典的Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)引理基础上建立了线性系统有限频域性能指标 的新理论,即广义KYP引理^[27],将有限频域性能指标 等效成相应的线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)条件.针对有限频域约束下的静态状态反馈 控制器和动态输出反馈控制器的设计问题,Iwasaki等 人又给出了几个特殊情况下保证控制器存在的矩阵 不等式条件^[28–30].随后,李贤伟等通过矩阵分离和 "两步法"思想提出了一种启发式迭代求解算法^[31], 郝宇清等利用输入矩阵的正交空间信息并构建了另 一种启发式迭代求解算法^[32].首先求取一个满足有限 频域性能约束的全信息控制器,然后根据此已知控制 器迭代优化得到待求的输出反馈控制器,这种方法 为SEA阻抗控制的严格有限频域性能约束提供了方 便与可能.

在前期工作中,笔者建立了一个绳牵引串联弹性 驱动的人机交互平台,并基于全频域性能指标开展了 控制方法研究^[9].本文中,进一步分析控制目标和约 束的频域特性,进而设计满足有限频域性能约束的控 制器,突破了现有方法的保守性,并通过仿真和实验 对本文方法进行了验证.

2 问题描述

2.1 绳牵引串联弹性驱动下的物理人机交互

基于绳牵引串联弹性驱动的物理人机交互如图1 所示.用于力传输的绳与一对线性弹簧串联在驱动电 机与交互手柄之间.人手驱动手柄沿滑轨直线运动并 与绳牵引串联弹性驱动产生交互,电机根据当前的期 望转速转动以调节弹性元件的形变量,从而改变人手 与驱动器之间的交互力矩与运动之间的动态关系,即 阻抗大小.







将表示线性位移和力的变量等效成相对于电机输 出轴的转角和力矩变量.ω_m与φ_m分别表示电机的实 际转速和转角,φ_h表示手柄的运动,τ_h表示手柄作用 在人手上的力矩,两个弹性元件的总等效刚度为K_s. 绳的形变和惯量、弹性元件的惯量可忽略.

2.2 基于 H_{∞} 合成的阻抗匹配

对于人机交互系统,其阻抗Z(s)可以定义成施加 于交互点的力矩与交互点运动之间的动态关系,即

$$Z(s) = \frac{\tau_{\rm h}(s)}{-\varphi_{\rm h}(s)},\tag{1}$$

阻抗一般包括系统的惯量、阻尼和刚度3个属性.

阻抗控制的基本目标是使得闭环系统的阻抗与期 望阻抗之间的误差最小,这可以转换成如图2所示的 模型匹配策略.框图 G_{CSEA} 表示的是图1 所示的串联 弹性驱动模型. 电机采用转速控制, 期望的转速指令 为 ω_d , 转速闭环模型为V(s). Z_d 为期望的阻抗模型, 在这里只考虑刚度控制, 即 $Z_d = K_d$, K_d 为期望的刚 度. 系统的外部输入为 $w = \varphi_h$, 控制信号为 $u = \omega_d$, 反馈信号为 $y = [\tau_h \ e]^T$, 被控目标信号为 $z = [\tilde{e} \ u]^T$. 系统根据期望的阻抗产生期望的力矩 τ_d , 控制器K实 现力矩跟踪从而达到阻抗的精确匹配效果. 为了消除 系统的奇异性, 需要在力矩跟踪误差e的后面附加权 重函数 $W_e(s)$ 得到加权误差 \tilde{e} .





采用模型匹配框架,可以进一步将阻抗控制问题 转化成H_∞控制器合成问题,即,对于给定的开环模型 G,合成控制器K使得从外部输入信号w到目标信号z的闭环传递函数的H_∞范数满足

$$\|T_{\rm wz}(s)\|_{\infty} \leqslant \gamma, \tag{2}$$

其中 $\gamma > 0$ 是期望的性能界限.

2.3 有限频域性能约束

对于人机物理交互系统,人手和驱动器产生的力 与运动频率都有上限.因此,为了提升系统在低频段 的阻抗控制性能,可以采用有限频域的性能约束.

对于力矩跟踪误差,只需要在低频段使其满足性 能约束,即

$$|T_{w\tilde{e}}(j\omega)| \leqslant \gamma_e, \ |\omega| \leqslant \omega_l, \tag{3}$$

其中[0, ω_l]表示人机交互频率范围.对于控制信号, 考虑到电机饱和,可以施加以下有限频域性能约束

$$|T_{\rm wu}(j\omega)| \leqslant \gamma_{\rm u}, \ |\omega| \leqslant \omega_l, \tag{4}$$

其中 $\gamma_e > 0$ 与 $\gamma_u > 0$ 为期望的性能界限.

由于难以同时对两个有限频域性能约束进行求解, 而系统的跟踪误差性能是需要优先考虑的.因此,本 文先求解满足约束(3)的控制器*K*,进而检验约束(4) 是否满足.

- 3 控制器合成
- 3.1 模型构建

根据图2可以得到

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}.$$
 (5)

对于绳牵引串联弹性驱动的阻抗控制,以上传递矩阵 可以写成

$$\begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \frac{\omega_{\rm d}}{\tau_{\rm h}} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 | B_1 \\ A_2 | B_2 \\ \hline C_1 | D_1 \\ C_2 | D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\rm h} \\ \omega_{\rm d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{\rm s} - Z_{\rm d}) W_e(s) - G_1(s) W_e(s) \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline -K_{\rm s} & G_1(s) \\ K_{\rm s} - Z_{\rm d} & -G_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\rm h} \\ \omega_{\rm d} \end{bmatrix},$$
(6)

其中

$$G_1(s) = \frac{\tau_{\rm h}(s)}{\omega_{\rm d}(s)}.\tag{7}$$

将开环模型G写成状态空间表达,有

$$\begin{cases} \dot{x}_{g}(t) = A_{g}x_{g}(t) + B_{u}u(t) + B_{w}w(t), \\ z(t) = C_{z}x_{g}(t) + D_{zu}u(t) + D_{zw}w(t), \\ y(t) = C_{y}x_{g}(t) + D_{yw}w(t), \end{cases}$$
(8)

 $x_{g}(t) \in \mathbb{R}^{n_{g}}$ 为系统状态量; $u(t) \in \mathbb{R}^{n_{u}}, w(t) \in \mathbb{R}^{n_{w}}, z(t) \in \mathbb{R}^{n_{z}}, y(t) \in \mathbb{R}^{n_{y}}; A_{g}, B_{u}, B_{w}, C_{z}, D_{zu}, D_{zw}, C_{y}, D_{yw}$ 为相应的实矩阵.

待合成的控制器K为静态输出反馈控制器,有

$$u(t) = Ky(t). \tag{9}$$

将式(8)与式(9)合并得到闭环系统模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_{g}(t) = \bar{A}x_{g}(t) + \bar{B}w(t), \\ z(t) = \bar{C}_{z}x_{g}(t) + \bar{D}_{z}w(t), \\ y(t) = \bar{C}_{y}x_{g}(t) + \bar{D}_{y}w(t). \end{cases}$$
(10)

闭环系统的传递矩阵分别为

$$\begin{cases} \bar{A} = A_{\rm g} + B_{\rm u} K C_{\rm y}, \ \bar{B} = B_{\rm w} + B_{\rm u} K D_{\rm yw}, \\ \bar{C}_{\rm z} = C_{\rm z} + D_{\rm zu} K C_{\rm y}, \ \bar{D}_{\rm z} = D_{\rm zw} + D_{\rm zu} K D_{\rm yw}, \\ \bar{C}_{\rm y} = C_{\rm y}, \ \bar{D}_{\rm y} = D_{\rm yw}. \end{cases}$$
(11)

特别地,在 C_z , D_{zu} , D_{zw} 中对应 \tilde{e} 的矩阵分量分别为 $C_{\tilde{e}}$, $D_{\tilde{e}u}$, $D_{\tilde{e}w}$, 在 \bar{C}_z , \bar{D}_z 中对应 \tilde{e} 的矩阵分量分别为 $\bar{C}_{\tilde{e}}$, $\bar{D}_{\tilde{e}}$.

3.2 基于广义KYP引理的性能约束条件转化

采用广义KYP引理可以将有限频域性能约束问题 转化成等效的矩阵不等式条件.

引理1 根据文献[33], 对于闭环系统(10), 当且 仅当存在对称正定阵*P*₈ > 0, 使得

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{s}} + P_{\mathrm{s}}\bar{A} < 0, \tag{12}$$

系统是渐近稳定的.

引理 2 根据广义KYP引理^[27],对于闭环系统 (10),当且仅当存在对称矩阵*P*, *Q* > 0,使得

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_{\tilde{e}} & \bar{D}_{\tilde{e}} \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Pi \begin{bmatrix} \bar{C}_{\tilde{e}} & \bar{D}_{\tilde{e}} \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$
(13)

其中:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \Psi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_l^2 \end{bmatrix}, \ \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 - \gamma_e^2 \end{bmatrix},$$
(14)

则有限频域性能约束(3)成立.

由于李雅普诺夫变量*P*, *Q*与控制器变量*K*之间的耦合,使得直接求解以上矩阵不等式比较困难,需要将其进行解耦变换.

3.3 矩阵解耦

关于稳定性条件的矩阵不等式(12)可转换成

$$\bar{W}_{\rm s}^{\rm T} \Xi_{\rm s} \bar{W}_{\rm s} < 0, \tag{15}$$

其中: $\overline{W}_{s} = \begin{bmatrix} \overline{A}^{T} & I \end{bmatrix}^{T}$, $\overline{\Xi}_{s} = \Phi \otimes P_{s}$. 关于有限频域性能的矩阵不等式(13)可以等效成

$$\bar{W}^{\mathrm{T}}\Xi\bar{W}<0\tag{16}$$

其中:

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ \bar{C}_{\bar{e}} & \bar{D}_{\bar{e}} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \ \Xi = \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix}.$$
(17)

引理3 根据文献[32], 对于闭环系统(10), 当且 仅当存在对称矩阵*P*_s>0, *P*, *Q*>0, 对角矩阵*X*>0 和矩阵*Y*, 使得

$$\begin{cases} W^{\mathrm{T}} \Xi W - M^{\mathrm{T}} N - N^{\mathrm{T}} M < 0, \\ W_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \Xi_{\mathrm{s}} W_{\mathrm{s}} - M_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} N_{\mathrm{s}} - N_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} M_{\mathrm{s}} < 0, \end{cases}$$
(18)

其中:

$$\begin{cases} W = \begin{bmatrix} A_{\rm g} \ B_{\rm w} \ B_{\rm u} \\ I \ 0 \ 0 \\ C_{\tilde{e}} \ D_{\tilde{e}{\rm w}} \ D_{\tilde{e}{\rm u}} \\ 0 \ I \ 0 \end{bmatrix}, W_{\rm s} = \begin{bmatrix} A_{\rm g} \ B_{\rm u} \\ I \ 0 \end{bmatrix}, \\ M = [KC_{\rm y} \ KD_{\rm yw} \ -I], M_{\rm s} = [KC_{\rm y} \ -I], \\ N = [YC_{\rm y} \ YD_{\rm yw} \ -X], N_{\rm s} = [YC_{\rm y} \ -X], \end{cases}$$
(19)

系统是渐近稳定的,并满足有限频域性能约束(3),从 而可以得到控制器*K*为

$$K = X^{-1}Y.$$
 (20)

以上引理将控制器参数和李雅普诺夫变量分离开, 是保证系统稳定性和满足约束(3)的充分必要条件.

进一步,采取以下替换:

$$K_1 = KC_y, \ K_2 = KD_{yw}.$$
 (21)

引理4 根据文献[32], 对于闭环系统(10), 当且 仅当存在对称矩阵*P*_s > 0, *P*, *Q* > 0, 对角矩阵*X* > 0 和矩阵*Y*, *K*₁, *K*₂, 使得

$$\begin{cases} W^{\mathrm{T}} \Xi W - \hat{M}^{\mathrm{T}} N - N^{\mathrm{T}} \hat{M} < 0, \\ W_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \Xi_{\mathrm{s}} W_{\mathrm{s}} - \hat{M}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} N_{\mathrm{s}} - N_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \hat{M}_{\mathrm{s}} < 0, \end{cases}$$
(22)

其中:

$$\hat{M} = [K_1, K_2, -I], \ \hat{M}_{\rm s} = [K_1, -I], \quad (23)$$

系统是渐近稳定的,并满足有限频域性能约束(3),且 控制器的参数为 $K = X^{-1}Y$, $[K_1, K_2]$ 则为系统的一 个全信息控制器, 即 $u(t) = K_1 x_g(t) + K_2 w(t)$.

若全信息控制器 [K₁, K₂] 为已知,则矩阵不等式(22)将变成线性矩阵不等式,其求解变成凸问题,从 而可以容易地得到控制器K.

3.4 控制器求解

根据前面的分析,可以先求解出满足稳定性和有限频域性能约束(3)的一个全信息控制器[K₁, K₂].

引理5 根据文献[31], 对于开环系统(8), 若存 在对称矩阵*P*_s > 0, *P*, *Q* > 0, 矩阵*R*, *F*, 使得

$$\begin{cases} \Xi + \Upsilon + \Upsilon^{\mathrm{T}} < 0, \\ \Xi_{\mathrm{s}} + \Upsilon_{\mathrm{s}} + \Upsilon_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} < 0, \end{cases}$$
(24)

其中:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} -F \ A_{\rm g}F + B_{\rm u}R \ 0 \ B_{\rm w} + B_{\rm u}K_2 \\ -F \ A_{\rm g}F + B_{\rm u}R \ 0 \ B_{\rm w} + B_{\rm u}K_2 \\ 0 \ C_{\tilde{e}}F + D_{\tilde{e}{\rm u}}R - I \ D_{\tilde{e}{\rm w}} + D_{\rm u}K_2 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

于宁波等:有限频域约束下串联弹性驱动器的刚度控制

$$\begin{split} \Upsilon_{\rm s} &= \begin{bmatrix} -F \, A_{\rm g} F + B_{\rm u} R \\ -F \, A_{\rm g} F + B_{\rm u} R \end{bmatrix}, \end{split} (26) \begin{aligned} && \text{M} \Pi \Lambda \Re \Re \pi \Xi \Re \pi \Xi \Re \Xi \Xi \pi \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \pi \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \Xi \vartheta \pi \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \vartheta \pi \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \vartheta \pi \Xi \vartheta \pi \Xi \vartheta \pi (3), K_2 \Xi \bot \vartheta \pi (3), K_1 = RF^{-1}. \end{split}$$

求解出满足条件的全信息控制器后,便可以采用如下的迭代优化算法得到待求的静态输出反馈控制器*K*.步骤如下^[31-32]:

第5期

步骤 1 求解式(24)得到全信息控制器初值[K_1^1 , K_2^1], 令i = 1.

步骤 2 求解以下优化问题得到 $\varepsilon^{(i)}$, P_{s} , P, Q, X, Y:

$$\begin{split} \min \varepsilon^{(i)} &= \varepsilon, \\ \text{s.t.} \begin{cases} W^{\mathrm{T}} \Xi W - \hat{M}^{\mathrm{T}} N - N^{\mathrm{T}} \hat{M} < \varepsilon \hat{I}, \\ W_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \Xi_{\mathrm{s}} W_{\mathrm{s}} - \hat{M}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} N_{\mathrm{s}} - N_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \hat{M}_{\mathrm{s}} < \varepsilon \hat{I}_{\mathrm{s}}, \end{cases} \\ \hat{M} &= [K_{1}^{(i)} \ K_{2}^{(i)} \ -I], \ \hat{M}_{\mathrm{s}} = [K_{1}^{(i)} \ -I], \end{cases} \\ \begin{cases} \hat{I} = \mathrm{diag}\{I_{n_{\mathrm{g}}}, \ I_{n_{\mathrm{w}}}, \ 0_{n_{\mathrm{u}}}\}, \\ \hat{I}_{\mathrm{s}} = \mathrm{diag}\{I_{n_{\mathrm{g}}}, \ 0_{n_{\mathrm{u}}}\}. \end{cases} \end{split}$$

步骤 3 若 $\varepsilon^{(i)} \leq 0$,则 $K = X^{-1}Y$ 是一个可行 解,退出循环;若迭代步数 $i > i_{\text{max}}$,则对于给定的界 限 γ_e ,可能不存在可行解,增大 γ_e 并返回步骤1;否则, 令 $i = i + 1, K_1^{(i)} = X^{-1}YC_y, K_2^{(i)} = X^{-1}YD_{yw}$, 返回步骤2.

给定合适的 γ_e ,迭代优化过程中得到的 $\varepsilon^{(i)}$ 将会是 递减的^[31],直至 $\varepsilon^{(i)} \leq 0$ 满足约束条件并返回待求控 制器.若迭代过程中无法收敛,算法在到达最大迭代 步数 i_{max} 后松弛 γ_e 并返回到步骤1,重新计算初值并 进行迭代优化.最终可以求得满足约束的控制器K, 而控制信号u在低频段将满足以下约束:

$$|T_{wu}(j\omega)| \leq |K(1)| \cdot |T_{w\tau_{h}}(\omega_{l})| + |K(2)| \cdot |T_{we}(\omega_{l})|.$$
(28)

4 仿真与实验结果

(i)

本文实验平台由Maxon电机、绳和线性拉簧驱动, 采用 HUMUSOFT MF634 数据采集卡并设采样频率 为2 kHz. 在前期工作中有详细描述^[9]. 电机转速饱和 值为44 rad/s, 因此设定 $\gamma_u = 44$. 人手的运动频率低 于5 Hz, 因此频率参数 $\omega_l = 10\pi$. 弹性元件总等效刚 度 $K_s = 0.0484$ Nm/rad. 根据系统灵敏度需求^[34], 权 重函数 $W_e(s)$ 设计成

$$W_e(s) = \frac{s+60}{s+0.3}.$$
 (29)

从期望转速 ω_d 到交互力矩 τ_h 的传递函数 $G_1(s)$ 可以通过系统辨识得到

$$G_1(s) = \frac{\tau_{\rm h}(s)}{\omega_{\rm d}(s)} = \frac{-0.1064s - 279.4}{s^3 + 81.64s^2 + 5821s + 1389}.$$
(30)

当给定 $Z_{\rm d} = 0.6K_{\rm s}$, $\gamma_e = 0.080$, $i_{\rm max} = 15$ 时, 系统开环模型(8)的传递矩阵如式(27)所示.

采用启发式迭代优化算法可以得到初始的全信息 控制器[*K*¹₁, *K*¹₂]和最终满足条件的静态输出反馈控 制器*K*分别为

$$\begin{cases} K_1^1 = 10^4 \times [0.3473 - 0.5063 \ 7.6602 - 0.8519], \\ K_2^1 = -39.8763, \\ K = 10^3 \times [0.0074 - 1.7793]. \end{cases}$$
(31)

对于不同的期望刚度 Z_d , 给定合适的界限 γ_e , 均可 以求出相应的满足条件的控制器K, 并可计算出目标 信号在低频段得到的实际上界. 信号 \tilde{e} , e, u在低频段 的实际上界分别由 $|T_{w\tilde{e}}(j\omega_l)|$, $|T_{we}(j\omega_l)|$, $|T_{wu}(j\omega_l)|$ 确定, 结果如表1所示.

4.1 仿真结果

人手运动 φ_h 设置为幅值为1 rad、频率从0变化到 5 Hz的线性变频信号.在不同期望刚度下,仿真结果 的最大力矩跟踪误差和最大期望转速均列于表1中.

Table 1 Quantified Performance for each stiffness rendering case at low frequency										
期望刚度 Z_{d}	$0.1K_{\rm s}$	$0.2K_{\rm s}$	$0.3K_{ m s}$	$0.4K_{\rm s}$	$0.5K_{ m s}$	$0.6K_{ m s}$	$0.7K_{ m s}$	$0.8K_{ m s}$	$0.9K_{ m s}$	$1.0K_{\rm s}$
γ_e	0.143	0.132	0.120	0.108	0.094	0.080	0.066	0.050	0.030	0.001
$ T_{\mathrm{w} ilde{e}}(\mathrm{j}\omega_l) $	0.0364	0.0320	0.0286	0.0240	0.0200	0.0160	0.0122	0.0090	0.0058	0.0000
$ T_{\mathrm we}(\mathrm j\omega_l) $	0.0169	0.0148	0.0133	0.0111	0.0093	0.0074	0.0057	0.0042	0.0027	0.0000
$ T_{ m wu}({ m j}\omega_l) $	29.82	26.50	23.22	19.89	16.58	13.27	9.97	6.68	3.37	0.00
仿真最大误差/(Nm)	0.0170	0.0150	0.0133	0.0117	0.0096	0.0075	0.0057	0.0042	0.0027	0.0000
仿真最大期望转速/($rad \cdot s^{-1}$)	30.02	26.87	23.24	21.02	17.25	13.42	10.00	6.69	3.37	0.00
实验最大误差/(Nm)	0.0171	0.0119	0.0092	0.0085	0.0076	0.0060	0.0044	0.0034	0.0031	0.0017
实验最大期望转速/($rad \cdot s^{-1}$)	27.79	20.10	15.77	14.55	13.64	10.37	7.50	5.78	2.93	0.50

随着期望刚度的增大,最大力矩跟踪误差和最大 期望转速都随之减小.当期望刚度等于系统实际物理 刚度K_s时,若不考虑外界扰动和噪声等,系统理论上 不需要电机的驱动来调节阻抗,因此跟踪误差和转速 指令都将为0.而当期望刚度接近于零时,如Z_d = 0.1K_s,由于期望刚度与系统实际刚度之间的大差异, 系统需要依靠电机的快速响应来调节阻抗.

为了进一步显示本文方法的有效性,采用具有全频域性能约束的H_∞控制方法与之比较.对于全频域性能约束方法,有

$$|T_{w\tilde{e}}(j\omega)| \leqslant \gamma_e, \,\forall \omega \in \mathbb{R}.$$
(32)

当期望刚度为 $0.6K_{s}$ 且 $\gamma_{e} = 0.080$ 时,本文方法仿 真结果如图3所示,包括期望力矩 τ_{d} 、实际力矩 τ_{h} 、力 矩误差e和期望转速 ω_{d} .实际力矩能很好地跟踪期望 力矩.随着运动频率增大到5 Hz,跟踪误差和期望转 速也随之增大.为了方便比较,将全频域方法得到的 误差也绘制在图3之中.有限频域方法的最大跟踪误 差和误差平方和为0.0075 Nm, $0.1911(Nm)^{2}$,均分别 小于全频域方法的最大误差0.0126 Nm和误差平方和 $0.5887(Nm)^{2}$.



Fig. 3 Simulation results for stiffness control with RFDS

另外,两种方法的误差e的幅频曲线如图4所示. 当 γ_e 为0.080时,在低频段,有限频域方法的跟踪性能得 到了明显提升. 在提升低频段跟踪性能的同时,也会 损失高频段的性能,即产生水床效应^[35]. 由图4可以 发现,当 $\gamma_e = 0.080$ 时,有限频域方法在12.4 Hz处产 生3 dB的尖峰. 为了减弱这种效应,可以适当提高 γ_e , 如当 $\gamma_e = 0.090$ 时,有限频域方法在低频段仍然保持 优势,且高频段尖峰下降到了-17 dB.





定义 $\hat{Z}(s) = \frac{Z(s)}{s}$,得到期望的 $\hat{Z}_{d}(s)$ 与实际的 $\hat{Z}(s)$ 的波特图如图5所示,实际的 $\hat{Z}(s)$ 的相角在低频段处于[-90°,90°]的区间内,因此系统能够保证与人手进行稳定的交互.此外,期望的 $\hat{Z}_{d}(s)$ 与实际的 $\hat{Z}(s)$ 的幅频曲线之间的极小差异也表明了精确的阻抗控制.





Fig. 5 Bode plots of desired $\hat{Z}_{d}(s)$ and actual $\hat{Z}(s)$

4.2 实验结果

对本文方法进行实验验证.在不同期望刚度下,人 手驱动手柄沿直线导轨进行不同频率和幅值的运动.

不同刚度控制实验的最大力矩跟踪误差和最大期 望转速如表1所示.最大误差和最大期望转速均随着 期望刚度的增大而减小,与仿真结果一致.电机期望 转速均在饱和值之下.在Z_d = K_s时,由于系统存在 一定的扰动和噪声,因此误差和期望转速不为0.

当期望刚度分别为 $0.3K_s$, $0.6K_s$, $0.9K_s$ 时, 人手运动 φ_h 、期望力矩 τ_d 、实际力矩 τ_h 、力矩跟踪误差e和期望转速 ω_d 的曲线均绘制于图6之中.较小的力矩跟踪误差说明系统具有较好的刚度控制性能.







在期望刚度为0.6K_s时,采用全频域方法进行实验 比较,将得到的误差曲线也绘制在图6的相应子图 中.全频域方法得到的最大力矩跟踪误差为 0.0116 Nm,而有限频域方法的最大误差仅为 0.0060 Nm.同时,全频域方法的误差平方和为 0.7714 (Nm)²,而有限频域方法的误差平方和仅为 0.1968 (Nm)².因此,有限频域方法的刚度控制效果要 明显优于全频域方法.

5 结论

在将物理人机交互的阻抗控制问题转化成模型匹 配H_∞控制问题后,本文通过有限频域分析和控制器 设计,提升了绳牵引串联弹性驱动器在低频段的刚度 控制性能.基于广义KYP引理,将有限频域H_∞性能约 束转换成等效的矩阵不等式条件,并经过一系列的分 解变换分离出全信息控制器和待求的静态输出反馈 控制器.在全信息控制器已求得的条件下,进一步迭 代优化得到输出反馈控制器.通过仿真和实验的验证, 本文方法在不同目标刚度下都取得了很好的控制效 果,而且与全频域方法相比较,在低频段的刚度控制 效果更加优越.

致谢

本文工作得到了香港科技大学丘立教授、加拿大 温莎大学陈翔教授、新加坡南洋理工大学李贤伟博 士、北京大学郝宇清博士的建议和帮助.在此,本文作 者深表感谢.

参考文献:

- PRATT G A, WILLIAMSON M M. Series elastic actuators. Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, USA: IEEE, 1995: 399 – 406.
- [2] MA Hongwen, WANG Liquan, ZHAO Peng, et al. Research of dynamic model and stability of a series elastic actuator. *Journal of Harbin Engineering University*, 2012, 33(11): 1410 – 1416. (马洪文, 王立权, 赵朋, 等. 串联弹性驱动器力驱动力学模型和稳定 性分析. 哈尔滨工程大学学报, 2012, 33(11): 1410 – 1416.)
- [3] SERGI F, ERWIN A C, O'MALLEY M K. Interaction control capabilities of an MR-compatible compliant actuator for wrist sensorimotor protocols during fMRI. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2015, 20(6): 2678 – 2690.
- [4] ZHANG Xiuli, GU Xiaoxu, ZHAO Hongfu, et al. Design of a compliant robotic arm based on series elastic actuator. *Robot*, 2016, 38(4): 385 394.
 (张秀丽, 谷小旭, 赵洪福, 等. 一种基于串联弹性驱动器的柔顺机械 臂设计. 机器人, 2016, 38(4): 385 394.)
- [5] WANG Meng, SUN Lei, YIN Wei, et al. A finite time output feedback control approach for interaction-oriented series elastic actuators. *Robot*, 2016, 38(5): 513 521.
 (王萌,孙雷,尹伟,等. 一种面向交互应用的串联弹性驱动器有限时间输出反馈控制方法. 机器人, 2016, 38(5): 513 521.)
- [6] YU Ningbo, YANG Zhuo, SUN Yubo, et al. Design and control of an active gravity offloading system for rehabilitation training of gait and balance. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(12): 1819 1831.
 (于宁波,杨卓,孙玉波,等. 一种面向步态和平衡康复训练的单绳悬 吊主动减重系统设计与控制方法研究. 自动化学报, 2016, 42(12): 1819 1831.)
- [7] VENEMAN J F, EKKELENKAMP R, KRUIDHOF R, et al. A series elastic- and bowden-cable-based actuation system for use as torque actuator in exoskeleton-type robots. *The International Journal of Robotics Research*, 2006, 25(3): 261 – 281.
- [8] SENTURK Y M, PATOGLU V. Design and control of an MRI compatible series elastic actuator. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. Piscataway, USA: IEEE, 2016: 1473 – 1479.
- YU N, ZOU W. Impedance control of a cable-driven SEA with mixed H₂/H_∞ synthesis. Assembly Automation, 2017, 37(3): 296 – 303.
- [10] HOGAN N. Impedance control: an approach to manipulation. Proceedings of the USA Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 1984: 304 – 313.
- [11] VALLERY H, VENEMAN J, ASSELDONK E V, et al. Compliant actuation of rehabilitation robots. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2008, 15(3): 60 – 69.
- [12] JARDIM B, SIQUEIRA A A. Development and analysis of series elastic actuators for impedance control of an active ankle-foot orthosis. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2014, 36(3): 501 – 510.

- [13] TAGLIAMONTE N L, ACCOTO D. Passivity constraints for the impedance control of series elastic actuators. *Proceedings of the In*stitution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2014, 228(3): 138 – 153.
- [14] MEHLING J S, HOLLEY J, O'MALLEY M K. Leveraging disturbance observer based torque control for improved impedance rendering with series elastic actuators. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Piscataway, USA: IEEE, 2015: 1646 – 1651.
- [15] YOO S, CHUNG W K. SEA force/torque servo control with modelbased robust motion control and link-side motion feedback. *Proceed*ings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 2015: 1042 – 1048.
- [16] GAHINET P, APKARIAN P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421 – 448.
- [17] YE Sijun, WANG Xinmin, ZHANG Qingjiang, et al. Direct iterative LMI-based approach of mixed H₂/H_∞ robust control for uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(2): 247 255. (叶思隽, 王新民, 张清江, 等. 不确定系统混合H₂/H_∞鲁棒控制的 直接迭代LMI方法. 控制理论与应用, 2011, 28(2): 247 255.)
- [18] BENNIS N, RAMZI M, HALOUA M, et al. LMI solutions for Htwo and H-infinity decentralized controllers applied to an aerothermic process. *Journal of Control Theory and Applications*, 2013, 11(2): 247 –254.
- [19] SONG Shijun, FENG Jun'e, MENG Min. Resilient static output feedback robust H_∞ control for controlled positive systems. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(5): 671 676.
 (宋世君, 冯俊娥, 孟敏. 受控正系统的弹性静态输出反馈鲁棒H_∞控制. 控制理论与应用, 2014, 31(5): 671 676.)
- [20] ZHENG Xiaoyuan, ZHANG Hao, WANG Zhuping, et al. Finite frequency H-infinity control for active vehicle suspension systems subject to actuator faults. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(9): 1136 1142.

(郑晓园,张皓,王祝萍,等.具有执行器容错的汽车主动悬架系统有限频率 H_{∞} 控制.控制理论与应用,2017,34(9):1136-1142.)

- [21] MISGELD B J, GERLACH-HAHN K, RUSCHEN D, et al. Control of adjustable compliant actuators. *Machines*, 2014, 2(2): 134 – 157.
- [22] MEHLING J S, O'MALLEY M K. A model matching framework for the synthesis of series elastic actuator impedance control. *Proceedings of the 22nd Mediterranean Conference of Control and Automation.* Piscataway, USA: IEEE, 2014: 249 – 254.
- [23] ABROUG N, LAROCHE E. Transforming series elastic actuators into variable stiffness actuators thanks to structured H_{∞} control. *Proceedings of the European Control Conference*. Piscataway, USA: IEEE, 2015: 734 740.
- [24] DOS SANTOS W M, CAURIN G A, SIQUEIRA A A. Design and control of an active knee orthosis driven by a rotary series elastic actuator. *Control Engineering Practice*, 2015, 58: 307 – 318.
- [25] OH S, WOO H, KONG K. Frequency-shaped impedance control for safe human-robot interaction in reference tracking application. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2014, 19(6): 1907 – 1916.
- [26] LI Xianwei, GAO Huijun. An overview of generalized KYP lemma based methods for finite frequency analysis and design. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(11): 1605 1619.
 (李贤伟, 高会军. 有限频域分析与设计的广义KYP引理方法综述. 自动化学报, 2016, 42(11): 1605 – 1619.)
- [27] IWASAKI T, HARA S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41 – 59.
- [28] IWASAKI T, HARA S. Robust control synthesis with general frequency domain specifications: static gain feedback case. *Proceedings*

of the 2004 American Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 2004: 4613 – 4618.

- [29] IWASAKI T, HARA S. Dynamic output feedback synthesis with general frequency domain specifications. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress.* Prague, Czech Republic: Elsevier, 2005: 345 – 350.
- [30] IWASAKI T, HARA S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(5/6): 415 – 434.
- [31] LI X, GAO H. A heuristic approach to static output-feedback controller synthesis with restricted frequency-domain specifications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(4): 1008 – 1014.
- [32] HAO Y, DUAN Z. Structured output-feedback controller synthesis with design specifications. *International Journal of Systems Science*, 2016, 48(4): 738 – 749.
- [33] BOYD S, EL GHAOUI L, FERON E, et al. Linear matrix inequality in systems and control theory. SIAM Studies in Applied Mathe-

matics. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

- [34] ZHOU K, DOYLE J C. Essentials of Robust Control. New Jersey, USA: Prentice-Hall, 1998.
- [35] ASTRÖM K J, MURRAY R M. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. New Jersey, USA: Princeton University Press, 2010.

作者简介:

于宁波博士,副教授,目前研究方向为人与机器人的交互、协作与控制、康复训练、医疗辅助和智能服务机器人, E-mail: nyu@nankai. edu.cn;

邹武林硕士研究生,目前研究方向为物理人机交互、串联弹性驱动、阻抗控制, E-mail: wlzou@mail.nankai.edu.cn.