第 34 卷第 11 期
2017 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 34 No. 11
Nov. 2017

DOI: 10.7641/CTA.2017.70717

量子投影滤波

吴征天[1], 高 庆[2†], 张国峰[3]

(1. 苏州科技大学 电子与信息工程学院, 江苏 苏州 215009;

2. 德国杜伊斯堡埃森大学 自动控制与复杂系统所, 德国 杜伊斯堡;

3. 香港理工大学 应用数学系, 中国 香港)

摘要: 量子滤波器基于贝叶斯原理, 利用连续弱测量数据给出当前时刻量子系统状态的最优估计, 是量子计算和量子调控技术中极为重要的一环. 然而, 随着量子系统能级数提高, 量子滤波器的实时计算复杂度呈二次型增长. 本文介绍了一种量子投影滤波方法, 用于减少量子滤波器的实时计算复杂度. 基于量子信息几何方法, 量子轨迹被限制在了一个由一类非归一化量子密度矩阵组成的子流形中. 量子态从而可通过计算子流形的坐标系统来近似获得. 仿真实验说明了投影滤波方法的有效性.

关键词: 量子滤波器; 微分流形; 开放量子系统; 指数型量子投影滤波器; 状态估计

中图分类号: O413.1 **文献标识码**: A

Quantum projection filtering

WU Zheng-tian[1], GAO Qing[2†], ZHANG Guo-feng[3]

(1. School of Electronic and Information Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu 215000, China;
2. Institute for Automatic Control and Complex Systems (AKS), Faculty of Engineering,
University of Duisburg-Essen, Duisburg 47057, Germany;
3. Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China)

Abstract: A quantum filter extracts the optimal estimate of quantum system states from the past history of weak continuous measurements on a quantum system by using the quantum Bayesian theory. However, the online computation burden of a quantum filter increases quadratically along with the increase of the quantum system dimension. We propose a quantum projection filtering method, aiming to reduce the online computation burden of the quantum filter. By using a differential geometric approach, the trajectory of the resulting quantum filter is constrained to be evolving within a finite-dimensional differentiable submanifold. In other words, the quantum state can be calculated through online calculation of the coordinate system of this submanifold. Simulation results from a two-level quantum system demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: quantum filter; differentiable manifold; open quantum systems; exponential quantum projection filter; state estimation

1 引言(Introduction)

在过去的几十年中, 量子信息技术取得了巨大的进步和成功, 使得对原子、光子层级的物质系统的探测与调控成为可能, 也为新一代信息技术的实现提供了技术基础[1–2]. 量子信息技术实现的一个关键环节是获取量子态信息. 然而, 与宏观物理系统截然不同的是, 一方面量子测量只能提供被观测量子系统的部分信息; 另一方面量子测量会不可避免地使得量子态发生随机坍塌[3]. 这使得量子态的估计问题非常类似于经典控制问题中部分状态可测随机系统的滤波问题. 在这一估计问题中, 开放量子系统动态(量子随机微分方程)作为先验知识, 系统输出(零差检测器产生的光电流)作为已知数据, 量子态的最小均方估计则由状态相对于光电流的条件期望给出(贝叶斯估计方法). 量子态最优估计所满足的动态方程称为量子滤波器[4–7].

量子滤波器是一个动态系统, 其状态量是一个复矩阵, 即量子密度矩阵. 同经典情形一样, 利用微分流

收稿日期: 2017−10−2; 录用日期: 2017−11−22.
†通信作者. E-mail: qing.gao.chance@gmail.com.
本文责任编委: 崔巍.
德国洪堡基金, 江苏省住房与城乡建设厅项目(2017ZD253)资助.
Supported by Alexander von Humboldt Foundation of Germany and Jiangsu Provincial Department of Housing and Urban-Rural Development (2017ZD253).

形结构可以很方便地描述量子滤波器. 对于一个具有n阶能级的量子系统, 其量子态属于n维希尔伯特空间的一个n^2-1维微分流形(由所有半正定自伴且迹为1的$n\times n$维复矩阵构成), 而量子滤波器的解轨迹, 即量子轨迹, 则是该微分流形上的一条曲线. 量子态的在线求解问题等价于实时求解一个n^2-1维的坐标系统, 在系统能级数较大时, 很容易陷入维度灾难.

投影滤波方法是一种有效的滤波器降维逼近方法, 最早用于经典非线性滤波器的逼近问题[8–9]. 量子投影滤波的结果可见文献[10–11], 同经典的结果类似, 其基本思想是在希尔伯特空间中构建一个低维子流形, 利用几何投影操作将量子轨迹限制在子流形上, 进而通过求解子流形的有限维坐标系统来近似获取量子态信息. 文献[10]中假设量子态具有某种已知解析结构. 在文献[11]中去掉了这一苛刻的假设, 转而用一种非监督学习辨识算法去设计子流形. 值得指出的是, 在系统能级较高时, 这种辨识算法本身可能也是非常耗时的. 本文介绍了一种指数型量子投影滤波方法, 其中子流形被设计为一类特殊的非归一化指数量子密度矩阵, 并被赋予了严格的量子Fisher度量几何结构. 本文针对特殊的开放量子系统, 对量子投影滤波器进行了简化并给出了逼近误差上界. 最后, 仿真算例说明了方法的有效性. 部分相关论述可见于文献[12–13].

2 量子信息几何理论简介(Introduction to quantum information geometry)

从数学层面上, 量子力学理论其实可以视作一种扩展的随机理论(非互易随机理论)[4]. 因此很多经典随机理论中的概念可以扩展至量子系统中, 比如统计模型的信息几何理论可以拓展至量子系统情形. 本节将简要介绍量子信息几何理论的一些基础, 并着重描述由量子态构成的流形上的Fisher度量定义. 更详细的描述请见文献[14]一书第7章.

本文先简要介绍下量子系统的力学描述. 基于量子力学基本原理, 任意微观粒子$\mathcal{Q}$的物理特性均由相应希尔伯特空间$\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$上的线性算子或复矩阵描述. 在本文中, 假设$\dim(\mathcal{H}_{\mathcal{Q}})=n<\infty$. 量子态由$\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$上的量子密度矩阵$\rho$表示, 且$\rho$具有如下性质:

- ρ是半正定自伴复矩阵, 即$\rho=\rho^\dagger$, 且$\rho\geqslant 0$;
- $\mathrm{tr}(\rho)=1$,

其中$\dagger$表示矩阵的复共轭转置. 此外, 微观粒子的物理特性, 比如位置、动量、能量、自旋等均可由$\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$上的的自伴复矩阵表示, 称为量子观测.

设X是某个量子观测, 则X满足如下谱分解

$$X=\sum_{j=1}^{n}x_jP_j, \tag{1}$$

其中: $x_j, j=1,2,\cdots,n$称为量子观测X的本征值; $P_j, j=1,2,\cdots,n$是相应特征空间上的投影算子, 满足$\sum\limits_{j=1}^{n}P_j=I$以及$P_j\geqslant 0$. 在量子态$\rho$已知情况下, 对量子观测$X$的一次测量会随机得到$x_1,\cdots,x_n$的某个值, 得到结果$x_j$的概率是$\mathrm{tr}(\rho P_j)$. 由这一简单描述可知, 量子观测其实是一种广义的随机变量; 而量子态ρ则是相应的广义随机概率分布, 它包含了量子系统的全部信息.

在某些应用比如后文的滤波器降维问题中, 非归一化的量子态所构成的几何结构较为适用. 先定义希尔伯特空间$\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$中的所有自伴复矩阵的集合为

$$\boldsymbol{A}=\{A|A=A^\dagger\}. \tag{2}$$

进而, 用

$$\boldsymbol{Q}=\{\bar\rho|\bar\rho\geqslant 0,\bar\rho\in\boldsymbol{A}\} \tag{3}$$

代表$\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$中所有半正定自伴复矩阵(非归一化量子态)的集合. 可知, $\boldsymbol{Q}$是$\boldsymbol{A}$的一个闭合子集, 且构成具有维度$\dim(\boldsymbol{Q})=n^2$的实流形. 用$\mathscr{T}_{\bar\rho}(\boldsymbol{Q})$表示流形$\boldsymbol{Q}$上的元素$\rho$处的切空间. 显然, $\mathscr{T}_{\bar\rho}(\boldsymbol{Q})$ 等同于$\boldsymbol{A}$.

在实流形$\boldsymbol{Q}$上任意确定一组坐标系统$[\varepsilon^i], i=1,2,\cdots,n^2$, 流形上每个元素可参数化为$\bar\rho_\varepsilon$. 则切空间$\mathscr{T}_{\bar\rho_\varepsilon}(\boldsymbol{Q})$的一组自然基矢可表示为

$$(\partial_i)^{(m)}=\partial_i, \tag{4}$$

其中$\partial_i:=\dfrac{\partial\bar\rho_\varepsilon}{\partial\varepsilon^i}$. 假设$\{\partial_i\}$是线性独立的, 那么就有

$$\mathscr{T}_{\bar\rho_\varepsilon}(\boldsymbol{Q})=\mathrm{Span}\{\partial_i\}. \tag{5}$$

微分流形$\boldsymbol{Q}$并不具备内积结构, 这使得$\boldsymbol{Q}$上的距离概念缺乏明确定义. 因此, 需要在流形中定义黎曼结构以完善其几何特性. 具体来说, 需要在切空间$\mathscr{T}_{\bar\rho}(\boldsymbol{Q})$上选择内积$\ll\cdot,\cdot\gg_{\bar\rho}$. 令$U$是希尔伯特空间$\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$上的酉矩阵, $A,B\in\mathscr{T}_{\bar\rho}(\boldsymbol{Q})$, 该内积须满足如下性质:

- $\ll UAU^\dagger, UBU^\dagger\gg_{U\bar\rho U^\dagger}=\ll A,B\gg_{\bar\rho}$;
- 如果$[\bar\rho,A]=0$, 则$\ll A,B\gg_{\bar\rho}=\mathrm{tr}(\rho AB)$.

本文采用如下对称性内积:

$$\ll A,B\gg_{\bar\rho}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar\rho AB+\bar\rho BA),\ \forall A,B\in\boldsymbol{A}. \tag{6}$$

基于该内积, 定义切向量$X\in\mathscr{T}_{\bar\rho}(\boldsymbol{Q})$的$e$–表示, 记作$X^{(e)}$且满足

$$\ll X^{(e)},A\gg_{\bar\rho}=\mathrm{tr}(X^{(m)}A),\ \forall A\in\boldsymbol{A}. \tag{7}$$

使用上面定义的e–表示, $\mathscr{T}_{\bar\rho}(\boldsymbol{Q})$的内积$\langle,\rangle$可定义为

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle_{\bar\rho}=&\ll X^{(e)},Y^{(e)}\gg_{\bar\rho}=\\&\mathrm{tr}(X^{(m)}Y^{(e)}),\ \forall X,Y\in\mathscr{T}_{\bar\rho}(\boldsymbol{Q}).\end{aligned} \tag{8}$$

那么$g=\langle,\rangle$构成了$\boldsymbol{Q}$上的一类Riemman度量, 称为量子Fisher度量. 可知该度量的基本成分为

$$g_{ij}=\langle\partial_i,\partial_j\rangle_{\bar{\rho}}=\mathrm{tr}(\partial_i^{(m)}\partial_j^{(e)}).\tag{9}$$

注意当$\mathrm{tr}(\bar{\rho})=1$, $\mathrm{tr}(\bar{\rho}A)=\mathrm{tr}(\bar{\rho}B)=0$时, 式(6)中定义的内积是同概率分布($\bar{\rho}$)下广义随机变量$A$和$B$的协方差. 因此以上定义的几何结构也被称为由广义协方差诱导的几何结构.

3 量子投影滤波 (Quantum projection filtering)

本文考虑的物理系统是量子光学中一类典型的开放量子系统[15]. 一个量子系统$\mathcal{Q}$, 比如原子系统, 与初始设置为真空态的外部单通道激光场处于弱相互作用中. 对于激光场而言, 原子系统在光路中的出现起到了干扰的作用, 这使得入射激光场与散射激光场产生差异, 这种差异携带了原子态的部分信息. 使用零差检测器可以将这一差异转化为维纳型经典光电流信号. 量子系统$\mathcal{Q}$的初始哈密顿量记作H, 系统与输入场相互作用的耦合矩阵或测量运算符记作L, 零差检测器测量散射光场上的实正交量子观测并产生光电流信号$Y(t)$. 本文中假设耦合矩阵是自伴的, 即$L=L^{\dagger}$. 在许多实验设置中, 这一假设是实际合理的, 例如利用光腔捕获冷原子的技术中量子系统满足这一条件[2,16].

在上述图景下, 量子系统$\mathcal{Q}$的密度矩阵演化满足如下方程[4,6]:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho_t=&\mathscr{L}_{L,H}^{\dagger}(\rho_t)\mathrm{d}t+\\&\mathscr{D}_L(\rho_t)\left(\mathrm{d}Y(t)-2\,\mathrm{tr}(\rho_t L)\mathrm{d}t\right),\end{aligned}\tag{10}$$

其中共轭Lindblad算子$\mathscr{L}_{L,H}^{\dagger}$和算子$\mathscr{D}_L$分别定义为

$$\begin{cases}\mathscr{L}_{L,H}^{\dagger}(X)=-\mathrm{i}[H,X]+LXL-\dfrac{1}{2}(LLX+XLL),\\\mathscr{D}_L(X)=LX+XL-2X\,\mathrm{tr}(XL)).\end{cases}\tag{11}$$

动态方程(10)即所谓量子滤波器或者量子随机主方程, 它提供了从光电流信号中提取的实时最优量子态估计. 对动态方程(10) 的求解在诸如量子状态估计和量子反馈控制等问题中至关重要[1,16]. 对于一个n维量子系统, 量子滤波器(10)等价于n^2-1个Itô随机微分方程. 若n较大, 量子滤波器的求解会产生巨大的计算复杂度.

3.1 指数型量子投影滤波器(An exponential quantum projection filter)

本小节基于量子态所形成的微分几何结构, 介绍一种指数型投影滤波方法去近似量子滤波器方程(10). 对于确定性动态系统, 微分流形结构能够很方便地描述其动态特性. 但是对于Itô型随机动态方程, 微分流形的定义并不适合. 这是因为Itô微分保留了二阶极小值, 而微分流形结构中未定义切向量空间的切向量(二阶微分). 可以用下面这个例子来说明:

例 1 有两个动态系统:

$$\mathrm{D1}:\mathrm{d}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}\mathrm{d}t,\tag{12}$$

$$\mathrm{D2}:\mathrm{d}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}\mathrm{d}w(t),\tag{13}$$

其中$w(t)$是标准维纳过程. 假设D1和D2有着相同的初始条件, 即$x(0)=y(0)=0$. 通过计算可知D1的轨迹是抛物线$y(t)-\dfrac{1}{2}x(t)^2=0$, 而D2的轨迹是$y(t)-\dfrac{1}{2}x^2(t)+t=0$. 换句话说, 动态方程(13)的右边项并不是曲线D2的切向量.

为了使用微分流形结构去描述随机动态系统, 需要将Itô微分方程转换为和Riemann积分类似的stratonovich微分方程. 为了简便起见, 接下来只分析量子滤波器(10)的线性形式(非归一化形式):

$$\mathrm{d}\bar{\rho}_t=\mathscr{L}_{L,H}^{\dagger}(\bar{\rho}_t)\mathrm{d}t+(L\bar{\rho}_t+\bar{\rho}_tL)\,\mathrm{d}Y(t),\tag{14}$$

满足$\rho_t=\bar{\rho}_t/\,\mathrm{tr}(\bar{\rho}_t)$, 以及$\bar{\rho}_t$初始设定为$\bar{\rho}_0=\rho_0$. 式(14)等价于如下Stratonovich量子随机微分方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{\rho}_t=&\left(-\mathrm{i}[H,\bar{\rho}_t]-L^2\bar{\rho}_t-\bar{\rho}_tL^2\right)\mathrm{d}t+\\&(L\bar{\rho}_t+\bar{\rho}_tL)\circ\mathrm{d}Y(t).\end{aligned}\tag{15}$$

投影滤波策略的基本思想如图1所示. 从微分几何学观点, 所有非归一化量子密度矩阵构成一个n^2维微分流形, 而式(15)的解$\bar{\rho}_t$则是该流形上的一条曲线, 动态方程(15)右边项则是这条曲线在各个点上的切向量, 属于某个线性切空间. 现在试图构建一个低维子流形, 通过在量子微分流形上定义Riemann度量, 使用投影操作找到该曲线在某个低维子流形上的映像(也是一条曲线), 并使得这两条曲线出发于同一个初始量子态, 则映像曲线就构成了对式(15)的有效逼近, 称为量子投影滤波器.

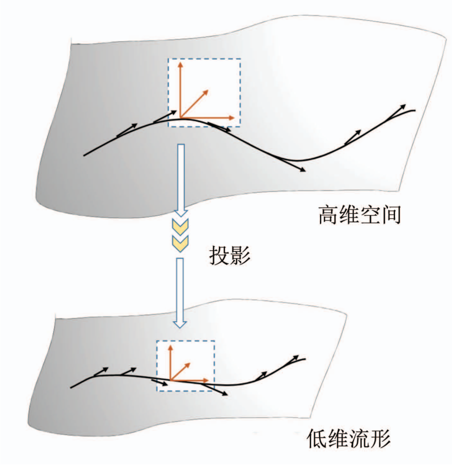

图 1 投影滤波的图形解释

Fig. 1 Projection filtering

本文中, 设计子流形为由非规范化量子密度矩阵的指数族组成的C^∞流形:

$$\boldsymbol{S}=\{\bar{\rho}_\theta\}=\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_iA_i}\rho_0\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_iA_i}\}, \tag{16}$$

其中子流形矩阵$A_i\in\boldsymbol{A},\ i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 这里假设整个子流行$\boldsymbol{S}$可通过一个单一的坐标图来覆盖($\boldsymbol{S}$, $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\Theta$), 其中$\Theta$是$\mathbb{R}^m$的包含原点的开子集, 那么$\dim\{\boldsymbol{S}\}=m$.

由Stratonovich随机微积分的链式规则可知

$$\mathrm{d}\bar{\rho}_\theta=\sum_{i=1}^{m}\bar{\partial}_i\circ\mathrm{d}\theta_i, \tag{17}$$

其中$\bar{\partial}_i:=\dfrac{\partial\bar{\rho}_\theta}{\partial\theta_i}$. 假设集合$\{\bar{\partial}_1,\cdots,\bar{\partial}_m\}$是线性独立的, 则该集合形成了$\mathscr{T}_{\bar{\rho}_\theta}(\boldsymbol{S})$的一组自然基矢:

$$\mathscr{T}_{\bar{\rho}_\theta}(\boldsymbol{S})=\mathrm{Span}\{\bar{\partial}_i,i=1,\cdots,m\}, \tag{18}$$

使用Stratonovich随机微分法则直接计算可以得到

$$\frac{\partial\bar{\rho}_\theta}{\partial\theta_i}=\frac{1}{2}(A_i\bar{\rho}_\theta+\bar{\rho}_\theta A_i). \tag{19}$$

由式(7)和式(19)可知$\bar{\partial}_i^{(e)}=A_i$. 因此, 公式(9)中的量子Fisher度量的每个分量由θ的实值函数给出:

$$\begin{aligned}&g_{ij}(\theta)=\ll\bar{\partial}_i^{(e)},\bar{\partial}_j^{(e)}\gg_{\bar{\rho}_\theta}=\mathrm{tr}(\bar{\rho}_\theta A_iA_j)=\\&\mathrm{tr}(\rho_0\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_iA_i}A_iA_j\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_iA_i})=\\&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\rho_0\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_iA_i}(A_iA_j+A_jA_i)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_iA_i}).\end{aligned} \tag{20}$$

显然, 量子Fisher信息矩阵是由$G(\theta)=(g_{ij}(\theta))$给出的$m\times m$维实数矩阵. 那么可以如下定义每个$\theta\in\Theta$的正交投影操作$\Pi_\theta$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\ &\longrightarrow\mathscr{T}_{\bar{\rho}_\theta}(\boldsymbol{S}),\\ \nu\ &\longmapsto\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}g^{ij}(\theta)\left\langle\nu,\bar{\partial}_j\right\rangle_{\bar{\rho}_\theta}\bar{\partial}_i,\end{aligned} \tag{21}$$

其中$(g^{ij}(\theta))$ 是量子信息矩阵$G(\theta)$的逆向矩阵.

考虑$\boldsymbol{S}$上围绕点$\bar{\rho}_\theta$的曲线, 其形式为$\zeta:t\mapsto\bar{\rho}_{\theta_t}$, 这对应于在$\Theta$上的实曲线$\gamma:t\mapsto\theta_t$. 令曲线$\zeta$始于初始条件$\bar{\rho}_{\theta_0}=\rho_0$, 或者令曲线$\zeta$始于$\theta_0=0$. 所得非归一化指数量子投影滤波器由如下量子随机微分方程给出:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{\rho}_{\theta_t}=&\,\Pi_{\theta_t}\left(-\mathrm{i}[H,\bar{\rho}_{\theta_t}]-L^2\bar{\rho}_{\theta_t}-\bar{\rho}_{\theta_t}L^2\right)\mathrm{d}t+\\&\Pi_{\theta_t}\left(L\bar{\rho}_{\theta_t}+\bar{\rho}_{\theta_t}L\right)\circ\mathrm{d}Y(t).\end{aligned} \tag{22}$$

定义 $\theta_t=(\theta_1(t),\cdots,\theta_m(t))'$, 曲线方程的表达形式以下定理中给出.

定理 1 实曲线$\gamma:t\mapsto\theta_t$满足下列随机动态微分方程

$$\mathrm{d}\theta_t=G(\theta_t)^{-1}\{\Xi(\theta_t)\mathrm{d}t+\Gamma(\theta_t)\circ\mathrm{d}Y(t)\}, \tag{23}$$

其中: $\theta_i(0)=0,i=1,\cdots,m$, $\Xi(\theta_t)$和$\Gamma(\theta_t)$均是θ_t上m–维列向量实函数, 它们的第j个元素分别由以下两个公式表示是

$$\Xi_j(\theta_t)=\mathrm{tr}\left(\bar{\rho}_{\theta_t}\left(\mathrm{i}[H,A_j]-A_jL^2-L^2A_j\right)\right)$$

和

$$\Gamma_j(\theta_t)=\mathrm{tr}(\bar{\rho}_{\theta_t}(A_jL+LA_j)).$$

证 同文献 [12]中定理1证明.

通过求解式(23)中的m个随机微分方程, 近似量子态$\tilde{\rho}_t$可以由$\tilde{\rho}_t=\bar{\rho}_{\theta_t}/\mathrm{tr}(\bar{\rho}_{\theta_t})$给出. 通过选择数量$m<n^2-1$便可减少计算复杂度. 在量子反馈控制技术实现过程中, 量子滤波器的快速求解可以减少控制信号时延, 对实现好的控制性能至关重要. 一般来讲, 随着低维流形维度m增大, 量子态的逼近精度提高, 但是同时计算复杂度也会变高. 实际中需要根据性能需要, 适当选择维度m, 以达到计算复杂度与控制性能的平衡.

3.2 子流形设计与逼近误差分析(Submanifold design and approximation errors analysis)

现在讨论如何设计子流形使得投影滤波器进一步简化. 由于L是自相关的, 它允许频谱分解$L=\sum\limits_{i=1}^{n_0}\lambda_iP_{L_i}$, 其中$n_0\leqslant n$是$L$的非零特征值数量, 集合$\{\lambda_i\}$包含了$L$的所有非零实数特征值, $\{P_{L_i}\}$是满足$P_{L_j}P_{L_k}=\delta_{jk}P_{L_k}$的一组投影算子.

定理 2 将子流形(16)设计如下:

$$\begin{cases}m=n_0,\\A_i=P_{L_i},\end{cases} \tag{24}$$

则量子投影滤波器的指数(23)可简化为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta_t=&\,G(\theta_t)^{-1}\,\mathrm{tr}(\mathrm{i}\bar{\rho}_{\theta_t}[H,A_j])\mathrm{d}t-\\&2\alpha\mathrm{d}t+2\beta\mathrm{d}Y(t),\end{aligned} \tag{25}$$

其中: $\alpha=(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_m^2)'$, $\beta=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)'$.

证 同文献 [12] 中定理2证明.

由定理2的证明中可以看到, 若依据式(24)来设计子流形, 则量子投影滤波器在流形各点上的两项校正残差[8]:

$$\mathfrak{C}_1(t)=-L^2\bar{\rho}_{\theta_t}-\bar{\rho}_{\theta_t}L^2+\Pi_{\theta_t}(L^2\bar{\rho}_{\theta_t}+\bar{\rho}_{\theta_t}L^2) \tag{26}$$

和

$$\mathfrak{C}_2(t)=L\bar{\rho}_{\theta_t}+\bar{\rho}_{\theta_t}L-\Pi_{\theta_t}(L\bar{\rho}_{\theta_t}+\bar{\rho}_{\theta_t}L) \tag{27}$$

均恒为零. 但预测残差

$$\mathfrak{P}(t)=-\mathrm{i}[H,\bar{\rho}_{\theta_t}]-\Pi_{\theta_t}(-\mathrm{i}[H,\bar{\rho}_{\theta_t}]) \tag{28}$$

仍存在. 一般来讲, 预测残差$\mathfrak{P}(t)$因与量子投影滤波器的轨迹相关而难以分析. 但是在某些特殊系统中, 仍然可以给出预测残差的上界.

对任意$n\times n$维矩阵A, 它的n个奇异特征值记作

$s_1(A), \cdots, s_n(A)$, 且满足 $s_1(A) \geqslant s_2(A) \geqslant \cdots \geqslant s_n(A)$. 如下引理在后续分析中会用到.

引理 1 (文献 [17] 第 177 页)A和B均是$n \times n$的矩阵, 那么

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(A)s_i(B), 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{29}$$

可得如下结果.

定理 3 当$[H, L] = 0$, 将子流形(16)设计如式(24), 则指数型量子投影滤波器(23)可进一步简化为

$$\mathrm{d}\theta_t = -2\alpha \mathrm{d}t + 2\beta \mathrm{d}Y(t), \tag{30}$$

其中: $\alpha = (\lambda_1^2, \cdots, \lambda_m^2)'$, $\beta = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)'$. 此时校正误差恒等于零, 预测残差满足

$$\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{tr}(\mathfrak{P}(t)^2)} \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}\, X_0^2}, \tag{31}$$

其中: E是相应于维纳过程$Y(t)$分布的期望算符, $X_0 = -\mathrm{i}[H, \rho_0]$.

证 式(30)易知.

定义$\Lambda(t) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \theta_i A_i$. 计算可知

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{P}(t) = -\mathrm{i}[H, \bar{\rho}_{\theta_t}] - \Pi_{\theta_t}(-\mathrm{i}[H, \bar{\rho}_{\theta_t}]) = \\
&\mathrm{e}^{\Lambda(t)} X_0 \mathrm{e}^{\Lambda(t)} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} g^{ij}(\theta)\, \mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\Lambda(t)} X_0 \mathrm{e}^{\Lambda(t)} A_j)\bar{\partial}_i = \\
&\mathrm{e}^{\Lambda(t)} X_0 \mathrm{e}^{\Lambda(t)} + \mathrm{i}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} g^{ij}(\theta)\, \mathrm{tr}(\bar{\rho}_{\theta_t}(-i[A_j, H]))\bar{\partial}_i = \\
&\mathrm{e}^{\Lambda(t)} X_0 \mathrm{e}^{\Lambda(t)}.
\end{aligned} \tag{32}$$

由引理1可知

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{tr}(\mathfrak{P}(t)^2)} = \mathrm{E}\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{2\Lambda(t)} X_0 \mathrm{e}^{2\Lambda(t)} X_0)} \leqslant \\
&\mathrm{E}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} s_i(\mathrm{e}^{2\Lambda(t)} X_0 \mathrm{e}^{2\Lambda(t)} X_0)} \leqslant \\
&\mathrm{E}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} s_i^2(\mathrm{e}^{2\Lambda(t)}) s_i^2(X_0)} \leqslant \\
&\sqrt{\sum_{i=1}^{m} s_i^2(X_0) \mathrm{E} s_1(\mathrm{e}^{2\Lambda(t)})} = \\
&\sqrt{\mathrm{tr}\, X_0^2 \mathrm{E} \max_i \mathrm{e}^{\theta_i(t)}}.
\end{aligned} \tag{33}$$

令$\epsilon_i(t) = \mathrm{e}^{\theta_i(t)}$, 则由式(30)可知

$$\mathrm{d}\epsilon_i(t) = 2\lambda_i \epsilon_i(t) \mathrm{d}Y(t), \tag{34}$$

故而$\mathrm{E}\epsilon_i(t) = \mathrm{E}\epsilon_i(0) = \mathrm{e}^{\theta_i(0)} = 1$. 代入式(33)–(31)可证得.

由定理3可得如下模型降阶结果.

推论 1 若系统哈密顿量H满足$[H, L] = 0$, 且制备系统初始态ρ_0满足$[\rho_0, H] = 0$, 则$\bar{\rho}_{\theta_t} \equiv \bar{\rho}_t$.

4 仿真实验(Simulation)

考虑一个具有色散耦合的双量子系统, 该系统可描述为2个spin-$\dfrac{1}{2}$系统[2,18]. 量子系统在z方向与激光场耦合, 且在y方向受到一个可调节强度的干扰磁场$d(t)$. 记集体旋转运算符为$J_\alpha = \dfrac{1}{2}\sigma_\alpha^{(1)} \otimes \sigma_\alpha^{(2)} (\alpha = x, y, z)$, 其中$\sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{y}, \sigma_\mathrm{z}$为Pauli矩阵:

$$\sigma_\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_\mathrm{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

系统的量子滤波方程为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\rho_t = &\mathscr{L}^{\dagger}_{J_z, u(t)J_y}(\rho_t)\mathrm{d}t + \\
&\mathscr{D}_{J_z}(\rho_t)\left(\mathrm{d}Y(t) - 2\,\mathrm{tr}(\rho_t J_z)\right).
\end{aligned} \tag{35}$$

可知, 为求得ρ_t, 需要求解15维的随机微分方程来确定ρ_t. 使用定理2, 依据式(24)设计子流形$\boldsymbol{S}$, 即流形维度为$m = 4$; 流形矩阵取做J_z的4个正交投影矩阵:

$$A_1 = \mathrm{diag}\{1, 0, 0, 0\},\quad A_2 = \mathrm{diag}\{0, 1, 0, 0\},$$
$$A_3 = \mathrm{diag}\{0, 0, 1, 0\},\quad A_4 = \mathrm{diag}\{0, 0, 0, 1\},$$

所设计的指数量子投影滤波器由式(25)给出, 并且$\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_3 = 1/2$和$\lambda_4 = -1/2$. 假设第1个原子初态为$0.25 * |1\rangle\langle 1| + 0.75 * |0\rangle\langle 0|$, 第2个原子初态为$0.5 * |1\rangle\langle 1| + 0.5 * |0\rangle\langle 0|$.

采用$\mathrm{d}Y(t) = 2\,\mathrm{tr}(\rho_t J_z)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t)$模拟光电流信号$Y(t)$, 用于驱动指数量子投影滤波器. 通过使用离散化方法进行蒙特卡罗模拟[19], 模拟参数设置如下, 模拟间隔$t \in [0, T]$, $T = 3$; 正态分布方差$\delta t = T/N_0$, $N_0 = 2^{12}$; 所选择的步长为$\Delta t = 2\delta t$; 扰动信号设置为$u(t) = 10a\sin(10t)$, a是满足标准正态分布的随机变量.

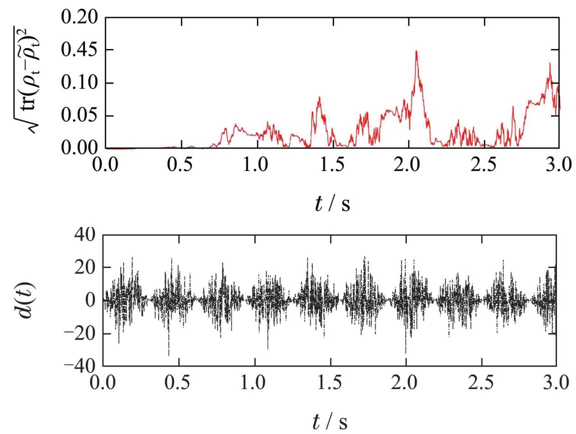

图 2 逼近性能

Fig. 2 Approximation performance

定理2的投影滤波策略允许使用$\tilde{\rho}_t = \bar{\rho}_{\theta_t}/\mathrm{tr}(\bar{\rho}_{\theta_t})$来估计$\rho_t$的量子信息状态. 分别计算量子滤波方程(35)和指数量子投影滤波方程(25). ρ_t与$\tilde{\rho}_t$之间差异的范数, 即$\sqrt{\mathrm{tr}(\rho_t - \tilde{\rho}_t)^2}$在图2中给出. 可以看到$\rho_t$与

$\tilde{\rho}_t$在这个时间间隔内非常相近, 模拟也证实了当干扰信号$u(t) \equiv 0$时, $\rho_t \equiv \tilde{\rho}_t$, 这符合推论1.

5 结论与展望(Conclusion and outlook)

本文介绍了一种量子投影滤波方法, 用于逼近量子滤波器或量子随机主方程. 通过设计一种由非归一化指数型量子密度矩阵构成的微分流形结构及相应的Riemann度量结构, 高维希尔伯特空间上的量子轨迹被限制在了低维的子流形上, 构成所谓指数型量子投影滤波器. 本文针对特殊的开发量子系统, 对量子投影滤波器进行了进一步的简化并给出了逼近误差的上界. 在色散耦合的双量子系统上的模拟结果表明, 指数型量子投影滤波器能够高度精确地逼近量子滤波器. 未来的研究包括一般性量子系统的投影滤波, 以及多光子滤波方程的投影逼近方法.

参考文献(References):

[1] HAMERLY R, MABUCHI H. Advantages of coherent feedback for cooling quantum oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(17): 173602.

[2] THOMSEN L K, MANCINI S, WISEMAN H M. Spin squeezing via quantum feedback [J]. *Physical Review A*, 2002, 65(6): 440 – 444.

[3] WISEMAN H M, MILBURN G J. *Quantum Measurement and Control* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[4] BOUTEN L, VAN HANDEL R, JAMES M R. An introduction to quantum filtering [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, 46(6): 2199 – 2241.

[5] SONG H, ZHANG G, XI Z. Continuous-mode multi-photon filtering [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2016, 54(3): 1602 – 1632.

[6] ZHANG J, LIU Y X, WU R B, et al. Quantum feedback: theory, experiments, and applications [J]. *Physics Reports*, 2017, 679: 1 – 60.

[7] GAO Q, DONG D, PETERSEN I R. Fault tolerant quantum filtering and fault detection for quantum systems [J]. *Automatica*, 2016, 71: 125 – 134.

[8] BRIGO D, HANZON B, LEGLAND F. A differential geometric approach to nonlinear filtering: the projection filter [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 43(2): 247 – 252.

[9] BRIGO D, HANZON B, LEGLAND F. Approximate nonlinear filtering by projection on the manifold of exponential densities [J]. *Bernoulli*, 1999, 5(3): 495 – 534.

[10] VAN HANDEL R, MABUCHI H. Quantum projection filter for a highly nonlinear model in cavity QED [J]. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2005, 7(10): 226 – 236.

[11] NIELSEN A, HOPKINS A, MABUCHI H. Quantum filter reduction for measurement-feedback control via unsupervised manifold learning [J]. *New Journal of Physics*, 2009, 11(10): 1 – 15.

[12] GAO Q, ZHANG G, PETERSEN I R. An exponential quantum projection filter for open quantum systems [J]. arXiv: 1705.09114 [math-ph], 2017.

[13] GAO Q, ZHANG G. Quantum projection filtering for open quantum systems [C] //*The 56th IEEE Conference on Decision and Control*.

[14] AMARI S, NAGAOKA H. *Methods of Information Geometry* [M]. Oxford: Oxford University Press, 2000.

[15] BREUER H P, PETRUCCIONE F. *The Theory of Open Quantum Systems* [M]. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[16] VAN HANDEL R, STOCKTON J K, MABUCHI H. Feedback control of quantum state reduction [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 768 – 780.

[17] COHEN J E. Spectral inequalities for matrix exponentials [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1988, 111(88): 25 – 28.

[18] CONG Shuang, LOU Yuesheng. Coherent control of spin 1/2 quantum systems using phases [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(2): 187 – 192.
(丛爽, 楼越升. 利用相位的自旋1/2量子系统的相干控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(2): 187 – 192.)

[19] HIGHAM D. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations [J]. *SIAM Review*, 2001, 43(3): 525 – 546.

作者简介:

吴征天 (1986–), 男, 讲师, 主要研究方向为信号处理与优化理论, E-mail: wzht8@mail.usts.edu.cn;

高 庆 (1988–), 男, 研究员, 主要研究方向为智能系统控制以及量子系统控制, E-mail: qing.gao.chance@gmail.com;

张国峰 (1975–), 男, 副教授, 主要研究方向为量子信息与控制, E-mail: Guofeng.Zhang@polyu.edu.hk.