

线性时不变系统的切换控制器设计及 H_2 性能实现

吴伟林, 谢巍[†], 何伟, 张浪文

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 在复杂的控制系统中, 使用单一的线性时不变(linear time invariant, LTI)控制器不能有效地处理对象的动态变化或者满足系统更多的性能要求, 基于此本文主要针对于一个LTI对象设计一个切换控制器, 该切换控制器包含多个预先且独立设计的LTI控制器, 所有的这些LTI控制器都能够使闭环系统稳定且满足相应 H_2 控制性能准则. 基于本文提出的 H_2 性能状态空间实现方法, 设计的切换控制器不仅可以保证在任意切换的情况下整个闭环系统满足某一 H_2 性能, 而且可以保证局部子系统的切换点满足相应的 H_2 性能, 仿真结果验证了方法的有效性.

关键词: 切换控制; 任意切换; H_2 性能实现; 参数化

引用格式: 吴伟林, 谢巍, 何伟, 等. 线性时不变系统的切换控制器设计及 H_2 性能实现. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 697 – 704

DOI: 10.7641/CTA.2018.70817

Switching controller design for a specific linear time invariant plant and H_2 performance realisation

WU Wei-lin, XIE Wei[†], HE Wei, ZHANG Lang-wen

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The use of single linear time invariant (LTI) controller can't address dynamic changes of the plant or satisfy more performance requirements of the system efficiently in complex control systems. Therefore, a switching controller is designed for the LTI plant in the paper, which includes several LTI controllers designed beforehand and independently that can make the closed-loop system stable and satisfy corresponding H_2 control performance criteria. The switching controller, which is designed according to H_2 performance state space realization method proposed in this paper, not only can guarantee certain H_2 performance of the overall closed-loop system under arbitrary switching, but also guarantee corresponding H_2 performance of local subsystems at each switching points. Finally, the effectiveness of proposed method is testified by the simulation results.

Key words: switching control; arbitrary switching; H_2 performance realization; parameterization

Citation: WU Weilin, XIE Wei, HE Wei, et al. Switching controller design for a specific linear time invariant plant and H_2 performance realisation. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 697 – 704

1 引言

切换系统作为混杂系统中一类重要的类型, 一般由线性动力学描述的一组子系统组成(微分方程或差分方程), 并且在子系统之间有特殊的切换规则. 近年来, 对切换系统的分析和控制的研究引起了众多学者的广泛关注^[1-5]. 切换系统有着强大的工程应用背景, 常常用于构造控制器广泛的应用在物理和工程中^[6-9].

文献[10]综述了切换系统在稳定性分析与切换稳定方面的研究成果, 重点讨论了在任意切换下切换线性系统的稳定性分析, 并强调了渐近稳定的必要条件和充分条件. 在复杂的控制系统中, 使用单一的线性时不变(linear time invariant, LTI)控制器不能有效地处理对象的动态变化或者满足系统更多的性能要求, Hespanha和Morse^[11]对一个LTI对象提出了一种切换

收稿日期: 2017-11-10; 录用日期: 2018-06-19.

[†]通信作者. E-mail: weixie@scut.edu.cn; Tel.: +86 13710696974.

本文责任编辑: 吴立刚.

广东省引进创新创业团队计划资助(2016YT03G125), 广东省科技计划项目(2017B090914001, 2017A040405023, 2017A040403064, 2017B09091040, 2017B030306017, 2016B090927007), 广州市科技计划项目(201707010152), 广东省自然科学基金项目(2017A030313385)资助.

Supported by the YangFan Innovative & Entrepreneurial Research Team Project of Guangdong Province (2016YT03G125), the Science and Technology planning Project of Guangdong Province (2017B090914001, 2017A040405023, 2017A040403064, 2017B09091040, 2017B030306017, 2016B090927007), the Science and Technology Program of Guangzhou (201707010152) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province (2017A030313385).

控制器的设计方法,在任意切换下实现控制系统的全局稳定.文献[12-13]基于Youla-kucera参数化的方法,在给定一个线性对象和一组线性稳定的控制器,无论控制器之间如何切换,总是能够找到控制器的最小实现保证系统的全局稳定.

对于稳定的控制系统,瞬态响应是一项非常重要的性能指标,主要分为最大超调量和调节时间.信号的 H_2 范数越小说明它的时间响应收敛得快.因此, H_2 范数非常适用于表示瞬态响应的优劣.为了改善干扰和参考输入的响应特性,在设计时应使闭环传递函数的 H_2 范数尽量小.非奇异 H_2 控制问题可以通过著名的Riccati等式基本算法来求解,文献[14]提供了稳定控制器的参数化方法,保证闭环系统满足 H_2 性能.在切换控制器设计中,给定一个严格真的对象,设计一个切换控制器,在任意切换条件下如何保证控制系统的稳定性,这个问题在文献[11]已作为一个开放试的问题指出.文献[16]提出对一个LTI对象设计一个切换控制器,运用Youla参数化方法寻找LTI控制器自由参数的状态空间实现,保证控制器在任意切换下都能使系统满足 H_∞ 性能.然而,针对一个LTI对象设计切换控制器参数化实现使得闭环系统满足 H_2 控制性能还没有被讨论.

本文主要研究的内容是对一个LTI对象设计一个切换控制器,该切换控制器包含多个预先且独立设计的LTI控制器,且每个控制器都能使闭环系统满足某些 H_2 性能.当切换信号是任意的情况下,该组 H_2 控制器不能满足在切换时保持系统的稳定性及性能指标.本文首先将这组LTI控制器进行参数化^[17],用一组自由参数来表示,且每个控制器的自由参数都满足相应的 H_2 性能.因此,在LTI控制器之间切换可以转换为在相应的自由参数之间切换.然而,设计控制器重要的步骤变为这些自由参数选择合适的状态空间实现,使它们之间的切换不仅能够保证闭环系统稳定,而且满足某一 H_2 性能指标.最后,仿真结果验证了本方法的有效性.

2 定义和问题描述

考虑一个LTI系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{21}u, \\ y = C_2x + D_{21}w. \end{cases} \quad (1)$$

有如下假设条件成立:

- 1) (A, B_2) 是可镇定的, (C_2, A) 是可检测的;
- 2) D_{12} 列满秩, $D_{12}^T D_{12} = I$; D_{21} 行满秩, $D_{21} D_{21}^T = I$;

- 3) 对所有的 ω , $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ 列满秩;
- 4) 对所有的 ω , $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ 行满秩.

其中: x 为 n 维状态向量, w 为 r 维扰动输入, u 为 p 维控制输入, z 为 m 维控制输出, y 为 q 维测量输出.

假设存在一组控制器传递矩阵 $K_i(s)$,能够使得对象分别满足相应的 H_2 控制性能 γ_i .每个控制器的状态空间实现 K_i 有如下形式:

$$K_i = \begin{bmatrix} A_{k,i} & B_{k,i} \\ C_{k,i} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 $i = i(t) \in \tau = \{1, 2, \dots, r\}$.

由式(1)和(2)可以得到闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_{cl,i}\xi + B_{cl,i}w, \\ z = C_{cl,i}\xi, \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} \xi &= [x \ \hat{x}]^T, \\ A_{cl,i} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_{k,i} C_2 & B_2 C_{k,i} \\ B_{k,i} C_2 & A_{k,i} \end{bmatrix}, \\ B_{cl,i} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_{k,i} D_{21} \\ B_{k,i} D_{21} \end{bmatrix}, \\ C_{cl,i} &= [C_1 + D_{12} D_{k,i} C_2 \quad D_{12} C_{k,i}], \\ D_{cl,i} &= 0. \end{aligned}$$

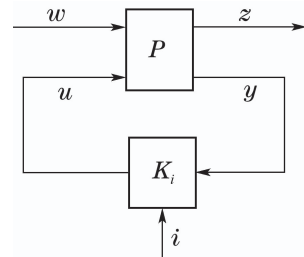


图1 切换控制系统

Fig. 1 Switched control system

定义1 给定一个指数稳定系统 G ,则 G 的 H_2 范数可以定义为

$$\|G\|_2^2 = \lim_{h \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h z^T(t) z(t) dt \right\},$$

其中:系统 G 的初始状态为零, w 是具有恒定功率谱密度矩阵的零均值白噪声, $E\{\cdot\}$ 表示数学期望.

引理1 以下两个性质等价^[18]:

- i) 图1所示的每个对应的局部闭环系统都具有 H_2 性能 γ_i .

ii) 存在正定矩阵 W_i 和 X_i 满足如下不等式组:

$$\begin{bmatrix} A_{cl,i}X_i + X_iA_{cl,i}^T & B_{cl,i} \\ B_{cl,i}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} X_i & X_iC_{cl,i}^T \\ C_{cl,i}X_i & W_i \end{bmatrix} > 0, \quad (5)$$

$$\text{Tr } W_i < \gamma_i^2. \quad (6)$$

问题: 给定一个LTI对象和一组LTI控制器集合 $K_i(s)$ 如式(2)所示, 对系统(3)每个 i 对应的局部子系统都满足一个相应的H₂控制性能 γ_i , 在什么条件下, 能够存在一组LTI控制器 $K_i(s)$ 自由参数的状态空间实现, 不仅可以保证控制器在任意切换下整个闭环系统的H₂性能 $\gamma = \max(\gamma_i)$, 而且可以保证切换子系统的切换点满足相应的H₂控制性能.

3 主要结果

在本节中, 寻找一个可容许的控制器 K 最小的 $\|T_{zw}\|_2$ 范数. 给定两个哈密顿矩阵如下所示^[19]:

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & -B_2B_2^T \\ -C_1^TC_1 & -A^T \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} A^T & -C_2^TC_2 \\ -B_1B_1^T & -A \end{bmatrix},$$

且 $X = \text{Ric}(H_2)$ 和 $Y = \text{Ric}(J_2)$ 是半正定的, 其中 $\text{Ric}(\cdot)$ 表示黎卡提方程的镇定解.

定义 $F = -B_2^TX$, $L = -YC_2^T$ 和

$$A_F = A + B_2F, \quad C_F = C_1 + D_{12}F,$$

$$A_L = A + LC_2, \quad B_L = B_1 + LD_{21},$$

$$\hat{A} = A + B_2F + LC_2,$$

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} A_F & I \\ C_F & 0 \end{bmatrix}, \quad G_f(s) = \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

引理2 存在唯一最优控制器

$$K_{\text{opt}}(s) = \begin{bmatrix} \hat{A} & -L \\ F & 0 \end{bmatrix},$$

且

$$\min \|T_{zw}\|_2^2 = \|G_cB_1\|_2^2 + \|FG_f\|_2^2 = \|G_cL\|_2^2 + \|C_1G_f\|_2^2.$$

令 $\min \|T_{zw}\|_2^2 = \gamma_{\text{opt}}^2$, 然而 $\|G_cB_1\|_2^2 + \|FG_f\|_2^2 = \gamma_{\text{opt}}^2$.

如果满足这两个Riccati方程 $\text{Ric}(H_2)$ 和 $\text{Ric}(J_2)$, 所有可容许控制器集合的分离结构可由图2所示.

其中:

$$J = \begin{bmatrix} A + B_2F + LC_2 & -L & B_2 \\ F & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} A & -L & B_2 \\ F & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix}.$$

证 详细推导可参考文献[16].

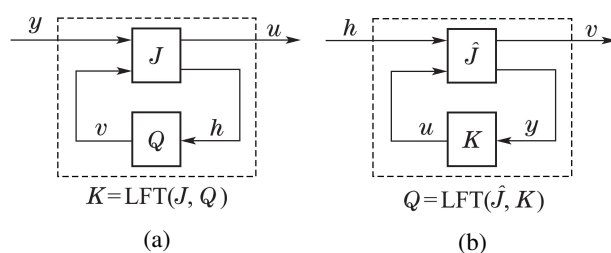


图2 $K = \text{LFT}(J, Q)$ 和 $Q = \text{LFT}(\hat{J}, K)$

Fig. 2 $K = \text{LFT}(J, Q)$ and $Q = \text{LFT}(\hat{J}, K)$

引理3 所有使得 $\|T_{zw}\|_2 < \gamma$ 的容许控制器族等于从 y 到 u 的所有传递矩阵的集合, 其中: $Q \in \mathbb{RH}_2$,

$$\|Q\|_2^2 < \gamma^2 - (\|G_cB_1\|_2^2 + \|F_2G_f\|_2^2),$$

$$M = \begin{bmatrix} A + B_2F_2 + L_2C_2 & -L_2 & B_2 \\ F_2 & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix},$$

H₂控制器结构为

$$K(s) = \begin{bmatrix} A + B_2F_2 + L_2C_2 & Y_2C_2^T \\ -B_2^TX_2 & 0 \end{bmatrix},$$

且 $\min \|T_{zw}\|_2^2 = \|G_cB_1\|_2^2 + \|F_2G_f\|_2^2$, 其中: $F_2 = -B_2^TX_2$, $L_2 = -Y_2C_2^T$.

证 首先定义

$$U = \begin{bmatrix} A_F & B_2 \\ C_F & D_{12} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} A_L & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}.$$

则有

$$T_{zw} = G_cB_1 - UF_2G_f + UQV.$$

根据参考文献[16], G_cB_1 和 U 是正交的, 因此

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \|G_cB_1\|_2^2 + \|UF_2G_f - UQV\|_2^2 = \|G_cB_1\|_2^2 + \|F_2G_f - QV\|_2^2.$$

根据对偶性, 容易证明, G_f 和 V 也是正交的, 即 $G_fV \in \mathbb{RH}_2$ 和 V 是互内矩阵, 故有

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \|G_cB_1\|_2^2 + \|UF_2G_f - UQV\|_2^2 = \|G_cB_1\|_2^2 + \|F_2G_f - QV\|_2^2. \quad (7)$$

这清楚的表明, 当 $Q = 0$ 得到的是一个唯一最优控制器, 因此 $K = F_1(M, 0)$ 是唯一的最优控制器.

本文的目的是对一个LTI对象设计一个切换控制器, 该切换控制器包含多个预先且独立设计的LTI控制器, 且每个LTI控制器都能使闭环系统满足某些H₂性能. 假设切换信号是任意的, 该组LTI控制器不能满足在任意切换时保持系统的稳定性及性能指标, 需要寻找一组控制器自由参数 Q_i 的状态空间实现, 不仅能保证在任意切换的情况下整个闭环系统的H₂控制性能, 而且也能保证切换子系统的切换点满足H₂性能.

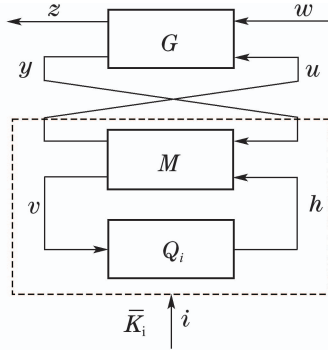


图3 反馈控制系统结构图

Fig. 3 Feedback control system structure diagram

定理1 只要切换系统 Q 的每个子系统 $Q_i =$

$$\begin{bmatrix} A_{Q_i} & B_{Q_i} \\ C_{Q_i} & D_{Q_i} \end{bmatrix} \text{ 分别满足某一 } H_2 \text{ 性能 } \gamma_{Q_i}, \text{ 存在一正定}$$

矩阵, 总能保证 Q 在任意切换的情况下满足 H_2 性能准则 $\|Q\|_2 < \max(\gamma_{Q_i})$, 同时也能保证 Q_i 的每个点满足 H_2 性能 γ_{Q_i} , 其中: Q_i 的状态空间表达式如式(8)所示, $i = i(t) \in \tau = \{1, 2, 3, \dots, r\}$,

$$\begin{bmatrix} A_{Q_i} & B_{Q_i} \\ C_{Q_i} & D_{Q_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_{k,i} C_2 & B_2 C_{k,i} & B_2 D_{k,i} - L \\ B_{k,i} C_2 & A_{k,i} & B_{k,i} \\ D_{k,i} C_2 - F & C_{k,i} & D_{k,i} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

证 如果每个子系统 Q_i 都满足 H_2 性能准则 γ_{Q_i} . 根据引理1, 通过线性矩阵不等式的性能准则, 存在正定矩阵 X_i 和 W_i 满足如下LMI不等式:

$$\begin{bmatrix} A_{Q_i} X_i + X_i A_{Q_i}^T & B_{Q_i} \\ B_{Q_i}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} X_i & X_i C_{Q_i}^T \\ C_{Q_i} X_i & W_i \end{bmatrix} > 0, \quad (10)$$

$$\text{Tr } W_i < \gamma_{Q_i}^2. \quad (11)$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{Q_i} &= R_i^{-T} A_{Q_i} R_i^T, \quad \tilde{B}_{Q_i} = R_i^{-T} B_{Q_i}, \\ \tilde{C}_{Q_i} &= C_{Q_i} R_i^T, \quad R_i = S^{-1} S_i, \quad X_i = S_i^T S_i, \end{aligned}$$

则式(9)可以转换为

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{R_i^T \tilde{A}_{Q_i} S^T S R_i\} & R_i^T \tilde{B}_{Q_i} \\ \tilde{B}_{Q_i}^T R_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

其中 $\text{He}\{x\} = x + x^T$.

对于式(12)左边乘上 $T_i = \begin{bmatrix} R_i^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 右边乘上 T_i^T ,

可得到

$$\begin{bmatrix} R_i^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{He}\{R_i^T \tilde{A}_{Q_i} S^T S R_i\} & R_i^T \tilde{B}_{Q_i} \\ \tilde{B}_{Q_i}^T R_i & -I \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} R_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

同样, 不等式(10)可推导为

$$\begin{bmatrix} R_i^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i & X_i R_i^{-1} \tilde{C}_{Q_i}^T \\ \tilde{C}_{Q_i} R_i^{-T} X_i & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0. \quad (14)$$

然而, LMI不等式组可以重新描述成

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{Q_i} X + X \tilde{A}_{Q_i}^T & \tilde{B}_{Q_i} \\ \tilde{B}_{Q_i}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} X & X \tilde{C}_{Q_i}^T \\ \tilde{C}_{Q_i} X & W_i \end{bmatrix} > 0, \quad (16)$$

$$\text{Tr } W_i < \gamma_{Q_i}^2. \quad (17)$$

由于

$$\begin{aligned} Q_i(s) &= \tilde{C}_{Q_i} [sI - \tilde{A}_{Q_i}]^{-1} \tilde{B}_{Q_i} = \\ &C_{Q_i} [sI - A_{Q_i}]^{-1} B_{Q_i}, \end{aligned}$$

因此, 存在一个共同的正定矩阵 X , 使得切换系统 Q 在任意切换时都能满足 H_2 性能准则 $\|Q\|_2 < \max(\gamma_{Q_i})$, 同时 Q_i 的每个切换点的 H_2 性能也得到满足, 该切换点的性能即为 Q_i 的 H_2 范数 $\|Q_i\|_2 < \gamma_{Q_i}$.

步骤 i 对每个 Q_i 的实现 $\{A_{Q_i}, B_{Q_i}, C_{Q_i}, D_{Q_i}\}$ 传递函数表达式为 $Q_i(s) = C_{Q_i} [sI - A_{Q_i}]^{-1} B_{Q_i}$, 所有固定的 i 对应的 Q_i 都可以满足 H_2 性能 γ_{Q_i} .

步骤 ii 通过求解不等式(9)–(11)得到正定矩阵解 X_i 和 W_i .

步骤 iii 通过Cholesky's分解 $X_i = S_i^T S_i$, 其中 S_i 是上三角矩阵.

步骤 iv 得到 Q_i 状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{A}_{Q_i} z(t) + \tilde{B}_{Q_i} v(t), \\ h(t) &= \tilde{C}_{Q_i} z(t) + \tilde{D}_{Q_i} v(t), \end{aligned} \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{Q_i} &= R_i^{-T} A_{Q_i} R_i^T, \quad \tilde{B}_{Q_i} = R_i^{-T} B_{Q_i}, \\ \tilde{C}_{Q_i} &= C_{Q_i} R_i^T, \quad \tilde{D}_{Q_i} = 0. \end{aligned}$$

步骤 v 对于 Q_i 的实现, 能够保证 Q 在任意切换下的 H_2 控制性能最大值为 $\gamma_Q = \max(\gamma_{Q_i})$. 证毕.

定理2 给定LTI对象(1)和一组控制器传递矩阵集合 $K_i(s), i = i(t) \in \tau\{1, 2, \dots, r\}$, 构造如图1所示的闭环系统, 将控制器通过图2所示进行参数化后, 若存在一组非最小实现切换控制器传递矩阵集合 $\tilde{K}_i(s)$ 构造如图3所示, 当切换系统 Q 每一个子系统 Q_i 都满足某一 H_2 性能指标 $\|Q_i\|_2^2 < \gamma_i^2 - \gamma_{\text{opt}}^2$ 时, 不仅可以在任意切换情况下保证每一个固定的 i 对应的切换子系统都满足相应的 H_2 性能 γ_i , 同时也能保证整个闭环系统都满足 H_2 性能 $\gamma = \max(\gamma_i)$. $\tilde{K}_i(s)$ 的状

态空间实现给出如下:

$$A_{k,i} = \begin{bmatrix} \bar{A} + B_2 \tilde{D}_{k,i} C_2 & B_2 \tilde{C}_{Q,i} \\ -\tilde{B}_{Q,i} C_2 & \tilde{A}_{Q,i} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$B_{k,i} = \begin{bmatrix} B_2 \tilde{D}_{Q,i} - L_2 \\ \tilde{B}_{Q,i} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$C_{k,i} = [F_2 - \tilde{D}_{Q,i} C_2 \quad \tilde{C}_{Q,i}], \quad (21)$$

$$D_{k,i} = \tilde{D}_{Q,i}, \quad (22)$$

其中:

$$\begin{cases} \bar{A} = A + B_2 F_2 + L_2 C_2, \quad L_2 = -B_2^T X_2, \\ F_2 = Y_2 C_2^T, \\ \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{Q,i} & \tilde{B}_{Q,i} \\ \hline \tilde{C}_{Q,i} & \tilde{D}_{Q,i} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} R_i A_{Q,i} R_i^{-1} & R_i B_{Q,i} \\ \hline C_{Q,i} R_i^{-1} & D_{Q,i} \end{array} \right] \end{cases} \quad (23)$$

及

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{Q,i} & B_{Q,i} \\ \hline C_{Q,i} & D_{Q,i} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 D_{k,i} C_2 & B_2 C_{k,i} \\ \hline B_{k,i} C_2 & A_{k,i} \end{array} \middle| \begin{array}{c} B_2 D_{k,i} - L \\ B_{k,i} \end{array} \right],$$

R_i 是由 $X_i = R_i^T R_i$ 分解的上三角矩阵.

证 由定理1已得出, 当 Q 对应的每个子系统 Q_i 都满足某一H₂性能 γ_{Q_i} 时, 总是能保证 Q_i 在任意切换的情况下满足 $\gamma_Q = \max(\gamma_{Q_i})$. 然而, 根据图3得到

$$\begin{aligned} T_{zw,i} &= F_1(G, \bar{K}_i) = \\ &F_1(G, F_1(M, Q_i)) = F_1(N, Q_i), \end{aligned}$$

其中

$$N = \left[\begin{array}{cc|cc} A_F & -B_2 F & B_1 & B_2 \\ 0 & A_L & B_L & 0 \\ \hline C_F & -D_{12} F & D_{11} & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right].$$

上式展开后得到

$$N_{12}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_2 \\ \hline C_F & D_{12} \end{array} \right], \quad N_{21}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_2 & D_{21} \end{array} \right],$$

$$N_{22}(s) = 0.$$

所以闭环传递函数可以写成

$$T_{zw,i}(s) = N_{11}(s) + N_{12}(s) Q_i(s) N_{21}(s),$$

即 $H_{zw,i}(s)$ 是 $Q_i(s)$ 的仿射函数. 将 $H_{zw,i}$ 展开并代入引理3所定义的传递矩阵 U, V, G_c, G_f , 可以得到

$$\begin{aligned} T_{zw,i} &= G_c B_1 - U F_2 G_f + U Q_i V, \\ \|T_{zw,i}\|_2^2 &= \langle G_c B_1 - U(F_2 G_f - Q_i V), \\ &G_c B_1 - U(F_2 G_f - Q_i V) \rangle = \\ \|G_c B_1\|_2^2 &- 2\Re[\langle G_c B_1, U(F_2 G_f - Q_i V) \rangle] + \\ &\langle U(F_2 G_f - Q_i V), U(F_2 G_f - Q_i V) \rangle = \end{aligned}$$

$$\|G_c B_1\|_2^2 - 2\Re[\langle U^* G_c B_1, F_2 G_f - Q_i V \rangle] + \langle U^* U(F_2 G_f - Q_i V), (F_2 G_f - Q_i V) \rangle.$$

由引理3可知 $U^* G_c$ 为完全不稳定传递矩阵, 而

$$(F_2 G_f - Q_i V) = \left[\begin{array}{ccc|c} A_L & 0 & 0 & B_L \\ 0 & A_{Q_i} & B_{Q_i} C_2 & B_{Q_i} D_{21} \\ 0 & 0 & A_L & B_L \\ \hline F_2 - C_{Q_i} - D_{Q_i} C_2 & -D_{Q_i} & D_{21} & \end{array} \right],$$

由于 A_L 为稳定的, 且每一个固定的 i 对应 A_{Q_i} 也均为稳定的, 因此, 该传递函数矩阵为稳定的. 稳定传递矩阵与不稳定传递矩阵正交, 内积为零

$$\langle U^* G_c B_1, F_2 G_f - Q_i V \rangle = 0,$$

则有

$$\begin{aligned} \|T_{zw,i}\|_2^2 &= \\ \|G_c B_1\|_2^2 &+ \langle (F_2 G_f - Q_i V), (F_2 G_f - Q_i V) \rangle = \\ \|G_c B_1\|_2^2 &+ \|F_2 G_f\|_2^2 - \\ 2\Re[\langle F_2 G_f, Q_i V \rangle] &+ \langle Q_i V, Q_i V \rangle = \\ \|G_c B_1\|_2^2 &+ \|F_2 G_f\|_2^2 - \\ 2\Re[\langle F_2 G_f V^*, Q_i \rangle] &+ \langle Q_i V, Q_i V \rangle. \end{aligned}$$

根据对偶性质有

$$\begin{aligned} V^* V &= I, \quad \langle F_2 G_f V^*, Q_i \rangle = 0, \\ \|T_{zw,i}\|_2^2 &= \|G_c B_1\|_2^2 + \|F_2 G_f\|_2^2 + \|Q_i\|_2^2 = \\ \gamma_{\text{opt}}^2 &+ \|Q_i\|_2^2, \end{aligned}$$

则

$$\|Q_i\|_2^2 = \|T_{zw,i}\|_2^2 - \gamma_{\text{opt}}^2. \quad (24)$$

将 $\|Q_i\|_2^2 < \gamma_i^2 - \gamma_{\text{opt}}^2$ 代入到式(24), 得

$$\begin{aligned} \|T_{zw,i}\|_2^2 - \gamma_{\text{opt}}^2 &< \gamma_i^2 - \gamma_{\text{opt}}^2, \\ \|T_{zw,i}\|_2^2 &< \gamma_i^2. \end{aligned} \quad (25)$$

因此, Q_i 的实现能够保证在任意切换情况下每一个固定的 i 对应的子系统都满足相应的H₂性能 γ_i , 当 Q 的H₂性能满足 $\gamma_Q = \max(\gamma_{Q_i})$ 时, 闭环系统也满足H₂性能 $\|T_{zw}\|_2^2 < \gamma^2$, 其中 $\gamma = \max(\gamma_i)$.

4 数值算例

根据文献[11], 本文考虑一个数值算例. 系统模型的传递函数可以定义为

$$G(s) = \frac{-1000}{s(s + 0.875)(s + 50)}.$$

如图4所示的闭环系统中, 从外部信号 (r, d) 到系统内部信号 (y, u) 的传递函数矩阵为

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + GK)^{-1} KG & (I + GK)^{-1} G \\ K(I + GK)^{-1} & -(I + GK)^{-1} KG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix},$$

其中: d 是输入扰动, w 是测量噪声.

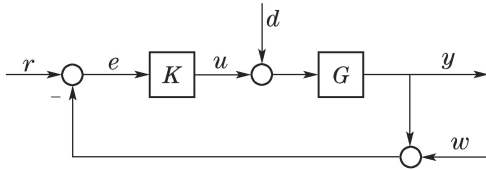


图4 单位反馈回路

Fig. 4 Unity-feedback loop

本例子中,一般化对象可以表示为

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & G & G \\ 0 & 0 & I \\ \hline I & -G & -G \end{array} \right], \quad (26)$$

如果对象的传递函数为 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, 其状态空间可表示成

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} A & [B \ 0] & B \\ \hline C & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \hline -C & [I \ 0] & 0 \end{array} \right]. \quad (27)$$

一般情况下,设计一个控制器,同时具备快速的响应速度和良好的抗噪声性能是非常困难的,本文分别设计两个不同的控制器,控制器 K_1 具有较强的抗噪声能力,但是响应速度慢. 控制器 K_2 具有较快的响应速度,抗噪声能力较弱. 为了便于设计切换控制器,在对象 P 加入权重函数 ρ , 广义对象可写成

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} A & [B \ 0] & B \\ \hline C & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \hline -\rho C & [I \ 0] & 0 \end{array} \right]. \quad (28)$$

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{Q_2} & \tilde{B}_{Q_2} \\ \hline \tilde{C}_{Q_2} & \tilde{D}_{Q_2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} -52.4 & -38.12 & -2.78e3 & -5.85e3 & -3.19e6 & -2.87e8 & -32.17 \\ 3.25 & 1.43 & 3.26e3 & -39.23 & -1.25e5 & -1.14e7 & 41.71 \\ 0 & 0.012 & 55.01 & 28.57 & 1.21e4 & 1.08e6 & 0.57 \\ 0 & 0 & -261.89 & -391.85 & -1.82e5 & -1.62e7 & -1.63 \\ 0 & 0 & 15.09 & 1.116 & 0.75 & -910.17 & 0.09 \\ 0 & 0 & 1.22 & 0.08 & 0.056 & -73.76 & 0.007 \\ \hline 2.02 & 39.35 & 3.15e4 & 2.03e3 & -2.19e4 & -1.86e6 & 0 \end{array} \right].$$

实际上,令 $Q_1 = 0$, 则有 $K = K_1$. 然而 Q_1 的最小实现为 $\{\tilde{A}_{Q_2}, 0, \tilde{C}_{Q_2}\}$, 同样可得到 Q_2 的最小实现为 $\{\tilde{A}_{Q_2}, \tilde{B}_{Q_2}, \tilde{C}_{Q_2}\}$. 由于两个实现共享相同的稳定矩阵 $\tilde{A}_{Q_2}$, 这就是 Q_1 和 Q_2 实现所具有的特性. 所设计的控制器参数化实现如式(23)所示, 这可以保证切换闭环系统 H_2 性能 $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2) = 330.27$. 如图5所示, 控制器参数化的状态空间实现 Q_1, Q_2 对应的闭环系统响应, 切换多控制器的参考输入为方波 r , 外部测

量噪声 $w(t)$ 在 $t \in [18, 41]$ 加入到系统中. 顶图表示控制器的输出 u , 底图是系统输出 y . 对于切换控制器在区间 $t \in [25, 43]$ 时切换到 Q_1 , 其余时间切换到 Q_2 . 图5(c)表示的是本文设计的切换控制器的闭环响应. 切换控制器首先切换到 Q_2 上, 当测量噪声 $t = 18$ 加入到系统时, 系统并没有很明显的抗噪声能力. 当 $t = 25$ 切换到 Q_1 , 系统具有显著的噪声抑制能力, 直到时间 $t = 43$ 再切换到 Q_2 . 可以看到 Q_1 的抗噪声能力比 Q_2

$$K_1 = \frac{-192.7s^2 - 9937s - 1.5e4}{s^3 + 171.7s^2 + 9563s + 1.89e5},$$

$$K_2 = \frac{-8014s^2 - 4.15e05s - 7.5e05}{s^3 + 410s^2 + 3.36e04s + 9.43e05},$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.5752 & 3.7462 & 7.5644 \\ 3.7462 & 24.420 & 50.425 \\ 7.5644 & 50.425 & 162.27 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.6226 & 0.059 & -0.0048 \\ 0.0590 & 0.3755 & 0.0602 \\ -0.0048 & 0.0602 & 0.0215 \end{bmatrix},$$

可以得到

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc} -87.688 & -245.223 & -465.428 & -0.299 & 8 \\ 8 & 0 & -235.211 & 3.763 & 0 \\ 0 & 1 & -84.002 & 1.344 & 0 \\ \hline -4.601 & -29.969 & -60.515 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -62.50 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

设计一组控制器集合 $K = \{K_1, K_2\}$, 则有控制器化 $Q_i = F_1(\hat{J}, K_i)$, 其中

$$\hat{J} = \left[\begin{array}{c|c} A & -L \ B_2 \\ \hline -F & 0 \ I \\ \hline C_2 & I \ 0 \end{array} \right],$$

相应的传递矩阵 Q_1, Q_2 可由式分别计算得出, 当选择 K_1 为最优解时, 则有 $Q_1 = 0, Q_2$ 的状态空间矩阵为

量噪声 $w(t)$ 在 $t \in [18, 41]$ 加入到系统中. 顶图表示控制器的输出 u , 底图是系统输出 y . 对于切换控制器在区间 $t \in [25, 43]$ 时切换到 Q_1 , 其余时间切换到 Q_2 . 图5(c)表示的是本文设计的切换控制器的闭环响应. 切换控制器首先切换到 Q_2 上, 当测量噪声 $t = 18$ 加入到系统时, 系统并没有很明显的抗噪声能力. 当 $t = 25$ 切换到 Q_1 , 系统具有显著的噪声抑制能力, 直到时间 $t = 43$ 再切换到 Q_2 . 可以看到 Q_1 的抗噪声能力比 Q_2

强, 而 Q_2 的响应速度要比 Q_1 的快. 因此本文设计的切换控制器既满足较快的响应速度, 又具有较强的抗噪声能力, 说明该方法的有效性.

文献[11]主要是提出一种控制器设计新方法, 在切换信号任意下, 能够保证控制器在切换时闭环系统

的稳定性. 图6为文献[11]的仿真结果图, 对比图5(c)和图6可以看出, 在外部噪声 $w(t)$ 的影响下, 本文提出的方法对于系统输出响应噪声抑制能力要比文献[11]提出的要好, 同时控制器输出信号的扰动幅度比文献[11]的要低. 这验证了本文所提出方法的有效性.

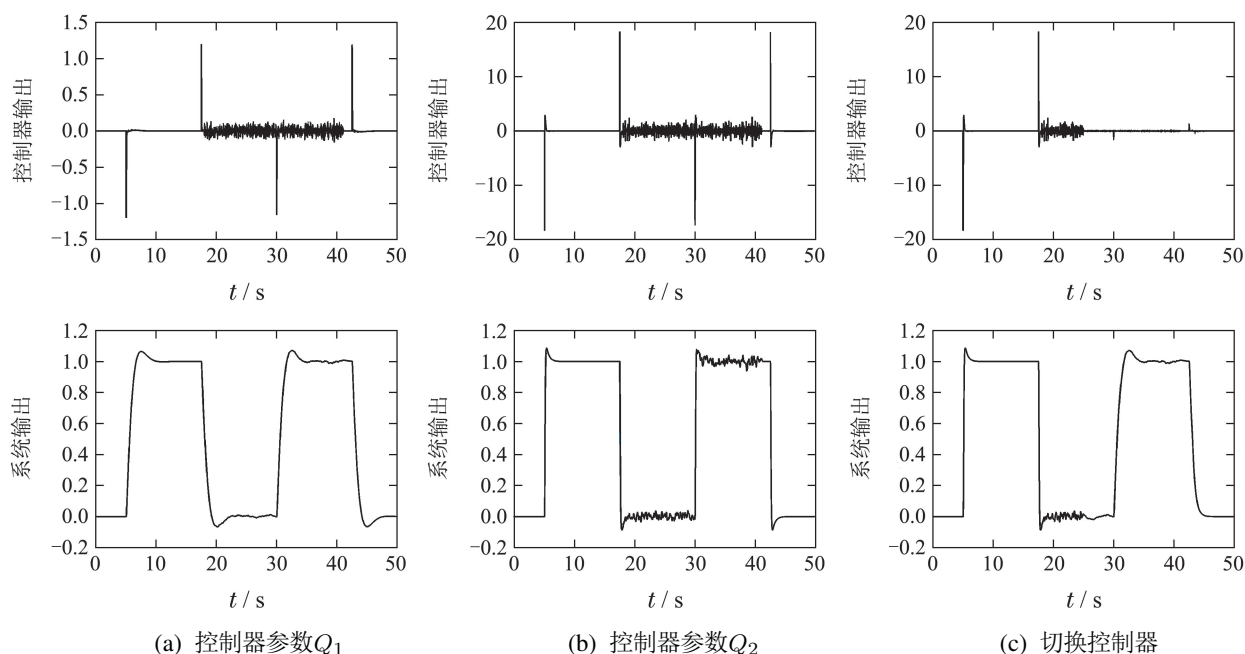


图5 控制器参数 Q_1 , Q_2 和切换控制器分别对应的系统动态响应

Fig. 5 The corresponding system dynamic response of controller parameter Q_1 , Q_2 and switch controller

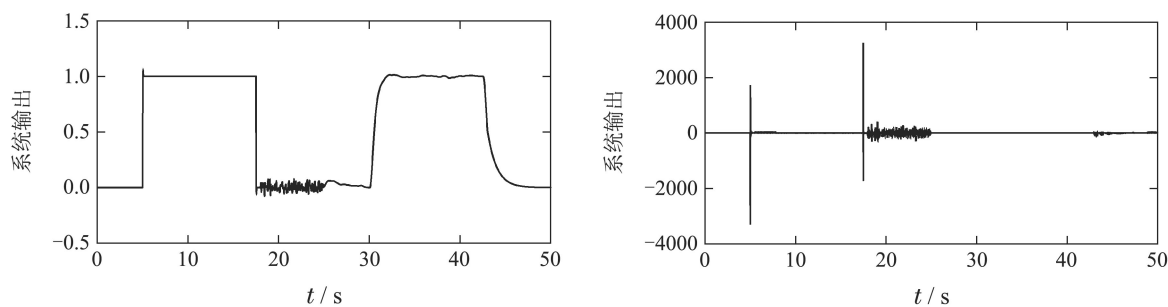


图6 文献[11]稳定控制器的切换策略

Fig. 6 The switching strategy of the stability controller in reference [11]

5 结论

对于复杂的LTI控制系统, 使用单一的LTI控制器不能有效的处理对象的动态变化或者满足系统更多的性能要求, 则需要设计一个切换控制器, 同时满足复杂系统的多种性能需求. 基于此本文提出了一种针对LTI对象的满足 H_2 性能的切换控制器设计方法. 在给定一个LTI对象和一组预先设计且具有 H_2 性能的LTI控制器, 若该组LTI控制器不能保证在任意切换时闭环系统的稳定性及性能指标, 则需寻找一组合适的控制器参数 Q_i 的状态空间实现满足切换要求.

定理2给出了一种切换控制器自由参数 Q_i 的状态空间实现方法, 不仅可以保证在任意切换的情况下整

个闭环系统 H_2 性能 γ , 而且可以保证切换子系统满足相应的 H_2 控制性能. 本文提出方法的优点在于, 既可使用原先给定的LTI控制器, 又可保证闭环系统在任意切换时的稳定性和系统性能, 这种方法可以有效地扩展到其它控制性能的切换控制器设计问题.

参考文献:

- [1] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] FALCHETTO V B, SOUZA M, FIORAVANTI A R, et al. H_2 and H_∞ analysis for discrete-time constrained switched linear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50(1): 2076 – 2081.
- [3] ZHAI G, HU B, YASUDA K, et al. Stability analysis of switched sys-

- tems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach. *International Journal of Systems Science*, 2001, 32(8): 1055 – 1061
- [4] RIEDINGER P. A switched LQ regulator design in continuous time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(5): 1322 – 1328.
- [5] WANG Jiapeng, HU Yueming, LUO Jiaxiang. Adaptive neural dynamic surface tracking control for a class of switched nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(10): 1396 – 1402.
(王加朋, 胡跃明, 罗家祥. 一类非线性切换系统的自适应神经网络动态面控制. 控制理论与应用, 2017, 34(10): 1396 – 1402.)
- [6] SU Q, WANG P, LI J, et al. Stabilization of discrete time switched systems with state constraints based on mode dependent average dwell time. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(1): 67 – 73.
- [7] LI X, YANG H, HUANG H, et al. A switching controller for high speed cell transportation by using a robot-aided optical tweezers system. *Automatica*, 2018, 89: 308 – 315.
- [8] HE Yong, ZHANG Weiguo, WANG Minwen, et al. Switching linear-parameter-varying controller for morphing aircraft based on multi-objective. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(11): 1518 – 1525.
(何庸, 章卫国, 王敏文, 等. 基于多目标控制的变体飞行器切换线性变参数控制器. 控制理论与应用, 2015, 32(11): 1518 – 1525.)
- [9] PEQUITO S, PAPPAS G J. Structural minimum controllability problem for switched linear continuous-time systems. *Automatica*, 2017, 78: 216 – 222.
- [10] LIN H, ANTSAKLIS P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic control*, 2009, 54(2): 308 – 322.
- [11] HESPANHA J O P, MORSE A S. Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, 2002, 38(11): 1905 – 1917.
- [12] KUCERA V. *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*. NJ, USA: Prentice-Hall, Inc, 1991.
- [13] YOULA D, JABR H, BONGIORNO J. Modern wiener-hopf design of optimal controllers—part II: the multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(3): 319 – 338.
- [14] LIU Zhikang, YAO Yu. *Linear Robust Control*. Beijing: Science Press, 2012.
(刘志康, 姚郁. 线性鲁棒控制. 北京: 科学出版社, 2012.)
- [15] XIE W. H_∞ performance realisation and switching controller design for linear time-invariant plant. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(4): 424 – 430.
- [16] ZHOU K, DOYLE J C, GLOVER K. *Robust and Optimal Control*. New Jersey: Prentice hall, 1996.
- [17] BLANCHINI F, MIANI S, MESQUINE F. A separation principle for linear switching systems and parametrization of all stabilizing controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 279 – 292.
- [18] SATO T, LIU K Z. LMI solution to general H_2 suboptimal control problems. *Systems & Control Letters*, 1999, 36(4): 295 – 305.
- [19] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P P, et al. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831 – 847.

作者简介:

吴伟林 博士研究生, 主要从事切换系统及鲁棒控制的研究,

E-mail: wuweilin.520@163.com;

谢巍 教授, 主要从事线性参数变化系统、鲁棒控制、机器视觉等的研究, E-mail: weixie@scut.edu.cn;

何伟 博士研究生, 主要从事线性参数变化系统等等的研究, E-mail: weihescut@126.com;

张浪文 讲师, 从事分布式预测控制理论与应用的研究, E-mail: aulwzhang@scut.edu.cn.