第 36 卷第 7 期
2019 年 7 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 36 No. 7
Jul. 2019

带厚尾噪声的鲁棒Student's t容积滤波器

程　然†, 缪礼锋, 王婷婷

(中国航空工业集团公司雷华电子技术研究所, 江苏 无锡 214063)

摘要: 为了解决带厚尾过程和量测噪声的非线性状态估计问题, 本文提出了一种新的鲁棒非线性滤波器. 首先, 对带厚尾过程和量测噪声的非线性系统进行了数学建模, 并推导了基于Student's t近似的鲁棒非线性滤波器(RSTNF)的一般结构. 其次, 针对RSTNF中涉及到的含有关于Student's t分布的多维非线性函数积分的求解问题, 提出了基于Student's t分布的球径容积准则(STSRCR), 并在此基础上设计了一种新的鲁棒Student's t容积滤波器(RSTCF). 最后, 利用目标跟踪仿真验证了本文提出的带厚尾噪声的RSTCF的有效性以及与现有方法相比的优越性.

关键词: 非线性状态估计; 厚尾噪声; Student's t分布; 三次幂球径容积准则; 鲁棒Student's t容积滤波器

引用格式: 程然, 缪礼锋, 王婷婷. 带厚尾噪声的鲁棒Student's t容积滤波器. 控制理论与应用, 2019, 36(7): 1174 – 1181

DOI: 10.7641/CTA.2019.70830

Robust Student's t based cubature filter with heavy tailed noise

CHENG Ran†, MIAO Li-feng, WANG Ting-ting

(AVIC LEIHUA Electronic Technology Institute, Wuxi Jiangsu 214063, China)

Abstract: In this paper, a new robust nonlinear filter is proposed to solve the problem of nonlinear state estimation with heavy tailed process and measurement noises. Firstly, the nonlinear state space model with heavy tailed process and measurement noises is constructed. On this basis, a robust Student's t based nonlinear filter (RSTNF) can be derived. Secondly, a new third-degree Student's t spherical radial cubature rule (STSRCR) is proposed to calculate the Student's t weighted integral in RSTNF, from which a new robust Student's t based cubature filter (RSTCF) can be obtained. Finally, the efficiency and superiority of the proposed RSTCF with heavy process and measurement noises, as compared with existing methods, are shown in the simulation of target tracking.

Key words: nonlinear state estimation; heavy tailed noises; Student's t distribution; third-degree spherical radial cubature rule; robust Student's t based cubature filter

Citation: CHENG Ran, MIAO Lifeng, WANG Tingting. Robust Student's t based cubature filter with heavy tailed noise. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(7): 1174 – 1181

1　引言

非线性滤波已被广泛地应用于目标跟踪、导航定位、信号处理和自动控制中. 非线性滤波问题的关键在于求解系统状态的后验概率密度分布 (probability density function, PDF). 贝叶斯估计理论为非线性滤波问题提供了一个最优解, 然而贝叶斯估计常涉及到复杂多维非线性函数积分的计算, 一般无法解析求解, 因此只能采取近似的手段来获得次优的非线性滤波器[1–3]. 高斯近似是一种常用的近似方法, 目前各国学者已经提出了许多种高斯近似滤波器(Gaussian filter, GF)[1–7]. GF假设噪声的统计特性服从高斯分布, 然而在一些实际工程应用中, 噪声的统计特性并不一定服从高斯分布, 而是可能具有厚尾分布特性. 例如在目标跟踪领域, 当目标在杂波环境下做大幅度机动时, 目标所表现出的模型不确定性会诱导产生厚尾的过程噪声[8]. 而在一些具有高采样频率、可靠性较差的传感器应用中, 传感器所产生的量测野值同样会诱导产生厚尾的量测噪声[9]. 厚尾噪声与高斯噪声相比, 由于存在野值干扰, 导致噪声取值在离均值较远的区域可能性增大, 从而形成厚尾形状[10]. 图1显示了零

收稿日期: 2017−11−14; 录用日期: 2019−04−28.

†通信作者. E-mail: 842773450@qq.com; Tel.: +86 13914268320.

本文责任编委: 潘泉.

装备预研领域基金项目(6140413010302), 航空科学基金项目(2017ZC07009)资助.

Supported by the Equipment Advanced Research Foundation of China (6140413010302) and the Aviation Science Foundation of China (2017ZC07009).

均值方差为1的高斯噪声与厚尾噪声的概率分布图, 其中, 厚尾噪声是在方差为1的高斯噪声的基础上, 以0.2的概率加入了方差为3的高斯噪声, 从而模拟野值干扰. 从图1可以看出, 此时高斯分布已无法准确匹配野值干扰下的厚尾噪声分布, 噪声统计模型与实际获得的量测值不匹配, 因此极易造成GF滤波精度下降, 甚至发散. 而研究表明, Student's t分布能更好地匹配厚尾噪声分布并能够对其进行准确建模[11].

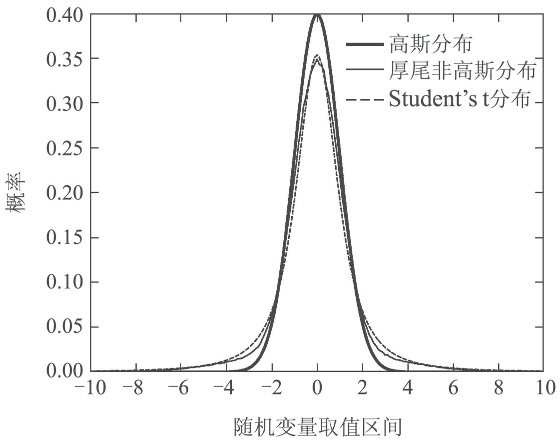

图 1　高斯分布、Student's t分布、野值干扰导致的非高斯分布示意图

Fig. 1　Diagrams of Gaussian distribution, Student's t distribution and heavy tailed distribution induced by outlier interference

为了解决带厚尾过程和量测噪声的线性滤波问题, Roth等人将过程噪声和量测噪声的统计特性均近似为Student's t分布, 并最终推导得出了一种新的鲁棒Student's t滤波器[12]. 然而该滤波器仅适用于线性系统的情况, 无法推广到非线性系统. 为了解决带厚尾量测噪声的非线性滤波问题, Xu等人提出了一种新的鲁棒粒子滤波算法[13]. 然而该滤波器需要对每个粒子进行变分贝叶斯更新, 承受着巨大的计算负担和维数灾难问题. 为了解决带厚尾过程和量测噪声的非线性滤波问题, Huang等人提出了一种基于无迹变换的鲁棒非线性Student's t滤波算法[14]. 然而当该算法应用于高维非线性系统时, 其确定性采样点的权值极易出现负值情况, 很容易导致其矩积分中引入很大的截断误差, 最终导致滤波精度下降.

为了解决非线性系统条件下带厚尾过程和量测噪声的状态估计问题, 本文提出了一种带厚尾噪声的鲁棒Student's t容积非线性滤波算法, 该算法采用三次幂球径容积准则来计算含有Student's t分布的多维非线性函数积分, 具有较高的数值稳定性及近似精度, 保证了滤波器在高维厚尾非线性系统条件下的滤波稳定性及估计精度. 最后, 目标跟踪仿真验证了本文所提出算法的有效性以及与现有方法相比的优越性.

2　问题陈述

2.1　带厚尾噪声的非线性系统模型

考虑如下状态空间形式的离散非线性系统[10]:

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{w}_{k-1}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k, \tag{2}$$

其中: $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$和$\boldsymbol{z}_k \in \mathbb{R}^m$分别表示$k$时刻的状态向量和量测向量, n, m 分别表示状态维数和量测维数, $\boldsymbol{f}_{k-1}(\cdot)$和$\boldsymbol{h}_k(\cdot)$分别表示状态转移函数和量测函数, $\boldsymbol{w}_k \in \mathbb{R}^n$和$\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^m$分别表示过程噪声和量测噪声. 由于系统模型可能存在一定程度的不确定性, 而且不可靠传感器也可能会产生一些量测野值, 因此将过程噪声和量测噪声均假设为厚尾噪声, 分别建模成如下平稳的Student's t分布[14]:

$$p(\boldsymbol{w}_k) = \mathrm{St}(\boldsymbol{w}_k; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_k, v_1), \tag{3}$$

$$p(\boldsymbol{v}_k) = \mathrm{St}(\boldsymbol{v}_k; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}_k, v_2), \tag{4}$$

其中: $\mathrm{St}(\cdot; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, v)$表示均值为$\boldsymbol{\mu}$、尺度矩阵为$\boldsymbol{\Sigma}$、自由度参数为$v$的平稳Student's t分布, $\boldsymbol{Q}_k$和v_1分别表示过程噪声的尺度矩阵和自由度参数, $\boldsymbol{R}_k$和v_2分别表示量测噪声的尺度矩阵和自由度参数. 假设初始状态$\boldsymbol{x}_0$服从均值为$\hat{\boldsymbol{x}}_{0|0}$, 尺度矩阵为$\boldsymbol{P}_{0|0}$, 自由度参数为$v_3$的Student's t分布, 且$\boldsymbol{x}_0$与$\boldsymbol{w}_k$和$\boldsymbol{v}_k$互不相关, 即

$$p(\boldsymbol{x}_0) = \mathrm{St}(\boldsymbol{x}_0; \hat{\boldsymbol{x}}_{0|0}, \boldsymbol{P}_{0|0}, v_3). \tag{5}$$

鲁棒Student's t非线性滤波器(robust Student's t based nonlinear filter, RSTNF)是建立在状态向量后验PDF服从Student's t分布的前提下进行的, 即[14]

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k) = \mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k; \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}, \boldsymbol{P}_{k|k}, v_3), \tag{6}$$

其中: $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k)$表示状态向量的后验PDF, $\boldsymbol{Z}_k$表示由1时刻到k时刻所有的量测向量组成的集合, $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$表示$k$时刻的状态估计向量, $\boldsymbol{P}_{k|k}$表示k时刻的状态估计尺度矩阵, 具体表示如下:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k] = \int \boldsymbol{x}_k p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{k|k} = {}& \frac{v_3-2}{v_3}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Z}_k] = \\ & \frac{v_3-2}{v_3}\int \tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}^{\mathrm{T}} p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k,\end{aligned} \tag{8}$$

其中$\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$表示状态估计误差向量.

注 1　式(8)是根据Student's t分布中尺度矩阵与协方差矩阵间的数学关系导出的[12], 即对任意的随机向量$\boldsymbol{x}$, 若存在$p(\boldsymbol{x}) = \mathrm{St}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, v)$, 则其尺度矩阵与协方差矩阵间的数学关系满足$\boldsymbol{\Sigma} = \dfrac{v-2}{v}\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}]$.

2.2　鲁棒Student's t非线性滤波器

假设 1　假设状态向量与量测向量的联合先验PDF服从Student's t分布, 即[14]

$$p(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})=\\ \mathrm{St}(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\ \boldsymbol{z}_k\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\ \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{k|k-1} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{xz}}_{k|k-1}\\ \boldsymbol{P}^{zx}_{k|k-1} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{zz}}_{k|k-1}\end{bmatrix},v_3),\quad(9)$$

其中: $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$和$\boldsymbol{P}_{k|k-1}$分别表示状态向量的先验均值和尺度矩阵, $\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}$和$\boldsymbol{P}^{\mathrm{zz}}_{k|k-1}$分别表示量测向量的先验均值和尺度矩阵, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{xz}}_{k|k-1}$和$\boldsymbol{P}^{zx}_{k|k-1}$表示状态向量与量测向量的互协先验尺度矩阵, 具体表达形式如下:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1}]=\int\boldsymbol{x}_kp(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k,\quad(10)$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}=\mathrm{E}[\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1}]=\int\boldsymbol{z}_kp(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{z}_k,\quad(11)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}=\frac{v_3-2}{v_3}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}|\boldsymbol{Z}_{k-1}]=\\ \frac{v_3-2}{v_3}\int\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k,\quad(12)$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{zz}}_{k|k-1}=\frac{v_3-2}{v_3}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}|\boldsymbol{Z}_{k-1}]=\\ \frac{v_3-2}{v_3}\int\tilde{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{z}_k,\quad(13)$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{xz}}_{k|k-1}=\frac{v_3-2}{v_3}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}|\boldsymbol{Z}_{k-1}]=\\ \frac{v_3-2}{v_3}\iint\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}p(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k\mathrm{d}\boldsymbol{z}_k,\quad(14)$$

其中: $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$表示状态预测误差向量, $\tilde{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}=\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}$表示新息向量, 式(12)–(14)由尺度矩阵与协方差矩阵间的数学关系导出[12].

注 2 在一些非线性程度相对温和的工程应用背景中(如目标跟踪), 本文认为在过程噪声和量测噪声均具有厚尾特性的条件下, 将状态向量与量测向量的联合先验PDF近似为Student's t分布是合理的.

1) 根据状态向量的一阶马尔可夫特性, 状态向量的先验PDF可以表示为[4]

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})=\int p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})p(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{Z}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1},\quad(15)$$

其中$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$表示状态转移概率密度函数. 结合式(1)(3)及式(6), 式(15)可以重新整理为

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})=\\ \int\mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k;\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1}),\boldsymbol{Q}_{k-1},v_1)\times\\ \mathrm{St}(\boldsymbol{x}_{k-1};\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1},\boldsymbol{P}_{k-1|k-1},v_3)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}.\quad(16)$$

根据假设1, 状态向量的先验PDF已被假设为服从Student's t分布, 即

$$p(\boldsymbol{x}_k\,|\boldsymbol{Z}_{k-1})=\mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},\boldsymbol{P}_{k|k-1},v_3).\quad(17)$$

则将式(16)分别代入到式(10)和式(12), 得[14]

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\int\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\times\mathrm{St}(\boldsymbol{x}_{k-1};\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1},\\ \boldsymbol{P}_{k-1|k-1},v_3)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1},\quad(18)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}=\frac{v_3-2}{v_3}\int\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\times\\ \mathrm{St}(\boldsymbol{x}_{k-1};\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1},\boldsymbol{P}_{k-1|k-1},v_3)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}-\\ \frac{v_3-2}{v_3}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}+\frac{v_1(v_3-2)}{(v_1-2)v_3}\boldsymbol{Q}_{k-1}.\quad(19)$$

2) 在已经获得状态向量先验PDF的基础上, 量测向量的先验PDF可以表示为

$$p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})=\int p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k\,|\boldsymbol{Z}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k,\quad(20)$$

其中$p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_k)$表示似然函数. 结合式(2)(4)及式(17), 式(20)可以重新整理为[14]

$$p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})=\int\mathrm{St}(\boldsymbol{z}_k;\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k),\boldsymbol{R}_k,v_2)\times\\ \mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},\boldsymbol{P}_{k|k-1},v_3)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k.\quad(21)$$

根据假设1, 量测向量的先验PDF同样也被假设为服从Student's t分布, 即

$$p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})=\mathrm{St}(\boldsymbol{z}_k;\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1},\boldsymbol{P}^{\mathrm{zz}}_{k|k-1},v_3),\quad(22)$$

则将式(21)分别代入到式(11)(13), 得

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}=\int\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)\mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},\boldsymbol{P}_{k|k-1},v_3)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k,\quad(23)$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{zz}}_{k|k-1}=\frac{v_3-2}{v_3}\int\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}_k(\boldsymbol{x}_k)\times\\ \mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},\boldsymbol{P}_{k|k-1},v_3)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k-\\ \frac{v_3-2}{v_3}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}+\frac{v_2(v_3-2)}{(v_2-2)v_3}\boldsymbol{R}_k.\quad(24)$$

结合式(9)(14), 得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{xz}}_{k|k-1}=\frac{v_3-2}{v_3}\int\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}_k(\boldsymbol{x}_k)\mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},\\ \boldsymbol{P}_{k|k-1},v_3)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k-\frac{v_3-2}{v_3}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}.\quad(25)$$

3) 根据贝叶斯估计准则, 结合式(9)(22), 可以计算得到状态向量的后验PDF, 即[12]

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k)=\mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}'_{k|k},\boldsymbol{P}'_{k|k},v'_3),\quad(26)$$

其中$\hat{\boldsymbol{x}}'_{k|k},\boldsymbol{P}'_{k|k},v'_3$分别表示为

$$\hat{\boldsymbol{x}}'_{k|k}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}+\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}),\quad(27)$$

$$\boldsymbol{P}'_{k|k}=\frac{v_3+\Delta_k^2}{v_3+m}(\boldsymbol{P}_{k|k-1}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}^{\mathrm{zz}}_{k|k-1}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}_k),\quad(28)$$

$$v'_3=v_3+m,\quad(29)$$

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}^{\mathrm{xz}}_{k|k-1}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{zz}}_{k|k-1})^{-1},\quad(30)$$

$$\Delta_k=\sqrt{(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{zz}}_{k|k-1})^{-1}(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})},\quad(31)$$

其中Δ_k表示k时刻真实量测向量与量测预测向量间的归一化统计距离, 它表征了k时刻真实的量测与系统状态预测间的匹配关系, Δ_k越小表明该量测与系统

状态预测的匹配程度越高. 由方程(29)可以看出, $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k)$中的自由度参数$v_3'$将会随着时间的增长而逐渐趋于无穷, 也就是说$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k)$的厚尾特性将逐渐丧失, 最终退化为高斯分布, 导致模型精度下降. 为了保留$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k)$的厚尾特性, 可以采用二阶距匹配的方法, 即只匹配$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k)$中状态向量的后验均值及协方差矩阵, 将状态向量的后验PDF近似为自由度参数固定的Student's t分布, 即[14]

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k) \approx \mathrm{St}(\boldsymbol{x}_k; \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}, \boldsymbol{P}_{k|k}, v_3), \tag{32}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}'_{k|k}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = \frac{v_3'(v_3-2)}{v_3(v_3'-2)}\boldsymbol{P}'_{k|k}. \tag{34}$$

式(17)–(34)构成了RSTNF的完整滤波框架. 由式(18)–(19)(23)–(25)可以看出, RSTNF中涉及到多个含有Student's t分布的多维非线性函数积分的运算. 对于一般的非线性系统而言, 这类多维非线性函数积分一般无法解析求解. 因此, RSTNF的关键就在于, 如何在保证精度的前提下, 设计某种近似手段来计算含有Student's t分布的多维非线性函数积分, 这也是本篇文章的核心工作.

3 鲁棒Student's t容积滤波器

3.1 球径变换

式(18)–(19)(23)–(25)中, 含Student's t分布的多维非线性函数积分可以统一描述成如下数学形式:

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g}) = \int \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\mathrm{St}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, v)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{35}$$

式中Student's t分布的PDF表示为

$$\mathrm{St}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, v) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}((v+n)/2)}{\boldsymbol{\Gamma}(v/2)}\frac{1}{\sqrt{|v\pi\boldsymbol{\Sigma}|}} \times [1+\frac{1}{v}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})]^{-(v+n)/2}, \tag{36}$$

式中$\boldsymbol{\Gamma}(\cdot)$表示Gamma函数. 令

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{v\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{y}, \tag{37}$$

其中$\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}}$满足$\boldsymbol{\Sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}}\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathrm{T}}$. 将式(36)–(37)代入式(35), 得

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g}) = \int \boldsymbol{I}(\boldsymbol{y})(1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{-(v+n)/2}\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{38}$$

其中$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{y})$表示为

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}((v+n)/2)}{\boldsymbol{\Gamma}(v/2)\pi^{n/2}}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}+\sqrt{v\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{y}). \tag{39}$$

取$\boldsymbol{y} = r\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} = 1, r \in [0,\infty))$, 将式(38)所描述的积分形式转换到球径坐标系下表示, 即

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g}) = \int_0^{\infty}\int_{\boldsymbol{U}_n}\boldsymbol{I}(r\boldsymbol{s})r^{n-1}(1+r^2)^{-(v+n)/2}\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{s})\mathrm{d}r, \tag{40}$$

其中: $\boldsymbol{U}_n$表示半径为1的n维单位球面, $\sigma(\cdot)$表示球面测度. 进一步化简, 式(40)所描述的积分可以分解为球面积分(spherical integral, SI)

$$\boldsymbol{S}(r) = \int_{\boldsymbol{U}_n}\boldsymbol{I}(r\boldsymbol{s})\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{s}), \tag{41}$$

以及径向积分(radial integral, RI)的形式

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g}) = \int_0^{\infty}\boldsymbol{S}(r)r^{n-1}(1+r^2)^{-(v+n)/2}\mathrm{d}r. \tag{42}$$

3.2 球径容积准则

由式(41)可以看出, SI的表达形式与基于高斯分布的球面积分完全相同. 因此, 根据球面积分准则, 式(41)所描述的球面积分可通过下式近似计算得到:

$$\boldsymbol{S}(r) = \frac{A_n}{2n}\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{I}(-r\boldsymbol{e}_j)+\boldsymbol{I}(r\boldsymbol{e}_j)], \tag{43}$$

其中$A_n/2n$表示n维单位球面与球径坐标系各坐标轴相交处的交点所对应的权值大小, 具体表示为

$$\frac{A_n}{2n} = \frac{1}{2n}\frac{2\sqrt{\pi^n}}{\boldsymbol{\Gamma}(n/2)}, \tag{44}$$

其中$\boldsymbol{e}_j$表示第j个元素为1的单位列向量. 式(42)所描述的RI可通过下式近似计算得到

$$\int_0^{\infty}\boldsymbol{S}(r)r^{n-1}(1+r^2)^{-(v+n)/2}\mathrm{d}r = \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{r}}}\omega_i\boldsymbol{S}(r_i), \tag{45}$$

其中: r_i表示积分点, ω_i表示积分点对应的权值. 借助三次幂球径容积准则(spherical radial cubature rule, SRCR)的数值计算方法来计算式(45)右边的求和表达式. 因此, 仅需对$\boldsymbol{S}(r) = 1$及$\boldsymbol{S}(r) = r^2$进行匹配即可, 式(45)可以重新表示为[14]

$$\int_0^{\infty}\boldsymbol{S}(r)r^{n-1}(1+r^2)^{-(v+n)/2}\mathrm{d}r = \omega_1\boldsymbol{S}(r_1), \tag{46}$$

其中r_1和ω_1由下面的两个距匹配等式确定:

$$\omega_1 r_1^0 = \int_0^{\infty} r^0 r^{n-1}(1+r^2)^{-(v+n)/2}\mathrm{d}r, \tag{47}$$

$$\omega_1 r_1^2 = \int_0^{\infty} r^2 r^{n-1}(1+r^2)^{-(v+n)/2}\mathrm{d}r. \tag{48}$$

式(47)–(48)中的积分可以统一描述为

$$\boldsymbol{I}(r) = \int_0^{\infty} r^l r^{n-1}(1+r^2)^{-(v+n)/2}\mathrm{d}r. \tag{49}$$

取$t = r^2$代入到式(49)中, 得

$$\int_0^{\infty} r^l r^{n-1}(1+r^2)^{-(v+n)/2}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{\frac{n+l}{2}-1}\times(1+t)^{(\frac{n+l}{2}+\frac{v-l}{2})}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}((n+l)/2,(v-l)/2), \tag{50}$$

其中$\boldsymbol{B}(\cdot)$表示Beta函数. 将方程(50)的结论应用到式(47)–(48)中, 得

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}(n/2, v/2), \tag{51}$$

$$\omega_1 r_1^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}((n+2)/2,(v-2)/2). \tag{52}$$

结合式(51)–(52), r_1可以由下式计算得到

$$r_1=\sqrt{\frac{\boldsymbol{B}((n+2)/2,(v-2)/2)}{\boldsymbol{B}(n/2,v/2)}}. \tag{53}$$

$\boldsymbol{B}(a,b)$与$\boldsymbol{\Gamma}(a)$和$\boldsymbol{\Gamma}(b)$之间存在如下的数学关系:

$$\boldsymbol{B}(a,b)=\frac{\boldsymbol{\Gamma}(a)\boldsymbol{\Gamma}(b)}{\boldsymbol{\Gamma}(a+b)}. \tag{54}$$

将式(54)的结论应用到式(51)和式(53)中, 得

$$\omega_1=\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\Gamma}(n/2)\boldsymbol{\Gamma}(v/2)}{\boldsymbol{\Gamma}((n+v)/2)}, \tag{55}$$

$$r_1=\sqrt{\frac{\boldsymbol{\Gamma}((n+2)/2)\boldsymbol{\Gamma}((v-2)/2)}{\boldsymbol{\Gamma}(n/2)\boldsymbol{\Gamma}(v/2)}}. \tag{56}$$

Gamma函数$\boldsymbol{\Gamma}(\cdot)$具有如下的数学性质:

$$\boldsymbol{\Gamma}(a+1)=a\boldsymbol{\Gamma}(a), \tag{57}$$

利用式(57)的数学性质, 式(56)可进一步化简为

$$r_1=\sqrt{\frac{n}{v-2}}. \tag{58}$$

将式(55)(58)带入到式(47)中, 整理得

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g})=\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\Gamma}(n/2)\boldsymbol{\Gamma}(v/2)}{\boldsymbol{\Gamma}((n+v)/2)}\boldsymbol{S}(\sqrt{\frac{n}{v-2}}). \tag{59}$$

联合式(44)和式(59), 基于Student's t近似的多维非线性函数积分$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g})$可以表示为

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g})=\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\Gamma}(n/2)\boldsymbol{\Gamma}(v/2)}{\boldsymbol{\Gamma}((n+v)/2)}\times \\ \{\frac{A_n}{2n}\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{I}(-\sqrt{\frac{n}{v-2}}\boldsymbol{e}_j)+\boldsymbol{I}(\sqrt{\frac{n}{v-2}}\boldsymbol{e}_j)]\}. \tag{60}$$

将式(44)(39)代入式(60), 便可得基于Student's t分布的三次幂球径容积准则(Student's t spherical-radial cubature rule, STSRCR), 即

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{g})=\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}-\sqrt{\frac{vn\boldsymbol{\Sigma}}{v-2}}\boldsymbol{e}_j)+ \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}+\sqrt{\frac{vn\boldsymbol{\Sigma}}{v-2}}\boldsymbol{e}_j)]. \tag{61}$$

因此, 借助方程(61)所给出的STSRCR来求解方程(18)–(19)及(23)–(25)中所涉及的含Student's t分布的多维非线性函数积分, 便可得鲁棒Student's t容积滤波算法(robust Student's t based cubature filter, RSTCF).

3.3 关于自由度参数v的选取讨论

从方程(61)中可以看出, 当自由度参数v逐渐增大时, 本文提出的STSRCR将逐渐退化为标准的SRCR, 即

$$\lim_{v\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}-\sqrt{\frac{vn\boldsymbol{\Sigma}}{v-2}}\boldsymbol{e}_j)+ \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}+\sqrt{\frac{vn\boldsymbol{\Sigma}}{v-2}}\boldsymbol{e}_j)]=\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}-\sqrt{n\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{e}_j)+ \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}+\sqrt{n\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{e}_j)]. \tag{62}$$

而当自由度参数$v\to\infty$时, Student's t分布将逐渐退化为高斯分布, 即

$$\int\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\lim_{v\to\infty}\mathrm{St}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma},v)\mathrm{d}\boldsymbol{x}= \\ \int\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})N(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{63}$$

由此可以得出, 当自由度参数$v\to\infty$时, 求解基于Student's t近似的多维非线性函数积分可以转化为求解高斯近似时的多维非线性函数积分, 此时, STSRCR等效为标准的SRCR.

自由度参数v是RSTCF中的关键参数, 在实际工程应用中, 最优的自由度参数v是无法直接获取的, 因为对不同的非线性系统而言, 用户无法对外部量测的噪声水平以及系统模型的不确定性程度做出最优的评价, 因此用户只能做出近似的评价, 进而选取次优的自由度参数v. 当系统模型的不确定性较大, 而且传感器的测量精度较低, 产生的量测野值较多, 从而造成过程及量测噪声分布尾部较厚时, 那么此时自由度参数v应该选取较小的值以便更好地匹配厚尾噪声分布. 而当系统的鲁棒性较强, 传感器的测量精度较高, 产生的野值相对较少, 从而过程及量测噪声分布尾部较薄时, 那么此时自由度参数v的选取应该适当的调大. 根据实际的工程及仿真经验, 当自由度参数v的选取在$[3,10]$的区间内时, 滤波效果能够达到令人满意的效果.

4 仿真

4.1 协同转弯目标跟踪仿真

协同转弯目标跟踪已经被广泛地用作一个标准问题来验证非线性滤波器的性能, 它的系统方程和量测方程可以表示如下[10]:

$$\boldsymbol{x}_k= \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} & 0 & \frac{\cos(\Omega T)-1}{\Omega} & 0 \\ 0 & \cos(\Omega T) & 0 & -\sin(\Omega T) & 0 \\ 0 & \frac{1-\cos(\Omega T)}{\Omega} & 1 & \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} & 0 \\ 0 & \sin(\Omega T) & 0 & \cos(\Omega T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{w}_{k-1}, \tag{64}$$

$$\boldsymbol{z}_k=\begin{bmatrix} r_k \\ \theta_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{\xi_k^2+\eta_k^2} \\ \tan^{-1}\left(\frac{\eta_k}{\xi_k}\right) \end{bmatrix}+\boldsymbol{v}_k, \tag{65}$$

其中: 状态向量$\boldsymbol{x_k} = [\xi\ \dot{\xi}\ \eta\ \dot{\eta}\ \Omega]^{\mathrm{T}}$, ξ和η分别表示x和y方向的位置, $\dot{\xi}$和$\dot{\eta}$分别表示x和y方向的速度, Ω表示未知恒定的转弯速率. T表示量测间隔, 厚尾过程噪声$\boldsymbol{w}_k$和量测噪声$\boldsymbol{v}_k$分别按照如下方式产生:

$$\boldsymbol{w}_k \sim \begin{cases} N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}), & \text{w.p. } 0.95, \\ N(\boldsymbol{0}, 50\boldsymbol{Q}), & \text{w.p. } 0.05, \end{cases} \tag{66}$$

$$\boldsymbol{v}_k \sim \begin{cases} N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}), & \text{w.p. } 0.95, \\ N(\boldsymbol{0}, 50\boldsymbol{R}), & \text{w.p. } 0.05, \end{cases} \tag{67}$$

其中: $\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}\{q_1\boldsymbol{M}, q_1\boldsymbol{M}, q_2 T\}$表示系统噪声协方差矩阵, $q_1 = 0.1\,\mathrm{m^2/s^3}$, $q_2 = 1.75 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s^3}$,

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix}, \tag{68}$$

w.p.表示以一定的概率出现, 0.05表示野值出现的概率, $\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}\{\sigma_{\mathrm{r}}^2, \sigma_{\theta}^2\}$表示量测噪声的协方差矩阵, $\sigma_{\mathrm{r}} = 10\,\mathrm{m}$, $\sigma_{\theta} = \sqrt{10}\,\mathrm{m \cdot rad}$, 真实的初始状态为

$$\boldsymbol{x_0} = [1000\,\mathrm{m}\ \ 300\,\mathrm{m/s}\ \ 1000\,\mathrm{m}\ \ 0\,\mathrm{m/s} - 3(^{\circ})/\mathrm{s}]^{\mathrm{T}}, \tag{69}$$

相应的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{0|0} = \mathrm{diag}\,\{100\,\mathrm{m^2}, 10\,\mathrm{m^2/s^2}, 100\,\mathrm{m^2}, 10\,\mathrm{m^2/s^2}, 100\,\mathrm{m \cdot rad^2/s^2}\}. \tag{70}$$

自由度参数选取$v_1 = v_2 = v_3 = 3$, 为了公平比较, 所有滤波器都设置为相同的初始条件, 且都执行200次独立的Monte Carlo仿真试验. 为了验证当过程和量测噪声分布均具有厚尾分布时, 基于高斯假设而设计的传统非线性高斯滤波器的滤波精度下降, 同时考虑到在实施高维数、强非线性目标跟踪时, 一阶泰勒线性化存在巨大的截断误差, 而基于确定性采样思想的非线性高斯滤波器能至少以二阶泰勒精度逼近任何非线性系统状态的后验均值和协方差, 因而在本仿真中重点比较采用容积变换推导出的CKF、采用无迹变换推导出的UKF以及本文所提出的RSTCF这3个滤波器的滤波性能. 为了比较这些滤波器的滤波性能, 本文使用位置、速度和转弯速率每个时刻的均方根误差(root-mean square error, RMSE)作为滤波性能评价指标:

$$\mathrm{RMSE_{pos}}(k) = \sqrt{\frac{1}{M_{\mathrm{c}}}\sum_{s=1}^{M_{\mathrm{c}}}[(\xi_k^{\mathrm{s}} - \hat{\xi}_k^{\mathrm{s}})^2 + (\eta_k^{\mathrm{s}} - \hat{\eta}_k^{\mathrm{s}})^2]}, \tag{71}$$

其中: $(\xi_k^{\mathrm{s}}, \eta_k^{\mathrm{s}})$和$(\hat{\xi}_k^{\mathrm{s}}, \hat{\eta}_k^{\mathrm{s}})$分别表示第$s$次Monte Carlo仿真第$k$时刻目标的真实位置和估计位置, M_{c}表示Monte Carlo仿真次数. 目标速度和转弯速率的RMSE公式与位置的RMSE类似, 不再赘述.

表1给出了各滤波器在300 s内对目标位置、速度以及转弯角速率估计RMSE均值的比较结果. 图2–4则展示了各滤波器对目标位置、速度以及转弯角速率的估计RMSE曲线, 从仿真结果中可以看出, 与现有的CKF和UKF算法相比, 本文所提出的RSTCF具有最小的RMSE均值. 当仿真时间进入到100 s以后, CKF和UKF对目标位置、速度及转弯角速率的估计均开始出现不同程度的发散. 导致产生这种现象的原因是, CKF和UKF都是在假设过程噪声和量测噪声服从高斯分布的前提下设计的, 而高斯分布并不能对厚尾的过程和量测噪声进行准确建模, 从而导致CKF和UKF对模型的不确定性及量测野值的变化敏感, 滤波精度下降, 最终出现滤波发散. 而相比于高斯分布, Student's t分布可以更好的匹配厚尾非高斯分布, 所以基于过程和量测噪声均服从Student's t分布假设而设计的RSTCF具有更高的滤波精度及更好的滤波稳定性, 该仿真结果也从侧面证明了将厚尾系统过程和量测噪声近似为Student's t分布的合理性.

表 1 各滤波器RMSE均值比较

Table 1 Averaged RMSEs of the filters

滤波器	位置/m	速度/$(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$	转弯速率/$((^{\circ}) \cdot \mathrm{s^{-1}})$
CKF	121.1	52.7	3.9
UKF	175.2	69.5	5.0
RSTCF	38.2	22.4	2.5

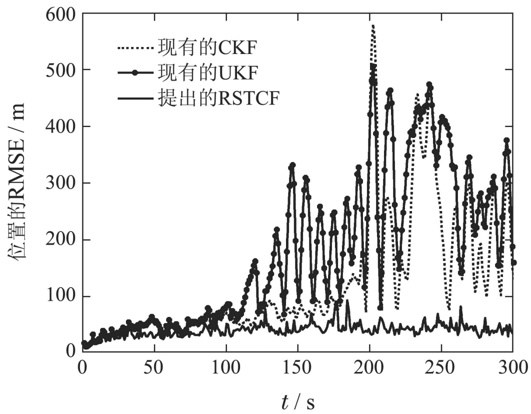

图 2 目标位置的RMSE

Fig. 2 Diagrams of RMSE of the target position

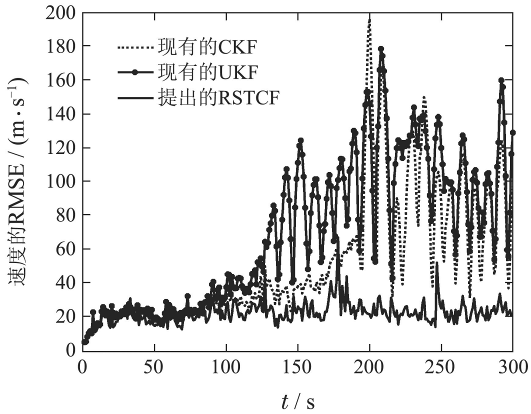

图 3 目标速度的RMSE

Fig. 3 Diagrams of RMSE of the target velocity

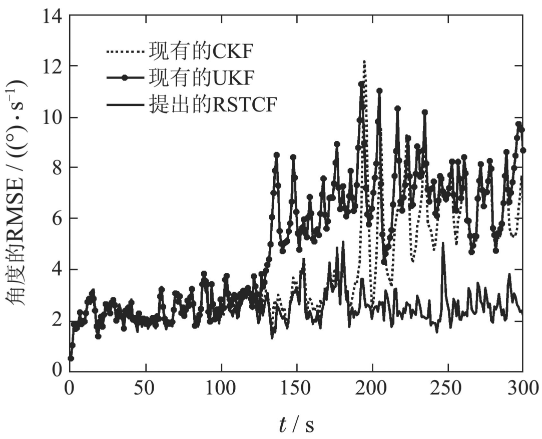

图 4 目标转弯速率的RMSE

Fig. 4 Diagrams of RMSE of the target turn rate

4.2 纯方位目标跟踪仿真

纯方位目标跟踪系统中, 目标的运动方程可以表示如下[1]:

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_{k-1}, \tag{72}$$

其中: 状态向量$\boldsymbol{x_k} = [x_k\ \ y_k\ \ \dot{x}_k\ \ \dot{y}_k]^{\mathrm{T}}$; x_k和y_k分别表示目标在x和y方向的位置; $\dot{x}_k$和$\dot{y}_k$分别表示目标在x和y方向的速度; $\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{G}$分别表示状态转移矩阵和噪声驱动矩阵, 具体的数学表达式为

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \Delta t\boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{0}_{2\times2} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varGamma} & \boldsymbol{0}_{2\times1} \\ \boldsymbol{0}_{2\times1} & \boldsymbol{\varGamma} \end{bmatrix}, \tag{73}$$

其中: Δt表示采样时间间隔, $\boldsymbol{I}_2$表示2维单位矩阵, $\boldsymbol{\varGamma}$表示过程噪声系数, $\boldsymbol{\varGamma} = [0.5\Delta t^2\ \ \Delta t]^{\mathrm{T}}$. 目标的运动通过一个安装在运动平台上的角度传感器进行含噪声观测, 假设在k时刻运动平台位于点$(x_k^{\mathrm{p}}, y_k^{\mathrm{p}})$, 则角度传感器的量测方程可以表示为

$$z_k = \tan^{-1}(\frac{y_k - y_k^{\mathrm{p}}}{x_k - x_k^{\mathrm{p}}}) + v_k, \tag{74}$$

其中: z_k表示k时刻角度传感器测量得到的目标方位角, 厚尾过程噪声$\boldsymbol{w}_k$和量测噪声v_k分别按照如下方式产生:

$$\boldsymbol{w}_k \sim \begin{cases} N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\varSigma}_{\mathrm{w}}), & \text{w.p. } 0.95, \\ N(\boldsymbol{0}, 100\boldsymbol{\varSigma}_{\mathrm{w}}), & \text{w.p. } 0.05, \end{cases} \tag{75}$$

$$v_k \sim \begin{cases} N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\varSigma}_{\mathrm{v}}), & \text{w.p. } 0.95, \\ N(\boldsymbol{0}, 50\boldsymbol{\varSigma}_{\mathrm{v}}), & \text{w.p. } 0.05, \end{cases} \tag{76}$$

其中: $\boldsymbol{\varSigma}_{\mathbf{w}} = 10^{-6}\boldsymbol{I}_2\,\mathrm{km}^2/\mathrm{min}^2$表示过程噪声协方差矩阵, $\boldsymbol{\varSigma}_{\mathrm{v}} = (0.02\,\mathrm{rad})^2$表示量测噪声方差. 目标的初始时刻位置为(3 km, 3 km), 运动平台的初始时刻位置为(0 km, 0 km). 目标以初始航向$-135.4°$, 初始速度为180节(1节= 1.852 km/h)作匀速直线运动. 运动平台首先以初始航向$-80°$, 初始速度为50节作匀速直线运动, 当$k = 15$ min时, 运动平台的航向调整为146°, 继续保持速度为50节的匀速直线运动. 自由度参数选取$v_1 = v_2 = v_3 = 5$.

为了对比说明本文所提出的RSTCF相比于现有的解决厚尾噪声的鲁棒非线性滤波器所具有的优越性, 本仿真将比较鲁棒Student's t扩展滤波器(robust Student's t extend filter, RSTEF)、鲁棒Student's t无迹滤波器(robust Student's t unscented filter, RSTUF)以及RSTCF这3个滤波器的滤波性能. 为了公平比较, 所有滤波器都设置为相同的初始条件, 且都执行200次独立的Monte Carlo仿真试验, 使用目标位置、速度每个时刻的RMSE作为各滤波器的滤波性能评价指标.

图5–6分别展示了RSTEF, RSTUF以及本文所提出的RSTCF对目标位置及速度估计的RMSE曲线, 表2给出了各滤波器在100 min内对目标位置及速度估计RMSE均值的比较结果以及各滤波器单次仿真的运行时间. 从仿真结果中可以看出, 在系统过程和量测噪声均为厚尾分布的条件下, RSTCF的跟踪精度要明显高于RSTEF和RSTUF. 同时, RSTCF的运行时间介于RSTEF和RSTUF之间. 仿真结果分析如下: 在纯方位目标跟踪系统中, 由于RSTEF采用了一阶泰勒展开线性化的方法, 导致在计算雅克比矩阵时存在着巨大的截断误差, 无法保证较高的跟踪精度. 而RSTCF和RSTUF算法则是分别采用三次幂球径容积准则和无迹变换的方法来近似状态的后验PDF, 通过确定性地选择一组样本点来表征状态后验PDF的某些特征(如均值、协方差等), 并经非线性变换传播这组样本点, 最后计算得到系统状态的后验均值和协方差. 理论上, 三次幂球径容积准则和无迹变换能至少以二阶泰勒精度逼近任何非线性系统状态的后验均值和协方差, 因此相比RSTEF, RSTCF和RSTUF具有较高的跟踪精度, 并且无需计算雅可比矩阵.

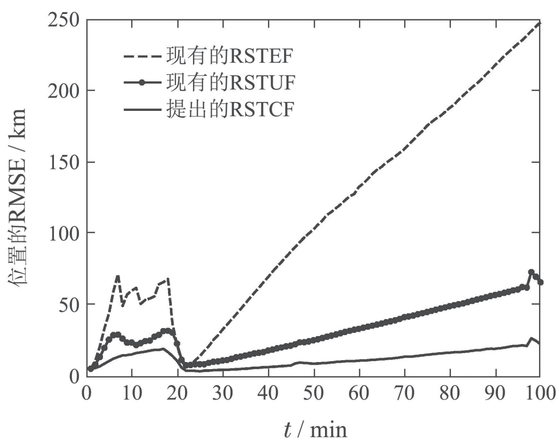

图 5 目标位置的RMSE

Fig. 5 Diagrams of RMSE of the target position

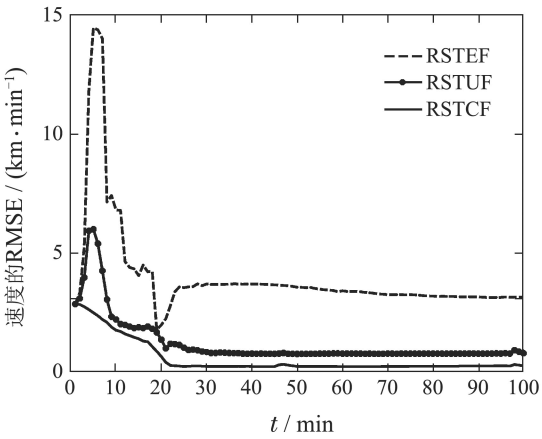

图 6 目标速度的RMSE

Fig. 6 Diagrams of RMSE of the target velocity

表 2 各滤波器RMSE均值比较

Table 2 Averaged RMSEs of the filters

滤波器	位置/km	速度/(km · min^{-1})	运行时间/ms
RSTEF	113.38	3.98	0.10
RSTUF	32.31	1.22	0.63
RSTCF	12.36	0.56	0.60

而相比于采用无迹变换的RSTUF, RSTCF采用的是采样点个数更少的三次幂球径容积准则, 因此RSTCF所需的单步运行时间比RSTUF更少. 此外, 当无迹变换应用于高维非线性系统时, 其确定性采样点的权值极易出现负值情况, 很容易导致其矩积分中引入很大的截断误差, 最终导致滤波精度下降[4]. 而三次幂球径容积准则的采样点权值永远为正, 这就保证了方差矩阵的对称性和正定性, 在一定程度上缓解了滤波过程中由于舍入误差而导致的滤波发散和数值精度降低的问题. 综上所述, 在厚尾过程和量测噪声的情况下, 本文所提出的RSTCF相比于现有的鲁棒非线性滤波器具有更高的估计精度和更好的数值稳定性.

5 结论

本文提出了一种基于Student's t近似的三次幂球径容积准则, 解决了含有Student's t分布的复杂多维非线性函数积分求解的问题, 并在此基础上推导出了鲁棒Student's t容积滤波器. 目标跟踪的仿真结果表明本文所提出的方法适用于解决带厚尾噪声的非线性状态估计问题, 并且所提出的方法比现有的方法具有更高的估计精度和更好的鲁棒性.

参考文献:

[1] ZHANG Yonggang, HUANG Yulong, WU Zhemin, et al. A high order unscented Kalman filtering method. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(5): 838 – 848.
(张勇刚, 黄玉龙, 武哲民, 等. 一种高阶无迹卡尔曼滤波方法. 自动化学报, 2014, 40(5): 838 – 848.)

[2] ZHANG Yonggang, HUANG Yulong, ZHAO Lin. A general framework solution to Gaussian filter with multi-step randomly-delayed measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 122 – 135.
(张勇刚, 黄玉龙, 赵琳. 一种带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解. 自动化学报, 2015, 41(1): 122 – 135.)

[3] ZHANG Yonggang, CHENG Ran, HUANG Yulong, et al. Truncated adaptive cubature particle filter. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38(2): 382 – 391.
(张勇刚, 程然, 黄玉龙, 等. 截断的自适应容积粒子滤波器. 系统工程与电子技术, 2016, 38(2): 382 – 391.)

[4] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254 – 1269.

[5] JIA B, XIN M, CHENG Y. High-degree cubature Kalman filter. *Automatica*, 2013, 49(2): 510 – 518.

[6] CHANG L B, HU B Q, LI A, et al. Transformed unscented Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(1): 252 – 257.

[7] GARCIA A F, MORELANDE M R, GRAJAL J. Truncated unscented Kalman filting. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3372 – 3386.

[8] HUANG Y L, ZHANG Y G, LI N. A novel robust Student's t-based Kalman filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 53(3): 1545 – 1554.

[9] AGAMENNONI G, NEBOT E M. Robust estimation in non-linear state-space models with state-dependent noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(8): 2165 – 2175.

[10] HUANG Yulong, ZHANG Yonggang, WU Zhemin, et al. Robust gaussian approximate filter and smoother with colored heavy tailed measurement noise. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(1): 114 – 131.
(黄玉龙, 张勇刚, 武哲民, 等. 带有色厚尾量测噪声的鲁棒高斯近似滤波器和平滑器. 自动化学报, 2017, 43(1): 114 – 131.)

[11] PICHE R, SARKKA S, HARTIKAINEN J. Recursive outlier-robust filtering and smoothing for nonlinear systems using the multivariate student-t distribution. *Proceedings of IEEE International Workshop on Machine Learing for Signal Processing*. Santander: IEEE, 2012: 1 – 6.

[12] ROTH M, OZKAN E, GUSTAFSSON F. A student-t filter for heavy tailed process and measurement noise. *Proceedings of IEEE International Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Vancouver: IEEE, 2013: 5770 – 5774.

[13] XU D J, SHEN C, SHEN F. A robust particle filtering algorithm with non-Gaussian measurement noise using Student's t distribution. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(1): 30 – 34.

[14] HUANG Y L, ZHANG Y G, LI N, et al. Robust Student's t based nonlinear filter and smoother. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(5): 2586 – 2596.

作者简介:

程 然 工程师, 主要研究方向为多源信息融合与多目标跟踪技术, E-mail: 842773450@qq.com;

缪礼锋 高级工程师, 主要研究方向为多源信息融合与雷达资源管理, E-mail: miaoLF@126.com;

王婷婷 工程师, 主要研究方向为多源信息融合与多目标跟踪技术, E-mail: wangtingt@163.com.