

带扰动的多非完整移动机器人分布式有限时间一致性控制

姜玉涛, 刘忠信[†], 陈增强

(南开大学津南校区 计算机与控制工程学院, 天津 300353; 天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300353)

摘要: 论文研究多个非完整移动机器人在控制输入存在干扰时, 有限时间一致性控制问题。利用坐标变换, 将多移动机器人系统的一致性问题转化为非完整约束链式系统的一致性问题, 在控制输入带有未知有界干扰的条件下, 设计了一种分布式控制算法, 并利用Lyapunov理论证明了该算法能够使移动机器人的各个状态在有限时间内达到一致。最后通过数值仿真验证了算法的有效性。

关键词: 非完整移动机器人; 非完整约束链式系统; 有界干扰; 有限时间一致; 分布式控制

引用格式: 姜玉涛, 刘忠信, 陈增强. 带扰动的多非完整移动机器人分布式有限时间一致性控制. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 737–745

DOI: 10.7641/CTA.2018.80012

Distributed finite-time consensus algorithm for multiple nonholonomic mobile robots with disturbances

JIANG Yu-tao, LIU Zhong-xin[†], CHEN Zeng-qiang

(College of Computer and Control Engineer, Jinnan Campus, Nankai University, Tianjin 300353, China;
Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics, Tianjin 300353, China)

Abstract: This paper addresses the algorithm of finite-time consensus problem for multiple nonholonomic mobile robots with disturbances. Coordinate transformation is used to convert the mobile robot kinematics into multiple nonholonomic chained-form systems. Under the restriction of bounded disturbances, distributed control laws are designed for achieving the consensus objectives. Rigorous proof using Lyapunov theory shows that the states of all mobile robots can reach a consensus in finite time. Finally, simulations are provided to verify the efficiency of the proposed method.

Key words: nonholonomic mobile robots; nonholonomic chained-form; bounded disturbances; finite-time consensus; distributed control

Citation: JIANG Yutao, LIU Zhongxin, CHEN Zengqiang. Distributed finite-time consensus algorithm for multiple nonholonomic mobile robots with disturbances. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 737–745

1 引言

近年来, 随着群智能技术的发展, 多智能体系统的分布式控制问题受到了越来越多的关注, 在许多方面有着广阔的应用前景, 例如网络同步问题^[1–2]、编队控制^[3]、卫星群的姿态控制^[4]、一致性以及蜂拥问题^[5]等。其中, 一致性作为多智能体系统分布式控制的基本问题, 引起许多学者的热烈讨论。所谓一致性, 就是设计合理的控制输入, 使所有智能体共同关心的某(几)个量, 如位置, 速度等状态渐近达到一个共同的值。根据系统的不同, 多智能体一致性问题分为连续一致性问题^[6]、离散一致性问题^[7]、线性一致性问题^[8]以及非线性一致性问题^[9]。在实际应用中, 智能

体之间通过传感器或通信设备进行信息传输必然会产生时滞、网络结构变化等问题, 针对这类问题, 文献[10–11]讨论了时滞情况下的多智能体系统一致性问题, 文献[12–13]研究了具有切换拓扑结构的一致性问题。随着一致性问题研究的深入, 一致性问题的收敛速度受到众多学者的关注, 文献[14–15]证明了多智能体系统达到一致的收敛速度主要与智能体之间的拓扑结构有关。为了更好地解决多智能体系统的收敛问题, 文献[16]提出了一种新的一致性控制算法, 使多智能体各个状态在有限时间内收敛到相同值, 这种有限时间一致性控制算法不仅具有更快的收敛速度, 而且具有更好的收敛精度和抗干扰性能^[17–19]。该算法

收稿日期: 2018–01–05; 录用日期: 2018–06–19。

[†]通信作者。E-mail: lzhx@nankai.edu.cn; Tel.: +86 22-23508547。

本文责任编辑: 武玉强。

国家自然科学基金项目(61573200, 61573199)资助。

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61573200, 61573199).

也被应用到二阶多智能体系统的一致性问题^[20-21]以及有限时间编队控制^[22]的研究中.

许多非完整约束移动机器人的协调控制问题,如编队控制,都可以转化为一致性问题,所以研究多非完整移动机器人的一致性问题具有重要意义.在文献[23-24]中讨论了多个无人车的编队控制问题.文献[25-27]研究了多个非完整约束智能体的一致性问题.在保证多个非完整约束系统渐近达到一致的基础上,文献[28]针对多个非完整约束链式系统提出了基于分布式观测器的有限时间一致控制算法.文献[29]将有限时间一致性控制方法用到了多个非完整约束移动机器人的编队控制中,使得多个移动机器人能在有限时间内达到预期的编队队形.

上述提到的有关非完整约束移动机器人的编队或一致性问题,都是假设已知机器人精确的运动学模型,然而在许多实际应用中,由于移动机器人具有时变、强耦合、非线性等特征,使得摩擦和外部干扰等不确定因素给整个系统带来很大的影响,例如不能渐近达到一致、跟踪路径产生较大偏差等,因此研究带扰动的多移动机器人一致性问题是十分必要的.本文考虑带扰动的多个非完整移动机器人的有限时间一致性问题,即当多个移动机器人的控制输入带有未知有界干扰时,设计控制器使得多个移动机器人的运动状态在有限时间内达到一致.

文章结构安排如下:首先介绍一些图论的基本知识、引理,以及非完整移动机器人的模型;之后提出针对模型设计的控制算法并利用Lyapunov理论证明了该算法的可行性;最后通过数值仿真,验证了算法的可行性.

2 预备知识和问题描述

2.1 图论

设 $G = (\mathcal{V}, E, A)$ 是一个具有 n 个节点的无向加权图,其中: $\mathcal{V} = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n\}$ 是 n 个节点的集合, $E \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示边的集合. $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是图 G 的邻接矩阵,其中 $a_{i,j}$ 表示 (Λ_j, Λ_i) 连接权重,即

$$\begin{cases} a_{i,j} > 0, (\Lambda_j, \Lambda_i) \in E, \\ a_{i,j} = 0, (\Lambda_j, \Lambda_i) \notin E. \end{cases}$$

节点 Λ_i 的邻居集定义为 $N_i = \{\Lambda_j \in \mathcal{V} : (\Lambda_j, \Lambda_i) \in E\}$. $D = \text{diag}\{\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n\}$ 表示图 G 的度矩阵,其中

$$\iota_i = \sum_{j \in N_i} a_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n,$$

那么图 G 的拉普拉斯(Laplacian)矩阵为 $L = D - A$.图 G 中任意两点之间的路径,指的是连接两点间所用的边的集合.如果图 G 中的任何两点 $\Lambda_i, \Lambda_j (i \neq j)$ 之间都存在一条路径,那么称图 G 是连通的.符号说明:

本文中 $\mathbf{0}$ 表示全0列向量, $\mathbf{1}$ 表示全1列向量,sgn表示标准符号函数.

2.2 引理

引理1^[15] 如果 G 是无向连通图, A 是 G 的邻接矩阵,则 G 的拉普拉斯矩阵 L 有以下特性:

- 1) 0是 L 的一个简单特征值, $\mathbf{1}$ 是对应的特征向量.
- 2) $x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} (x_i - x_j)^2$,因为 L 是半正定的,所以 L 的所有特征值都是实数,且不小于零.
- 3) L 的第二小特征值记为 $\lambda_2(L)$,满足

$$\lambda_2(L) = \min_{x \neq 0, \mathbf{1}^T x = 0} \left(\frac{x^T L x}{x^T x} \right) > 0,$$

如果 $\mathbf{1}^T x = 0$,则有 $x^T L x \geq \lambda_2(L) x^T x$.

引理2^[16] 考虑如下非线性系统:

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在原点 $x = 0$ 的开邻域 U_0 ,关于 x 连续.假设在原点的邻域 $\hat{U} \subset U_0 \in \mathbb{R}^n$ 内存在一个一阶正定的连续函数 $V(x)$,且存在实数 $c > 0, 0 < \alpha < 1$,使 $V(x)$ 满足

$$\dot{V}(x) + cV(x)^\alpha \leq 0, x \in \hat{U} \setminus \{0\},$$

则 $V(x)$ 能够在有限时间内收敛到零,且收敛时间 T 满足, $T \leq \frac{V(x(0))^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}$.

引理3^[30] 对于任意 $y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$,且实数 $0 < p \leq 1$,则 $(\sum_{i=1}^n |y_i|)^p \leq \sum_{i=1}^n |y_i|^p$.

引理4^[31] 如果 $0 < p = p_1/p_2 \leq 1$,其中 p_1, p_2 均为正奇数,则 $|x^p - y^p| \leq 2^{1-p} |x - y|^p$.

引理5^[31] 如果 c, d 均为正数,则对于任意 $x, y \in R$,满足

$$|x|^c |y|^d \leq \frac{c}{c+d} |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d} |y|^{c+d}.$$

2.3 问题描述

考虑 n 个非完整约束移动机器人的系统,系统中每个移动机器人具有相同的结构,有两个驱动轮和一个万向轮,如图1所示.用 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示移动机器人序列,则移动机器人 i 的运动学表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \cos \theta_i, \\ \dot{y}_i = v_i \sin \theta_i, \\ \dot{\theta}_i = \omega_i, \end{cases} \quad (1)$$

式中: x_i, y_i 分别表示移动机器人 i 在笛卡尔坐标系下的坐标; θ_i 为机器人 i 前进方向与 X 轴的夹角; v_i, ω_i 分别为机器人 i 的线速度和角速度,也是机器人 i 的控制输入.本文要求非完整约束移动机器人 i 是纯滚动无

滑动的, 即满足 $\dot{y}_i \cos \theta_i - \dot{x}_i \sin \theta_i = 0$.

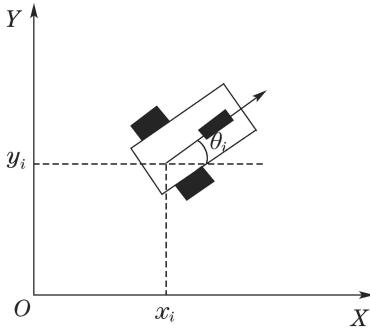


图1 移动机器人示意图

Fig. 1 Figure of a mobile robot

假设1 图论可以清晰地描述移动机器人之间的连接关系, 本文假设多个机器人之间的拓扑结构图 G 是无向连通的, 则其拉普拉斯矩阵 L 具有引理1提到的所有性质.

假设2 在实际应用中, 机器人存在着自身执行机构对线速度和角速度的执行误差以及不同种类地面的摩擦对机器人造成阻碍等一些不可避免的问题, 因此文中假设每个移动机器人的控制输入(即线速度和角速度)中存在未知有界扰动.

$\forall i \in S$, 在假设2的条件下, 移动机器人*i*的运动学表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = (v_i + d_{2,i}) \cos \theta_i, \\ \dot{y}_i = (v_i + d_{2,i}) \sin \theta_i, \\ \dot{\theta}_i = \omega_i + d_{1,i}. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $d_{1,i}, d_{2,i}$ 分别为角速度和线速度中的未知有界扰动, 满足 $|d_{1,i}| < d_1, |d_{2,i}| < d_2$, 且 d_1, d_2 为已知正实数. 本文的控制目标是设计合理的控制输入, 使得所有以式(2)为模型的移动机器人状态 x_i, y_i, θ_i 在有限时间内达到一致. 通过坐标变换(3), 将模型(2)转换为链式模型(4).

$$\begin{cases} q_{1,i} = \theta_i, \\ q_{2,i} = x_i \sin \theta_i - y_i \cos \theta_i, \\ q_{3,i} = x_i \cos \theta_i + y_i \sin \theta_i, \\ u_{1,i} = \omega_i, \\ u_{2,i} = v_i - \omega_i q_{2,i}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_{1,i} = u_{1,i} + d_{1,i}, \\ \dot{q}_{2,i} = (u_{1,i} + d_{1,i}) q_{3,i}, \\ \dot{q}_{3,i} = u_{2,i} - d_{1,i} q_{2,i} + d_{2,i}. \end{cases} \quad (4)$$

转换成链式模型(4)后, 控制目标变为: $\forall i \in S$ 设计合理的控制输入 $u_{1,i}$ 和 $u_{2,i}$, 使得状态 $q_{1,i}, q_{2,i}, q_{3,i}$

在有限时间内分别达到一致. 记

$$\begin{aligned} q_1 &= [q_{1,1} \ q_{1,2} \ \cdots \ q_{1,n}]^T, \\ q_2 &= [q_{2,1} \ q_{2,2} \ \cdots \ q_{2,n}]^T, \\ q_3 &= [q_{3,1} \ q_{3,2} \ \cdots \ q_{3,n}]^T, \\ x &= [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T, \\ y &= [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]^T, \\ \theta &= [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_n]^T, \\ u_1 &= [u_{1,1} \ u_{1,2} \ \cdots \ u_{1,n}]^T, \\ u_2 &= [u_{2,1} \ u_{2,2} \ \cdots \ u_{2,n}]^T. \end{aligned}$$

注1 由变换(3)得

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_i & \cos \theta_i \\ -\cos \theta_i & \sin \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{2,i} \\ q_{3,i} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中 $\theta_i = q_{1,i}$. 由式(3)(5)知, 若设计合理的控制输入 u_1, u_2 , 使得链式系统(4)的状态 q_1, q_2, q_3 达到一致, 则移动机器人系统(2)的状态 x, y, θ 达到一致, 即完成本文最终的控制目标.

3 控制输入设计和稳定性分析

为研究方便, 先将系统(4)分为一个一阶子系统(6)和一个二阶子系统(7):

$$\dot{q}_{1,i} = u_{1,i} + d_{1,i}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_{2,i} = (u_{1,i} + d_{1,i}) q_{3,i}, \\ \dot{q}_{3,i} = u_{2,i} - d_{1,i} q_{2,i} + d_{2,i}. \end{cases} \quad (7)$$

下面先针对系统(7)设计控制输入, 使得该系统的所有状态在有限时间内达到一致, 同时保证系统(6)的状态 $q_{1,i}$ 有界, 再考虑系统(6)的一致性问题.

定理1 在假设1, 2的条件下, $\forall i \in S$, 设计如下控制输入:

$$u_{1,i} = k_{1,i}, \quad (8)$$

$$u_{2,i} = -d_2 \operatorname{sgn} \Delta_i - d_1 |q_{2,i}| \operatorname{sgn} \Delta_i - k_2 (\Delta_i)^{\frac{2-p}{p}}, \quad (9)$$

其中

$$\Delta_i = q_{3,i}^p + k_1^p \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{2,i} - q_{2,j}) \right).$$

如果 $k_{1,i}, k_1, k_2$ 为常数, 且满足

$$k_{1,i} > d_1,$$

$$k_1 > \frac{1}{c_2} \left(\frac{2^{1-\frac{1}{p}} p c_1}{1+p} + \frac{c_1 (\beta + n\gamma)}{1+p} + \eta \right),$$

$$k_2 > (2 - \frac{1}{p}) 2^{1-\frac{1}{p}} k_1^{1+p} \times$$

$$\left(\frac{c_1 (2^{1-\frac{1}{p}} + (\beta + n\gamma)p)}{1+p} + \frac{c_1 2^{1-\frac{1}{p}} (\beta + n\gamma)p}{k_1} + \eta \right),$$

则在有限时间内,二阶子系统(7)的状态 $q_{2,i}$ 达到一致, $q_{3,i}$ 达到一致且为0,系统(6)的状态 $q_{1,i}$ 有界.其中 $1 < p = p_1/p_2 \leq 2$, p_1, p_2 均为正奇数, $\eta > 0$; β, γ, c_1, c_2 按如下方式选取:

$$\begin{aligned}\beta &= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} \right), \\ \gamma &= \max_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j}), \\ c_1 &= \max_{1 \leq i \leq n} (k_{1,i} + d_1), \\ c_2 &= \min_{1 \leq i \leq n} (k_{1,i} + d_1).\end{aligned}$$

证 将控制输入(8)–(9)代入系统(6)–(7)中得到

$$\dot{q}_{1,i} = k_{1,i} + d_{1,i}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_{2,i} = (k_{1,i} + d_{1,i})q_{3,i}, \\ \dot{q}_{3,i} = -d_2 \operatorname{sgn} \Delta_i - d_1 |q_{2,i}| \operatorname{sgn} \Delta_i - k_2 (\Delta_i)^{\frac{2-p}{p}} - d_{1,i} q_{2,i} + d_{2,i}. \end{cases} \quad (11)$$

显然状态 $q_{1,i}$ 在有限时间内有界,下面主要分析二阶子系统(7)的一致性问题.该部分证明主要分两步进行.

步骤1 $\forall i, j \in S$, 记 $\varepsilon_{2,i} = q_{2,i} - q_{2,j}$, 构造正定函数

$$V_0(t) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} a_{i,j} \varepsilon_{2,i}^2. \quad (12)$$

对 $V_0(t)$, 关于时间 t 求导得

$$\dot{V}_0(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{2,i} - q_{2,j}) \dot{q}_{2,i}.$$

$\forall i \in S$, 记 $e_{2,i} = \sum_{j \in N_i} a_{i,j} \varepsilon_{2,i}$, 并引入虚拟状态 $q_{3,i}^* = -k_1 e_{2,i}^{\frac{1}{p}}$. 记 $\xi_i = q_{3,i}^p - q_{3,i}^{*p}$, $d = 1 + \frac{1}{p}$, 因为 $1 < p = p_1/p_2 \leq 2$, 且 p_1, p_2 为正奇数, 故 $|\xi_i|^d = \xi_i^d$, $|e_{2,i}|^d = e_{2,i}^d$ 成立. 根据式(11), 结合引理4–5得

$$\begin{aligned}\dot{V}_0(t) &= \sum_{i=1}^n (k_{1,i} + d_{1,i}) q_{3,i}^* e_{2,i} + \\ &\quad \sum_{i=1}^n (k_{1,i} + d_{1,i}) (q_{3,i} - q_{3,i}^*) e_{2,i} \leqslant \\ &\quad -c_2 k_1 \sum_{i=1}^n |e_{2,i}|^{1+\frac{1}{p}} + \\ &\quad c_1 \sum_{i=1}^n 2^{1-\frac{1}{p}} |q_{3,i}^p - q_{3,i}^{*p}|^{\frac{1}{p}} |e_{2,i}| \leqslant \\ &\quad -c_2 k_1 \sum_{i=1}^n |e_{2,i}|^d + \\ &\quad c_1 \sum_{i=1}^n 2^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{1+p} |\xi_i|^d + \frac{p}{1+p} |e_{2,i}|^d \right) = \\ &\quad -c_2 k_1 \sum_{i=1}^n e_{2,i}^d + \\ &\quad c_1 \sum_{i=1}^n 2^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{1+p} \xi_i^d + \frac{p}{1+p} e_{2,i}^d \right). \quad (13)\end{aligned}$$

因为 $\sum_{i=1}^n e_{2,i}^2 = x(Lq_2)^T Lq_2 = q_2^T L^T L q_2$, 记 $L^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} = h = [h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_n]^T$, 则 $h^T h = (L^{\frac{1}{2}} \mathbf{1})^T L^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T L \mathbf{1} = \mathbf{0}$, 得 $h = \mathbf{0}$, $\mathbf{1}^T L^{\frac{1}{2}} q_2 = \mathbf{0}$, 根据引理1得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n e_{2,i}^2 &= (L^{\frac{1}{2}} q_2)^T L (L^{\frac{1}{2}} q_2) \geqslant \\ \lambda_2(L) q_2^T L q_2 &= 2\lambda_2(L) V_0(t). \quad (14)\end{aligned}$$

步骤2 针对系统(7)构造李雅普诺夫候选函数

$$\hat{V}(t) = V_0(t) + \sum_{i=1}^n V_i(t), \quad (15)$$

其中

$$V_i(t) = \rho \int_{q_{3,i}^*}^{q_{3,i}} (s^p - q_{3,i}^{*p})^{2-\frac{1}{p}} ds, \quad (16)$$

式中 $\rho = \frac{1}{(2 - \frac{1}{p}) 2^{1-\frac{1}{p}} k_1^{1+p}}$. 由文献[31]知, 式(16)可微且正定.

对 $V_i(t)$ 关于时间 t 求导^[28]

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(t) &= \rho \left[-(2 - \frac{1}{p}) \frac{dq_{3,i}^{*p}}{dt} \int_{q_{3,i}^*}^{q_{3,i}} (s^p - q_{3,i}^{*p})^{1-\frac{1}{p}} ds + \right. \\ &\quad \left. \xi_i^{2-\frac{1}{p}} \dot{q}_{3,i} \right]. \quad (17)\end{aligned}$$

由式(11)得

$$\begin{aligned}\left| \frac{dq_{3,i}^{*p}}{dt} \right| &= |k_1^p \frac{de_{2,i}}{dt}| = \\ |k_1^p (\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (\dot{q}_{2,i} - \dot{q}_{2,j}))| &= \\ |k_1^p (\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (c_i^* q_{3,i} - c_j^* q_{3,j}))| &\leqslant \\ k_1^p c_1 (\beta |q_{3,i}| + \gamma \sum_{m=1}^n |q_{3,m}|), &\quad (18)\end{aligned}$$

其中: $c_i^* = k_{1,i} + d_{1,i}$, $c_j^* = k_{1,j} + d_{1,j}$.

根据文献[28]得不等式

$$\begin{aligned}\left| \int_{q_{3,i}^*}^{q_{3,i}} (s^p - q_{3,i}^{*p})^{1-\frac{1}{p}} ds \right| &\leqslant \\ |q_{3,i} - q_{3,i}^*| |\xi_i|^{1-\frac{1}{p}}. &\quad (19)\end{aligned}$$

将不等式(18)–(19)代入式(17)得

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(t) &\leqslant \frac{1}{2^{1-\frac{1}{p}} k_1} c_1 (\beta |q_{3,i}| + \gamma \sum_{m=1}^n |q_{3,m}|) \times \\ &\quad |q_{3,i} - q_{3,i}^*| |\xi_i|^{1-\frac{1}{p}} + \rho \xi_i^{2-\frac{1}{p}} \dot{q}_{3,i}, \quad (20)\end{aligned}$$

$\forall i, m \in S$, 由引理4和引理5得

$$\begin{aligned}|q_{3,m}| |q_{3,i} - q_{3,i}^*| |\xi_i|^{1-\frac{1}{p}} &= \\ |q_{3,m}| |(q_{3,i}^p)^{\frac{1}{p}} - (q_{3,i}^{*p})^{\frac{1}{p}}| |\xi_i|^{1-\frac{1}{p}} &\leqslant \\ |q_{3,m}| 2^{1-\frac{1}{p}} |q_{3,i}^p - q_{3,i}^{*p}|^{\frac{1}{p}} |\xi_i|^{1-\frac{1}{p}} &= \\ |q_{3,m}| 2^{1-\frac{1}{p}} |\xi_i| &\leqslant \\ 2^{1-\frac{1}{p}} (|q_{3,m} - q_{3,m}^*| |\xi_i| + |q_{3,m}^*| |\xi_i|) &\leqslant\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2^{1-\frac{1}{p}}(2^{1-\frac{1}{p}}+k_1)\frac{p}{1+p}|\xi_i|^d + \\ & \frac{2^{2-\frac{2}{p}}}{1+p}|\xi_m|^d + \frac{2^{1-\frac{1}{p}}k_1}{1+p}|e_{2,m}|^d. \end{aligned} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) \leqslant & \frac{c_1\mu}{k_1(1+p)}|\xi_i|^d + \frac{c_1\beta}{1+p}|e_{2,i}|^d + \\ & \frac{c_1\gamma 2^{1-\frac{1}{p}}}{k_1(1+p)}\sum_{m=1}^n|\xi_m|^d + \\ & \frac{c_1\gamma}{1+p}\sum_{m=1}^n|e_{2,m}|^d + \rho\xi_i^{2-\frac{1}{p}}\dot{q}_{3,i} = \\ & \frac{c_1\mu}{k_1(1+p)}\xi_i^d + \frac{c_1\beta}{1+p}e_{2,i}^d + \\ & \frac{c_1\gamma 2^{1-\frac{1}{p}}}{k_1(1+p)}\sum_{m=1}^n\xi_m^d + \\ & \frac{c_1\gamma}{1+p}\sum_{m=1}^ne_{2,m}^d + \rho\xi_i^{2-\frac{1}{p}}\dot{q}_{3,i}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\mu = 2^{1-\frac{1}{p}}\beta + (2^{1-\frac{1}{p}}+k_1)(\beta+n\gamma)p.$$

将式(11)代入式(22), 并结合式(13), 得 $\dot{\hat{V}}(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}(t) \leqslant & (-c_2k_1 + \frac{c_12^{1-\frac{1}{p}}p}{1+p} + \frac{c_1(\beta+n\gamma)}{1+p})\sum_{i=1}^n e_{2,i}^d + \\ & (-\rho k_2 + \frac{c_1(2^{1-\frac{1}{p}}+(\beta+n\gamma)p)}{1+p} + \\ & \frac{c_12^{1-\frac{1}{p}}(\beta+n\gamma)p}{k_1}\sum_{i=1}^n\xi_i^d - \\ & \rho\sum_{i=1}^n|\xi_i^{2-\frac{1}{p}}||q_{2,i}|(d_1-d_{1,i}) - \\ & \rho\sum_{i=1}^n|\xi_i^{2-\frac{1}{p}}|(d_2-d_{2,i}) \leqslant \\ & (-c_2k_1 + \frac{c_12^{1-\frac{1}{p}}p}{1+p} + \frac{c_1(\beta+n\gamma)}{1+p})\sum_{i=1}^n e_{2,i}^d + \\ & (-\rho k_2 + \frac{c_1(2^{1-\frac{1}{p}}+(\beta+n\gamma)p)}{1+p} + \\ & \frac{c_12^{1-\frac{1}{p}}(\beta+n\gamma)p}{k_1}\sum_{i=1}^n\xi_i^d). \end{aligned} \quad (23)$$

结合定理1中参数 k_1, k_2 的范围得

$$\dot{\hat{V}}(t) \leqslant -\eta\sum_{i=1}^n e_{2,i}^d - \eta\sum_{i=1}^n\xi_i^d,$$

再利用引理3得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}(t) \leqslant & -\eta\sum_{i=1}^n e_{2,i}^d - \eta\sum_{i=1}^n\xi_i^d \leqslant \\ & -\eta((\sum_{i=1}^n e_{2,i}^2)^{\frac{d}{2}} + (\sum_{i=1}^n\xi_i^2)^{\frac{d}{2}}) \leqslant \\ & -\eta(\sum_{i=1}^n e_{2,i}^2 + \sum_{i=1}^n\xi_i^2)^{\frac{d}{2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

由文献[20]和引理4得

$$\begin{aligned} V_i(t) \leqslant & \rho|q_{3,i} - q_{3,i}^*||q_{3,i}^p - q_{3,i}^{*p}|^{2-\frac{1}{p}} \leqslant \\ & \frac{\xi_i^2}{(2-\frac{1}{p})k_1^{1+p}}. \end{aligned} \quad (25)$$

将式(14)–(25)代入式(15)中得

$$\hat{V} = V_0 + \sum_{i=1}^n V_i \leqslant \sigma_1(\sum_{i=1}^n e_{2,i}^2 + \sum_{i=1}^n\xi_i^2), \quad (26)$$

其中

$$\sigma_1 = \max(\frac{1}{2\gamma_2(L)}, \frac{1}{(2-\frac{1}{p})k_1^{1+p}}),$$

再结合式(24)(26)得

$$\dot{\hat{V}} + \sigma_2\hat{V}^{\frac{d}{2}} \leqslant 0, \quad (27)$$

其中

$$\sigma_2 = \frac{\eta}{2\sigma_1^{\frac{d}{2}}}.$$

由引理2知, $\hat{V}(t)$ 在有限时间 $t \leqslant T_1$ 内收敛到零, 其中

$$T_1 = \frac{\hat{V}(q_2(0), q_3(0))^{1-\frac{d}{2}}}{\sigma_2(1-\frac{d}{2})}.$$

故 $t > T_1$ 时, $V_0(t) = 0, \forall i \in S, V_i(t) = 0$. 由式(12)知, 当 $V_0(t) = 0$ 时 $\varepsilon_{2,i} = 0$, 即 $\forall i, j \in S$ 有 $q_{2,i} = q_{2,j}$, 状态 q_2 达到一致. 另一方面 $V_i(t) = 0$, 则有 $q_{3,i} = q_{3,i}^*$. 注意, 当状态 q_2 达到一致时, $q_{3,i}^* = 0$, 所以此时状态 $q_3 = \mathbf{0}$, 也达到一致. 因此按照定理1的控制输入和参数选择范围, 在有限时间内可以使二阶子系统(7)的状态 q_2 达到一致, 状态 q_3 达到一致且为 $\mathbf{0}$, 一阶子系统(6)的状态 q_1 有界. 证毕.

针对带扰动的链式系统(4), 在定理1的基础上可得下面定理.

定理2 在假设1–2的条件下, $\forall i \in S$, 设计如下控制输入:

当 $t \leqslant T_1$ 时, 采用定理1中的控制输入(8)–(9);

当 $t > T_1$ 时

$$u_{1,i} = -k_3(\sum_{j \in N_i} a_{i,j}(q_{1,i} - q_{1,j}))^{\frac{1}{p}} - k_4 \text{sgn}(\sum_{j \in N_i} a_{i,j}(q_{1,i} - q_{1,j})), \quad (28)$$

$$u_{2,i} = -k_5 \text{sgn}(q_{3,i}) - d_1|q_{2,i}| \text{sgn}(q_{3,i}), \quad (29)$$

其中切换时间 T_1 在定理1的证明中提到. 则当控制输入(8)–(9)中的参数定义和范围与定理1中一样, 式(28)–(29)中的参数满足 $k_3 > 0, k_4 > d_1, k_5 > d_2$ 时, 系统(4)中的状态 q_1, q_2, q_3 在有限时间内达到一致, 从而使得具有有界扰动输入的多个非完整移动机器人的各个状态在有限时间内达到一致.

证 当 $t = T_1$ 时,由定理1知道,此时状态 q_1 有界,状态 q_2, q_3 已经达到一致,且 $q_3 = \mathbf{0}$.当 $t > T_1$ 时,控制输入切换为式(28)–(29),系统(4)变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_{1,i} = -k_3 \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \quad -k_4 \operatorname{sgn} \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \right) + d_{1,i}, \\ \dot{q}_{2,i} = (-k_3 \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \right)^{\frac{1}{p}} \\ \quad -k_4 \operatorname{sgn} \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \right) + \\ \quad d_{1,i}) q_{3,i}, \\ \dot{q}_{3,i} = -k_5 \operatorname{sgn}(q_{3,i}) - d_1 |q_{2,i}| \operatorname{sgn}(q_{3,i}) - \\ \quad d_{1,i} q_{2,i} + d_{2,i}. \end{array} \right. \quad (30)$$

构造李雅普诺夫候选函数

$$\hat{V}_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{3,i}^2. \quad (31)$$

对 $\hat{V}_1(t)$ 关于时间 t 求导,根据状态(30),引理3和定理条件 $k_5 > d_2$ 得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}_1(t) &= \sum_{i=1}^n q_{3,i} \dot{q}_{3,i} \leq \\ &\sum_{i=1}^n \left(-(k_5 - |d_{2,i}|) |q_{3,i}| - (d_1 - d_{1,i}) |q_{2,i}| |q_{3,i}| \right) \leq \\ &-(k_5 - d_2) \left(\sum_{i=1}^n q_{3,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &-(k_5 - d_2) \sqrt{2} \hat{V}_1^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

由引理2知再经过时间 $t \leq \frac{2\hat{V}_1^{\frac{1}{2}}(q_3(T_1))}{|k_5 - d_2|\sqrt{2}}$, $\hat{V}_1(t)$ 收敛到零,而 $q_3(T_1) = \mathbf{0}$,所以 $t = 0, q_3 = \mathbf{0}$,由(30)知此时 $\dot{q}_2 = \mathbf{0}$,所以 q_2 会保持切换之前的状态不变.

$\forall i, j \in S$,记 $\varepsilon_{1,i} = q_{1,i} - q_{1,j}$,构造李雅普诺夫候选函数

$$\hat{V}_2(t) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} a_{i,j} \varepsilon_{1,i}^2. \quad (33)$$

对 $\hat{V}_2(t)$ 关于时间 t 求导,根据系统(30)和定理条件 $k_3 > 0, k_4 > d_1$,得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}_2(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \dot{q}_{1,i} \leq \\ &-k_3 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \right)^{1+\frac{1}{p}} - \\ &(k_4 - d_1) \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \right| \leq \\ &-k_3 \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \right)^2 \right)^{\frac{p+1}{2p}}, \end{aligned} \quad (34)$$

与式(14)类似可得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in N_i} a_{i,j} (q_{1,i} - q_{1,j}) \right)^2 &= \\ q_1^T L^T L q_1 &\geq 2\lambda_2(L) \hat{V}_2(t), \end{aligned} \quad (35)$$

利用式(34)–(35)得

$$\dot{\hat{V}}_2(t) + k_3 (2\lambda_2(L))^{\frac{p+1}{2p}} \hat{V}_2^{\frac{p+1}{2p}}(t) \leq 0.$$

根据引理2知,在有限时间内 $\hat{V}_2(t)$ 收敛到零,即 $\forall i \in S, \varepsilon_{1,i} = 0$,则状态 q_1 在有限时间内达到一致.

因此,根据定理2中设计的控制输入,能保证系统(4)的各个状态在有限时间内达到一致.再由变换(5)知,该控制输入能使多个非完整约束移动机器人的状态 x, y, θ ,在控制输入具有未知有界扰动的情况下,有限时间内达到一致. 证毕.

注2 设计控制输入时,先通过定理1中的控制输入(8)–(9)使二阶子系统(7)中的状态 q_2, q_3 在有限时间内达到一致,其中 q_3 达到一致且为 $\mathbf{0}$,再利用式(28)中的控制输入 u_1 使一阶子系统(6)中的状态 q_1 在有限时间内达到一致.由于定理2中的控制输入 u_1 在切换后,会影响到控制输入(9)中的参数 c_1, c_2 ,所以定理2对控制输入 u_2 也进行了切换,切换后的 u_2 能保持状态 q_3 与切换之前的状态一样,即 $q_3 = \mathbf{0}$.结合非完整约束链式系统的耦合性知,此时的 u_2 使得状态 q_2 的导数为零,因此状态 q_2 与切换之前一样,即达到一致.综上,定理2提出的控制输入 u_1, u_2 ,能够解决链式系统(4)的有限时间一致性问题.

注3 $\forall i \in S$,定理1中的控制输入 $u_{1,i}$ 必须不为0,如果输入为0,由二阶子系统(7)知,状态 q_2, q_3 是不可控的,也就无法让这两个状态先达到一致,所以文章的定理1中选择控制输入 $u_{1,i}$ 为正实数.

4 数值仿真

为了验证定理2中控制算法的有效性,考虑具有5个移动机器人的多智能体系统.假设该系统的无向拓扑结构如图2所示.

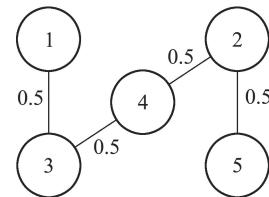


图2 拓扑结构

Fig. 2 Figure of system topology

图中每个移动机器人之间的连接权重均为0.5,则拉普拉斯矩阵如下:

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

由该矩阵得参数 $\beta = 1, \gamma = 0.5, \forall i \in \{1, 2, \dots, 5\}$,取扰动上界: $d_1 = d_2 = 1.5$,参数 $\eta = 5, k_{1i} = 2, p =$

$\frac{9}{7}$. 根据定理1算出 $c_1 = 3.5$, $c_2 = 0.5$, $k_1 > 1.7411$, $k_2 > 38.8151$, 因此 $\forall i \in \{1, 2, \dots, 5\}$, 可取 $k_1 = 1.8411$, $k_2 = 39$, $k_3 = 1$, $k_4 = 2$, $k_5 = 2$. 给出移动机器人的初始位置如下:

$$\begin{aligned}[x_1(0) \ y_1(0) \ \theta_1(0)]^T &= [6 \ -9 \ \frac{\pi}{36}]^T, \\ [x_2(0) \ y_2(0) \ \theta_2(0)]^T &= [14 \ 7 \ \frac{\pi}{18}]^T, \\ [x_3(0) \ y_3(0) \ \theta_3(0)]^T &= [-7 \ -12 \ \frac{\pi}{12}]^T, \\ [x_4(0) \ y_4(0) \ \theta_4(0)]^T &= [3 \ -2 \ -\frac{\pi}{36}]^T, \\ [x_5(0) \ y_5(0) \ \theta_5(0)]^T &= [5 \ -8 \ -\frac{\pi}{18}]^T,\end{aligned}$$

算出切换时间 $T_1 = 72.6$.

因为移动机器人角速度的扰动在整个模型(2)中耦合性较强, 对系统的影响也比较大, 所以文献[31]在用模型(2)进行仿真时将角速度的扰动项设置为零, 为了验证本文提出控制算法的有效性, 在文献[31]的基础上加强了扰动的复杂性, 分别给出5个机器人角速度和线速度的扰动:

$$\begin{aligned}d_{1,1} &= d_{2,1} = 0.9 \sin t, \\ d_{1,2} &= d_{2,2} = 0.5 \cos(t + 1), \\ d_{1,3} &= d_{2,3} = \text{rand}(0, 1), \\ d_{1,4} &= d_{2,4} = \text{rand}(0, 1), \\ d_{1,5} &= d_{2,5} = 0.6 \cos(t + 2),\end{aligned}$$

其中 $\text{rand}(0, 1)$ 表示0与1之间均匀分布的随机数.

根据图3~5知道, 在控制输入带有有界干扰的情况下, 5个机器人的角度 θ , x 轴位置, y 轴位置达到一致. 图6~7是链式系统中状态2, 状态3的一致性仿真图, 可以看到状态2到达一致, 状态3达到一致且为0. 图8是5个机器人在二维坐标平面下的运动轨迹, 从图中可以看到5个移动机器人的运动轨迹在带有未知有界扰动的情况下, 达到一致.

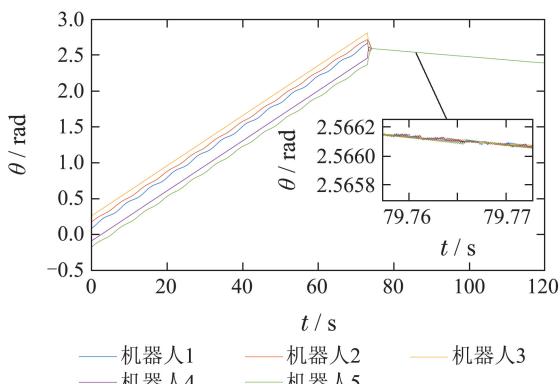


图3 移动机器人的角度 θ

Fig. 3 Angle θ of the mobile robots

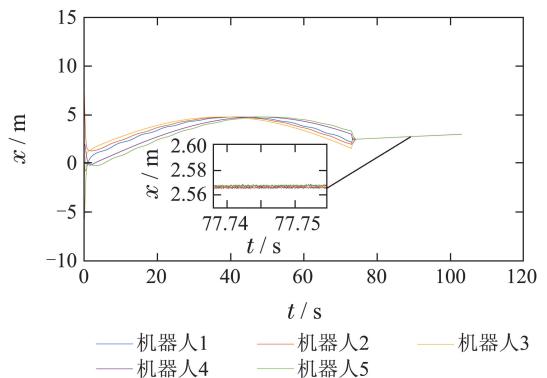


图4 移动机器人的 x 轴位置

Fig. 4 Coordinate x of the mobile robots

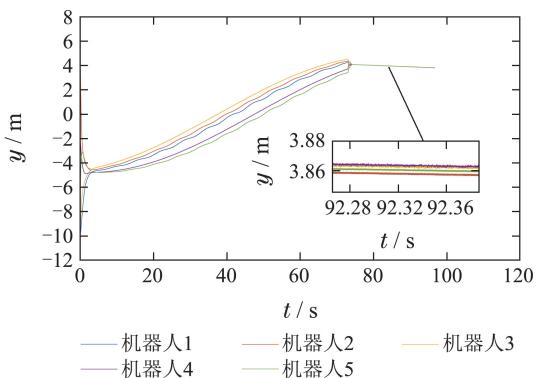


图5 移动机器人的 y 轴位置

Fig. 5 Coordinate y of the mobile robots

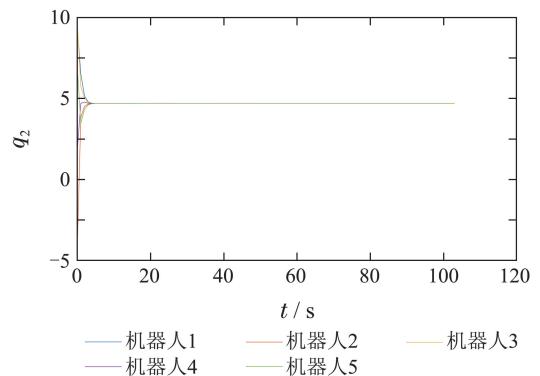


图6 链式系统状态 q_2

Fig. 6 State q_2 of the chain system

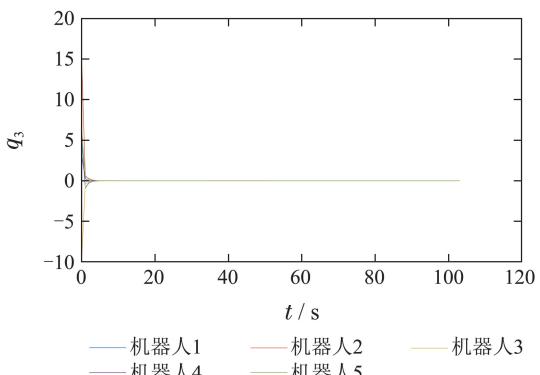


图7 链式系统状态 q_3

Fig. 7 State q_3 of the chain system

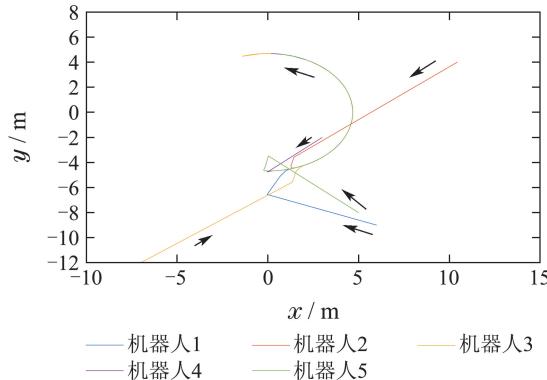


图8 移动机器人运动轨迹

Fig. 8 Track of the mobile robots

注4 利用引理2算出的切换时间 T_1 , 要比二阶子系统(11)达到一致的实际时间大, 因为引理2只是给出了系统达到一致所用时间的上界, 许多参考文献, 如文献[32], 在碰到此类问题时, 都是根据仿真图, 取到比较小的切换时间, 应用于实际系统时也可以通过试验检测到合适的切换时间. 本文在仿真时采用了比较保守的切换时间, 即由引理1算出的时间上界作为切换时间. 同时, 从时间 T_1 的表达式中可以看到, 在其他参数一定时, 参数 η 越大, 时间 T_1 越小, 收敛速度越快, 但是根据引理1知, 参数 η 的大小对控制输入中其他参数的选择均有影响, 因此在仿真时要进行多次调参, 选取合适的参数.

5 结论

本文研究了, 当非完整约束移动机器人的控制输入中带有未知有界扰动时, 多机器人系统状态的有限时间一致性问题. 通过坐标变换, 将非完整约束移动机器人系统转化为链式系统, 再将转化后的系统分为一个一阶子系统和一个二阶子系统来研究. 先利用有限时间控制器, 使二阶子系统中的各个状态达到一致, 并获取到达一致的时间上界, 将该上界作为切换时间, 切换到另一个有限时间控制器, 控制整个链式系统, 最终使系统中各个状态在有限时间内达到一致. 利用Lyapunov稳定性理论和图论等相关知识, 从理论上证明了该算法的有效性, 最后通过数值仿真说明了该算法的可行性. 未来研究工作可以针对如何求得更精确的切换时间进行研究.

参考文献:

- [1] LI Z K, DUAN Z S, CHEN G R, et al. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2010, 57(1): 213–224.
- [2] YU W W, CHEN G R, LU H J. On pinning synchronization of complex dynamical networks. *Automatica*, 2009, 45(2): 429–435.
- [3] DONG W J, FARRELL J A. Cooperative control of multiple non-holonomic mobile agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1434–1448.
- [4] REN W. Distributed attitude alignment in spacecraft formation flying. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2010, 21(2): 95–113.
- [5] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithm and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 410–420.
- [6] LIN Z Y, BROUCKE M, FRANCIS B. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(4): 622–629.
- [7] XIAO F, WANG L, WANG A P. Consensus problems in discrete-time multiagent systems with fixed topology. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2006, 322(2): 587–598.
- [8] CHEN L, HOU Z G, LIN Y Z, et al. Solving a modified consensus problem of linear multiagent systems. *Automatica*, 2011, 47(10): 2218–2223.
- [9] MIAO G Y, MA Q, LIU Q Q. Consensus problems for multi-agent systems with nonlinear algorithms. *Neural Computing & Applications*, 2016, 27(5): 1327–1336.
- [10] WANG L, XIAO F. A new approach to consensus problems for discrete-time multiagent systems with time-delays. *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota: IEEE, 2006, 6: 2118–2123.
- [11] PAN Huan, NIAN Xiaohong, GUO Ling. Consensus control of higher-order multi-agent systems with delays. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(8): 1039–1045.
(潘欢, 年晓红, 郭凌. 高阶时滞多智能体系统一致性控制. 控制理论与应用, 2016, 33(8): 1039–1045.)
- [12] QIN J H, GAO H J, ZHENG W X. Second-order consensus for multi-agent systems with switching topology and communication delay. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(6): 390–397.
- [13] SONG Li, WU Qinghe. Average consensus of second-order multi-agent systems with time-delays and uncertain topologies. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 1047–1052.
(宋莉, 伍清河. 具有时延和不确定拓扑的二阶多智能体系统的平均一致性. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 1047–1052.)
- [14] KIM Y, MESBAHI M. On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph Laplacian. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 116–120.
- [15] OLFATI-SABER R, MURRAY R. Consensus problems in network of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520–1533.
- [16] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751–766.
- [17] LI S H, DING S H, LI Q. Global set stabilisation of the spacecraft attitude using finite-time control technique. *International Journal of Control*, 2009, 82(5): 822–836.
- [18] DU H B, LI S H, QIAN C J. Finite-time attitude tracking control of spacecraft with application to attitude synchronization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(11): 2711–2717.
- [19] ZHAO D Y, LI S Y, ZHU Q M, et al. Robust finite-time control approach for robotic manipulators. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(1): 1–15.
- [20] LI S H, DU H B, LIN X Z. Finite-time consensus algorithm for multiagent systems with double-integrator dynamics. *Automatica*, 2011, 47(8): 1706–1712.
- [21] WANG Fang, CHEN Xin, HE Yong, et al. Finite-time consensus control of second-order multi-agent systems with jointly-connected. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 981–986.
(王芳, 陈鑫, 何勇, 等. 联合连通条件下的二阶多智能体系统有限时间一致性控制. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 981–986.)
- [22] XIAO F, WANG L, CHEN J, et al. Finite-time formation control for multiagent systems. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605–2611.
- [23] LIN Z, BRUCE F, MAGGIORE M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 121–127.

- [24] XIE W J, MA B L. Position centroid rendezvous and centroid formation of multiple unicycle agents. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(17): 2055 – 2061.
- [25] DIMAROGONAS D, KYRIAKOPOULOS K. On the rendezvous problem for multiple nonholonomic agents. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2007, 52(5): 916 – 922.
- [26] XIE W J, MA B L. Smooth time-invariant control for leaderless consensus of networked nonholonomic systems. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2017, 14(6): 1 – 9.
- [27] ZHU J, LU J, YU X. Flocking of multi-agent non-holonomic systems with proximity graphs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2013, 60(1): 199 – 210.
- [28] DU H B, WEN G H, et al. Finite-time consensus of multiple nonholonomic chained-form systems based on recursive distributed observer. *Automatica*, 2015, 62(C): 236 – 242.
- [29] OU M Y, DU H B. Finite-time formation control of multiple nonholonomic mobile robots. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2014, 24(1): 140 – 165.
- [30] HAEDY G, LITTLEWOOD J, POLYA G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [31] QIAN C J, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1061 – 1079.
- [32] SHI S, YU X, LIU G H. Finite-time consensus algorithm for multiple nonholonomic disturbed systems with its application. *Mathematical Problems in Engineering* 2015, DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/358161>.
- [33] DU H B, WEN G H, et al. Distributed finite-time cooperative control of multiple high-order nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Neural Networks and Linear Systems*, 2017, 28(12): 2998 – 3006.

作者简介:

姜玉涛 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体系统控制, E-mail: 2120160379@mail.nankai.edu.cn;

刘忠信 教授, 博士生导师, 中国人工智能学会智能空天系统专业委员会委员, 中国智能物联系统建模与仿真专业委员会委员, 主要研究方向为多智能体系统、复杂动态网络、计算机控制与管理, E-mail: lzhx@nankai.edu.cn;

陈增强 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能预测控制、多智能体系统控制、混沌系统与复杂动态网络, E-mail: chenqz@nankai.edu.cn.